
DEL A

1. Betrakta funktionen f som ges av $f(x) = 1 + x + \frac{4}{(x-2)^2}$.
 - A. Bestäm definitionsmängden till f .
 - B. Bestäm alla intervall där f är växande respektive avtagande.
 - C. Bestäm alla lokala extrempunkter till f .
 - D. Bestäm alla asymptoter till funktionsgrafen $y = f(x)$.
 - E. Skissa med hjälp av ovanstående funktionsgrafen $y = f(x)$.
 2. Beräkna nedanstående integraler:
 - A. $\int_0^2 \frac{x}{(x^2 + 4)^{1/3}} dx$ (använd gärna substitutionen $u = x^2 + 4$)
 - B. $\int_1^4 \sqrt{x} \ln x dx$ (använd gärna partiell integration)
 3. Bestäm den största area en rätvinklig triangel kan ha, om hypotenusan och ena kateten har en sammanlagd längd av 1 meter. Rita figur!
-

DEL B

4. Betrakta funktionen $f(t) = e^t - \cos t - \sin t$.

A. Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 kring punkten $t = 0$ till funktionen f .

B. Ange feltermen (på valfri form).

C. Beräkna gränsvärdet $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t^2}$.

5. Beräkna integralen $\int_0^1 \arcsin x \, dx$.

(För full poäng krävs att integralen beräknas exakt, men en approximativ beräkning kan ge delpoäng. Svaret ska förenklas så långt som möjligt).

6. Laddningen $q(t)$ i kondensatorn i en viss växelströmskrets uppfyller differentialekvationen

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2 \frac{dq}{dt} + 2q = 5 \cos t$$

med initialvillkoren $q(0) = 1$ och $q'(0) = 3$.

A. Bestäm laddningen i kondensatorn vid tiden t .

B. Beskriv vad som händer med laddningen i kondensatorn efter lång tid.

Var god vänd!

DEL C

7. Denna uppgift handlar om teorin kring derivator och integraler:

- A. Formulera produktregeln för derivator (på engelska the product rule).
- B. Bevisa produktregeln för derivator.
- C. Formulera regeln för partiell integration (på engelska integration by parts).
- D. Bevisa regeln för partiell integration.

8. Betrakta funktionen $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} \cos t \, dt$ med definitionsmängd $D = [0, \pi]$.

A. Ange de delintervall av D där F är växande respektive avtagande.

B. Bestäm punkter a och b i D sådana att

$$F(a) \leq F(x) \text{ för alla } x \in D,$$

$$F(b) \geq F(x) \text{ för alla } x \in D.$$

9. Beräkna gränsvärdet $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \arctan \frac{k}{n}$.

DEL A

1. Betrakta funktionen f som ges av $f(x) = x - 2 \arctan x$.

- A. Bestäm definitionsmängden till f .
- B. Bestäm de intervall där f är växande respektive avtagande.
- C. Bestäm alla lokala extrempunkter till f .
- D. Bestäm alla asymptoter till funktionsgrafen $y = f(x)$.
- E. Skissa med hjälp av ovanstående funktionsgrafen $y = f(x)$.

2. Beräkna nedanstående integraler.

- A. $\int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{1 + e^x} dx$ (använd gärna substitutionen $u = 1 + e^x$)
- B. $\int_1^2 \frac{dx}{x^2 - 3x - 4}$ (använd gärna partialbråksuppdelning)

3. Bestäm den lösning till differentialekvationen

$$2y''(t) - 20y'(t) + 50y(t) = t$$

som också uppfyller initialvillkoren $y(0) = 1/125$ och $y'(0) = 1$.

DEL B

4. Beräkna integralen $\int_0^{1/2} \frac{1}{2+8x^2} dx$.

(För full poäng krävs att integralen beräknas exakt, men delpoäng kan ges för en approximativ beräkning. Svaret ska förenklas så långt som möjligt.)

5. Betrakta ekvationen $e^x + \arcsin x = 0$.

- A. För vilka x är uttrycket $e^x + \arcsin x$ definierat?
- B. Visa att ekvationen $e^x + \arcsin x = 0$ har *exakt en* lösning.
- C. Finn ett närmevärde till lösningen med ett fel på högst 0.5.

6. Ett område som ligger på ena sidan om ett plant snitt genom en sfär kallas en *sfärisk kalott*.

- A. Beräkna volymen av den sfäriska kalott man får genom att låta området mellan kurvan $y = \sqrt{100 - x^2}$ och x -axeln, på intervallet $10 - h \leq x \leq 10$, rotera runt x -axeln (vi antar att $0 < h < 10$).
 - B. En sfär med radie 10 meter fylls med vatten i en takt av 0.2 kubikmeter per minut. Med vilken hastighet stiger vattenytan i det ögonblick då vattendjupet h (på det djupaste stället) är 2 meter? (Tips: från uppgift A får du att sambandet mellan vattenvolymen V och vattendjupet h ges av $V = 10h^2\pi - h^3\pi/3$.)
-

Var god vänd!

DEL C

7. Denna uppgift handlar om teorin för kontinuitet och deriverbarhet.
- A. Definiera vad det betyder att en funktion är kontinuerlig i en punkt a .
 - B. Definiera vad det betyder att en funktion är deriverbar i en punkt a .
 - C. Bevisa att en funktion som är deriverbar i a också måste vara kontinuerlig i a .
 - D. Ge exempel som visar att en funktion kan vara kontinuerlig utan att vara deriverbar.
8. Betrakta funktionen f given av $f(x) = x^2 + \int_0^x \sin^2 t \, dt$.
- A. Beräkna Taylorpolynomet av grad 2 till f kring punkten $x = 0$.
 - B. Ange feltermen och visa att den är begränsad om $|x| \leq 1$.
 - C. Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$.
9. Finn tal a och b sådana att $a \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq b$. För full poäng krävs, förutom ett korrekt resonemang, att $b - a \leq 0.2$.
-

DEL A

1. Den 1:a januari 2006 låstes 10 kg av ett visst radioaktivt ämne in i en källare. Ämnet sönderfaller i en takt som är direkt proportionell mot hur mycket som finns kvar av ämnet. Halveringstiden är 50 år. Hur mycket finns kvar av ämnet den 1:a januari 2016?
 2. Beräkna nedanstående integraler.
 - A. $\int_0^{2\pi} |\sin x + \cos x| dx$ (tips: dela upp integrationsintervallet)
 - B. $\int_1^e x^2 \ln x dx$ (tips: använd partiell integration)
 3. Betrakta funktionen f som ges av $f(x) = \frac{x+2}{x^2+1} + 2 \arctan x$.
 - A. Bestäm definitionsmängden till f .
 - B. Bestäm de intervall där f är växande respektive avtagande.
 - C. Avgör om f antar något största respektive minsta värde.
 - D. Finn alla asymptoter till funktionsgrafén $y = f(x)$
 - E. Bestäm med hjälp av ovanstående värdemängden till f .
-

DEL B

4. Vi ska Taylorutveckla funktionen $f(x) = \ln(1+x)$.
- A. Bestäm Taylorpolynomet av grad 4 kring punkten $x = 0$ till funktionen f .
 - B. Använd polynomet i uppgift A för att beräkna ett närmevärde till $\ln 2$.
 - C. Avgör om felet i ditt närmevärde är mindre än 0.25.
5. Vi ska bestämma tyngdpunkten (x_T, y_T) för övre halvan av den homogena enhetscirkelskivan, dvs området som ges av oliketerna $x^2 + y^2 \leq 1$ och $y \geq 0$. Av symmetriskäl är det uppenbart att $x_T = 0$, men y -koordinaten måste beräknas. Med hjälp av ett jämviktsresonemang kan man visa att

$$y_T = \frac{\int_0^1 2y\sqrt{1-y^2} dy}{\int_0^1 2\sqrt{1-y^2} dy}.$$

Beräkna y -koordinaten för tyngdpunkten!

6. Ett föremål med massan m faller genom jordatmosfären mot jordens yta. Om vi antar att luftmotståndet är direkt proportionellt mot farten v fås enligt Newtons andra lag differentialekvationen

$$mv'(t) = -kv(t) + mg$$

där k är en positiv konstant och g tyngdaccelerationen.

- A. Bestäm farten v vid en godtycklig tidpunkt t , om föremålet släpps från vila vid tidpunkten $t = 0$.
 - B. Visa att farten enligt modellen inte kan öka obegränsat utan kommer att närma sig ett visst värde efter lång tid. Bestäm detta värde.
-

Var god vänd!

DEL C

7. Denna uppgift handlar om teorin kring lokala extrempunkter.
- A. Definiera vad som menas med en lokal maxpunkt till en funktion f .
 - B. Bevisa följande påstående: Om funktionen f har en lokal maxpunkt i en inre punkt a i definitionsmängden och f är deriverbar i a , så är $f'(a) = 0$.
 - C. Visa med ett exempel att en funktion kan ha en derivata som är 0 i en punkt utan att den punkten är en lokal extrempunkt.
 - D. Visa med ett exempel att en funktion kan ha en lokal maxpunkt i en punkt utan att funktionen har en derivata som är 0 i den punkten.
8. Betrakta kurvan med ekvation $y = x^4$. För varje punkt (x, y) på kurvan (utom origo) så har kurvan en normallinje som skär y -axeln i exakt en punkt $(0, b)$. Bestäm det minsta möjliga värdet på b .
9. Avgör om den generaliserade integralen

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{x \sin x + \sqrt{x}}$$

är konvergent eller divergent.

DEL A

1. Derivera nedanstående funktioner med avseende på x och ange för vilka x derivatan existerar. Endast svar krävs.

A. $f(x) = \arctan \frac{1}{x}$

B. $g(x) = 2^x$

C. $h(x) = xe^{-x^2}$

D. $k(x) = \frac{\sqrt{x}}{\ln x}$

2. Beräkna nedanstående integraler och förenkla svaren så långt som möjligt.

A. $\int \tan x \, dx$ (använd substitutionen $u = \cos x$)

B. $\int x^2 \cos x \, dx$ (använd upprepad partiell integration)

3. Avgör om funktionen $f(x) = |2x - 1| + \arcsin x$ antar något största respektive minsta värde och bestäm i så fall dessa. Svaret ska förenklas så långt som möjligt.
-

DEL B

4. Antag att funktionen f är tre gånger deriverbar på hela reella axeln. Antag vidare att $f(1) = 2$, $f'(1) = -3$ och $|f''(x)| \leq 5$ för alla x .

- A. Bestäm ett närmevärde till $f(1.1)$ med hjälp av linjär approximation (Taylorpolynom av grad 1).
B. Bestäm så noggrant som möjligt en gräns för felet i ditt närmevärde.

5. Beräkna integralen

$$\int_0^{\sqrt{3}} \arctan x \, dx.$$

(För full poäng krävs att integralen beräknas exakt, men delpoäng kan ges för en approximativ beräkning. Svaret ska förenklas så långt som möjligt.)

6. Betrakta kurvan som ges av ekvationen $2x^2 + 4xy + 3y^2 + 2y = 10$.

- A. Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan i punkten $(x_0, y_0) = (-1, 2)$.
B. Bestäm med hjälp av tangenten ett närmevärde för y -koordinaten till en punkt på kurvan vars x -koordinat är -0.8 .
C. Kan det finnas mer än en punkt på kurvan som har x -koordinat -0.8 ?
-

Var god vänd!

DEL C

7. Betrakta funktionen f som ges av

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{när } x \neq 0 \\ 1 & \text{när } x = 0 \end{cases}$$

- A. Är f udda? Är f jämn?
- B. I vilka punkter är f kontinuerlig?
- C. I vilka punkter är f deriverbar?
- D. Är f integrerbar på intervallet $-\pi \leq x \leq \pi$?

8. Bestäm det minsta tal M sådant att $|f''(x)| \leq M$ för alla $x \in \mathbb{R}$, om $f(x) = \arctan x$.

9. Kurvorna $y = x^{2/3}$ och $y = x^{3/2}$ begränsar ett område i första kvadranten. Beräkna längden av områdets begränsningskurva.

DEL A

1. (a) Bestäm Taylor polynomet av grad 2 till $\ln(1+x)$ omkring $x=0$. **(2 p)**
(b) Bestäm ett närmevärde för $\ln(6/5)$ som inte avviker mer än $3/1000$. **(2 p)**
2. (a) Bestäm alla primitiva funktioner till $\frac{1}{\sqrt{x}+1}$. (Tips: Substituera $u = \sqrt{x}$.) **(2 p)**
(b) Bestäm gränsvärdet **(2 p)**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos(x) - 2 + x^2}{x^4}.$$

3. Låt L vara tangentlinjen i punkten $(1, e)$ till kurvan $y = xe^{x^2}$. Bestäm skärningspunkten mellan L och x -axeln. **(4 p)**
-

DEL B

4. Vi betraktar en LRC-krets med en spänningskälla, en spole med induktansen 1 henry, ett motstånd med resistansen 15 ohm och en kondensator med kapacitansen $1/50$ farad. Strömmen i genom kretsen uppfyller differentialekvationen

$$i''(t) + 15i'(t) + 50i(t) = 0.$$

Lös differentialekvationen och bestäm strömmen vid tiden t om $i(0) = 0$ ampere och $i'(0) = 1$ ampere/sekund. **(4 p)**

5. (a) Skissa kurvan $y = \cos x - 2x$. **(2 p)**
(b) Använd lösningen av uppgift (a) för att visa att ekvationen $\cos x = 2x$ har exakt en lösning. **(1 p)**
(c) Ange ett intervall av längd högst $\frac{1}{2}$ som innehåller lösningen av ekvationen $\cos x = 2x$. (Längden av ett intervall $[a, b]$ är $|b - a|$.) **(1 p)**

6. Vi betraktar funktionen

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

definerad på intervallet $-1 \leq x \leq 1$.

- (a) Skriv upp integralen som ger längden av funktionsgrafens $y = f(x)$. **(2 p)**
(b) Beräkna längden av denna kurva. **(2 p)**
-

Var god vänd!

DEL C

7. (a) Definiera vad det betyder för en funktion f att vara kontinuerlig i a . **(1 p)**
(b) Definiera vad det betyder för en funktion f att vara deriverbar i a . **(1 p)**
(c) Bestäm talen a och b så att funktionen f som ges av

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ ax + b & x > 1 \end{cases}$$

blir både kontinuerlig och deriverbar i punkten $x = 1$. **(2 p)**

8. Låt funktionen f vara definierad genom

$$f(t) = \begin{cases} \cos^2 t, & 0 \leq t \leq 1 \\ t^2 + 1 & t > 1 \end{cases}$$

Beräkna för varje tal $x \geq 0$ integralen **(4 p)**

$$\int_0^x f(t) dt.$$

9. Beräkna gränsvärdet **(4 p)**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{n+k}{n^4} \right)^{1/3}$$

DEL A

1. (a) Visa att $F(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$ är en primitiv funktion till $f(x) = 1/\sqrt{x^2 + a^2}$ för varje val av konstanten C . **(2 p)**
(b) Beräkna integralen

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 16}}$$

och förenkla svaret så långt som möjligt. **(2 p)**

2. (a) Bestäm integralen $\int_0^{1/2} \arcsin x \, dx$. **(2 p)**

- (b) Beräkna gränsvärdet $\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n\}$ när $a_n = \sum_{i=2}^n \frac{2}{3^i}$. **(2 p)**

3. Funktionen f ges av $f(x) = -6 + |x + 3| + |4 - 2x|$. Bestäm alla reella tal x som löser olikheten $f(x) < 0$. (Tips: Skissa grafen.) **(4 p)**
-

DEL B

4. Positionen $y(t)$ av en viss partikel i ett kraftfält vid tiden t uppfyller differentialekvationen

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0.$$

- (a) Om man vet att $y(t) = 3e^{-3t} + 6e^{2t}$, vilka värden har då a och b ? **(2 p)**
(b) Lös differentialekvationen när $a = -5$ och $b = 6$ med initialvillkoren $y(0) = 1$ och $y'(0) = 4$. **(2 p)**

5. Låt $f(x) = \arctan(x^2)$.

- (a) Bestäm Taylorpolynomet av grad 1 till $f(x)$ omkring $x = 1$. **(2 p)**
(b) Visa att $|\frac{\pi}{4} + \frac{1}{10} - f(1.1)| < 1/50$. **(2 p)**

6. Ellipsen E med halvaxlarna $a > 0$ och $b > 0$ ges av ekvationen $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Bestäm den största möjliga area en rektangel kan ha om den har sina hörn på ellipsen E , och där rektangelns sidor är parallella med halvaxlarna. **(4 p)**
-

Var god vänd!

DEL C

7. Låt f vara en funktion på ett intervall $I = [a, b]$. Antag att f är kontinuerlig, växande samt positiv på intervallet I . För varje x i I , låt $A(x)$ vara arean mellan funktionsgrafen och x -axeln till f på intervallet $[a, x]$. Visa fundamentalsatsen som säger att funktionen A är deriverbar och att $A'(x) = f(x)$. **(4 p)**

8. Funktionen f ges av **(4 p)**

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} + \frac{4}{5} \arctan x.$$

Bestäm det största öppna intervall som innehåller punkten $x = 1$, där f är inverterbar.

9. (a) Avgör om det finns något tal $R > 0$ sådant att **(2 p)**

$$\int_1^R \frac{\sin^2 x}{x^2} dx > 100.$$

- (b) Avgör om det finns något tal $R > 0$ sådant att **(2 p)**

$$\sum_{n=1}^R \frac{1}{\sqrt{n^2 + \frac{1}{2}}} > 100.$$

DEL A

1. (a) Beräkna integralen $\int_0^1 e^{2x} \cos e^x dx$. **(2 p)**
(b) Bestäm gränsvärdet **(2 p)**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)(1 - x^2)}{x + x^2}.$$

2. Effekten P (Watt) i ett motstånd med resistansen R (Ohm) är en funktion av spänningen U (Volt). För denna funktion $P = P(U)$ gäller att $P'(220) = 440/R$. Använd derivatan för att uppskatta hur mycket effekten ändras om spänningen ökas från 220 till 230 volt. **(4 p)**
3. (a) Skriv upp en integral som ger arean mellan t -axeln och kurvan $y = (\arctan t)^2$ på intervallet $[0, x]$. **(2 p)**
(b) Bestäm ökningstakten av arean i uppgift a) i punkten $x = 1$. **(2 p)**
-

DEL B

4. Newtons avsvlningslag säger att ett varmt objekt svalnar i en takt som är proportionell mot temperaturskillnaden mot omgivningen. Låt $y(t)$ vara temperaturen i ett vattenkär, vid tiden t minuter. När vattnet kokar ställs kärlet utomhus i -20° . Temperaturen $y(t)$ uppfyller differentialekvationen på formen $y'(t) = k(y(t) + 20)$. Vi vet också att temperaturen är 40° efter 10 minuter.
- (a) Lös differentialekvationen (ledning: Substituera $u(t) = y(t) + 20$). **(3 p)**
- (b) När är temperaturen 25° ? **(1 p)**
5. Skissa funktionsgrafen till funktionen $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^2 - 3}$. Det ska framgå var funktionen är växande, respektive avtagande, och vilka lokala extrempunkter, nollställena, och asymptoter den har. **(4 p)**
6. Linjär approximation av funktionen $f(x) = x^{1/3}$ omkring punkten $a = 8$ ger feltermen $E(x)$. För varje x finns ett tal $s = s(x)$ sådant att $E(x) = \frac{f''(s)}{2}(x - 8)^2$, där $8 < s < x$.
- (a) Visa att $|E(x)| < \frac{1}{9.32}$ på intervallet $8 \leq x \leq 9$. **(2 p)**
- (b) Visa att $|9^{1/3} - \frac{25}{12}| < \frac{1}{9.32}$. **(2 p)**
-

Var god vänd!

DEL C

7. Vi betraktar funktionen f som ges av

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

- (a) Visa att f är deriverbar i origo, och bestäm $f'(0)$. **(2 p)**
(b) Är f :s derivata kontinuerlig i origo? **(2 p)**

8. Resonemanget: “Då $-1/x$ är en primitiv funktion till $1/x^2$ har vi att

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_{-1}^1 = -2.”$$

är gålet. Förklara vad som är fel i resonemanget, och bestäm sedan korrekt värde av integralen ovan. **(4 p)**

9. Kardioidkurvan parametriseras genom

$$x(t) = \frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{4} \cos 2t \quad y(t) = \frac{1}{2} \sin t + \frac{1}{4} \sin 2t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

- (a) Bestäm längden av kurvan. **(2 p)**
(b) Bestäm minsta avståndet från kurvan till origo. **(2 p)**
-

DEL A

1. Halveringstiden för den radioaktiva isotopen kol-14 är cirka 5730 år. Levande organismer har en ungefärligen konstant halt kol-14, men i döda organismer minskar ämnet i en takt som är proportionell mot mängden av ämnet, dvs mängden $y(t)$ uppfyller en differentialekvation på formen $y' = ky$ för någon konstant k . Ett visst benfragment innehåller 80% av den ursprungliga mängden kol-14. Hur gammalt är benfragmentet? **(4 p)**
 2. Låt R vara det begränsade område i första kvadranten som ligger över kurvan $y = x^2$ och under kurvan $y = 8 - x^2$. Bestäm volymen av den rotationskropp som genereras då R roteras ett varv runt y -axeln. **(4 p)**
 3. Ellipsen E ges som lösningar till ekvationen $3x^2 + 4y^2 = 5$. Bestäm en ekvation för linjen L som tangerar E i punkten $P = (1, \sqrt{2}/2)$. **(4 p)**
-

DEL B

4. Beräkna nedanstående integraler:

(a) $\int_1^e x^5 \ln x \, dx.$ **(2 p)**

(b) $\int_3^4 \frac{6}{x^2 - x - 2} \, dx.$ **(2 p)**

5. Låt $P(x)$ vara andra ordningens Taylorpolynom kring $x = 0$ till funktionen $f(x) = e^x$.

(a) Använd $P(x)$ för att ge ett närmevärde till $\sqrt{e}$. **(2 p)**

(b) Avgör om felet i närmevärdet är större eller mindre än 0.02. **(2 p)**

6. Betrakta funktionen f som ges av $f(x) = \frac{x^3}{2x^2 - 1}$. Skissa kurvan $y = f(x)$ med hjälp av en undersökning där det framgår var funktionen är växande respektive avtagande, vilka lokala extrempunkter funktionen har, vilka funktionens nollställen är och vilka asymptoter funktionskurvan har. **(4 p)**

Var god vänd!

DEL C

7. (a) För vilka reella x gäller sambandet $\sin(\arcsin x) = x$? **(2 p)**
(b) Härled derivatan av $\arcsin x$ genom implicit derivering av detta samband. **(2 p)**

8. Bevisa, genom beräkning av en integral, formeln $A = \pi ab$ för arean A av en ellips med halvaxlarna a och b . **(4 p)**

9. Bevisa att formeln

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \, dx$$

gäller för alla heltal $n \geq 2$.

(4 p)

DEL A

1. (a) Bestäm alla primitiva funktioner till $f(x) = \cos^3(x) \sin(x) + 2$. **(3 p)**
 - (b) Bestäm Taylorpolynomet av grad 2, omkring $x = 1$, till $\ln(1 + \frac{1}{2}x^2)$. **(3 p)**
 - (c) Ange definitionsmängden och värdemängden till funktionen $f(x) = \arcsin(x)$. Bestäm slutligen $\arcsin(\sin(\frac{3\pi}{4}))$. **(3 p)**
 - (d) Skissera funktionsgrafén till $f(x) = \sqrt{\sin^2(x-1)}$. **(3 p)**
-

DEL B

2. (a) Ge ett exempel på en funktion definierad på ett slutet och begränsat intervall som inte antar ett största värde. **(2 p)**
- (b) Visa att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x-\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}} e^x & \text{om } x \neq \frac{1}{2}, \\ \sqrt{e} & \text{om } x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

- är kontinuerlig i punkten $x = \frac{1}{2}$. **(2 p)**
- (c) Avgör om funktionen $f(x)$ antar ett största och ett minsta värde på det slutna intervallet $[0, 1]$. **(2 p)**
3. (a) Bestäm alla primitiva funktioner till $f(x) = e^{3x} \sin(2x)$. **(4 p)**
 - (b) En kurva parametriseras med $x(t) = \cos^3(t)$ och $y(t) = \sin^3(t)$, där t genomlöper intervallet $[0, \pi/2]$. Bestäm längden av kurvan. **(2 p)**
-

DEL C

4. Visa att $I(p) = \int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)^p} dx$ divergerar för $0 < p \leq 1$. **(6 p)**

5. Visa olikheten

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}(\sqrt{k}+1)} \geq \ln\left(\frac{n}{4}\right)$$

- för alla $n \geq 1$. (Tips: Summan är en översumma för en integral). **(6 p)**
-

DEL A

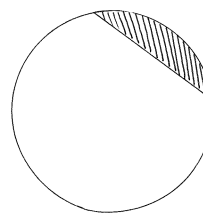
1. Rita funktionsgrafen till funktionen $f(x) = |x - 3| + |x| - 4$. (6 p)
2. Bestäm alla primitiva funktioner till $f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 5x + 6}$. (6 p)

DEL B

3. Vi har funktionen $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x} \sqrt{1 + \cos^{-2}(x)}$. Använd substitutionen $u = 1/\cos x$ för att bestämma $\int_0^{\pi/4} f(x) dx$. (5 p)
4. Polynomet $P(x) = \frac{2}{9} + \frac{8}{9}x - \frac{1}{9}x^2$ är Taylorpolynomet av grad 2, omkring $x = 1$, till funktionen $f(x) = x^{2/3}$.
 - (a) Använd Taylors Sats för att beskriva funktionen $E(x) = f(x) - P(x)$ omkring punkten $x = 1$. (2 p)
 - (b) Visa att $|4^{1/3} - \frac{14}{9}| \leq \frac{4}{81}$. (5 p)

DEL C

5. Avgör om integralen $\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3 - 1}} dx$ är konvergent eller divergent. (6 p)
6. Ett cirkelsegment S är en del av en cirkelskiva som begränsas av en cirkelbåge och en rät linje (korda) som skär cirkeln i två punkter. (Se skuggade området i figuren.) Låt cirkeln ha radie r , och låt cirkelbågen uppta vinkeln t , sedd från cirkelns centrum ($t < \pi$). Detta ger ett cirkelsegment S_t . Låt $A(S_t)$ vara arean av cirkelsegmentet S_t . Beräkna gränsvärdet (6 p)



$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{A(S_t)}{t^3}.$$

DEL A

1. Bestäm alla primitiva funktioner till $f(x) = \frac{(\ln(x))^3}{x}$. (4 p)
 2. Bestäm Taylorpolynomet av grad 2, omkring $x = 1$, till $g(x) = e^{-x^2}$. (4 p)
 3. Ge definitionen av derivatan till en funktion φ i en punkt x . (4 p)
-

DEL B

4. Visa att ekvationen $x^7 + 3x^5 - \frac{3}{2x} + 2 = 0$ har en unik lösning i det öppna intervallet $(0, 1)$. (4 p)
 5. Bestäm integralen $\int_0^1 x\sqrt{1+x} dx$. (4 p)
 6. Funktionen $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$ är definierad på det öppna intervallet $(-2, 2)$. Visa att $f(x)$ har en invers. (4 p)
-

DEL C

7. För varje heltal $N > 0$ låter vi $S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n\sqrt{n}}$. Serien konvergerar mot ett tal S . Vi vill approximera talet S med S_N . Bestäm något tal N sådan att felet i approximationen är mindre än $1/100$. (6 p)
 8. För varje heltal $n > 0$ definierar vi intervallet $I_n = [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$. Låt φ vara en kontinuerlig funktion, definierad för alla tal x . Vi låter φ_n vara det största värdet funktionen φ har på intervallet I_n . Visa att gränsen
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n$$
 existerar, och bestäm detta värde. (6 p)
-

DEL A

1. Beräkna gränsvärdet (3 p)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin(x)} - 1 - x}{\ln(1 + x^2)}.$$

2. Vad menas med att en funktion φ är kontinuerlig i en punkt x ? (4 p)

3. Kurvan $y = \sqrt{1 + |x|^3}$ samt linjerna $x = -3$, $x = 3$ och $y = 0$ innesluter ett begränsat område i planet. Detta område roteras kring x -axeln och genererar en rotationskropp. Bestäm volymen av denna rotationskropp. (5 p)
-

DEL B

4. Vi har funktionen $F(x) = 4 \arctan(x) - 4x + x^2$ definierad för alla reella tal x .
(a) Lös ekvationen $F'(x) = 0$. (2 p)
(b) Visa att $F'(x) > 0$ för alla $x > 1$. (2 p)
(c) Visa att $4 \arctan(x) > \pi - 3 + 4x - x^2$ för alla $x > 1$. (2 p)
5. Låt $f(x) = \ln(1 + x)$.
(a) Bestäm Taylorpolynomet av grad n till $f(x)$, omkring $x = 0$. (2 p)
(b) Ge ett närmevärde till $\ln(6/5)$ som inte avviker mer än $1/300$. (4 p)
-

DEL C

6. Använd substitutionen $x = 2 \sin(t)$ för att bestämma en primitiv funktion till (6 p)

$$f(x) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}.$$

7. Avgör frågan om konvergens eller divergens av serien (6 p)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\sqrt{n} - 1}{n^3 - n + 1}.$$

DEL A

1. Låt $f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$, med $x \neq 1$.
- (a) Bestäm gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 1+}(f(x))$. (2 p)
 - (b) Avgör om gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 1}(f(x))$ existerar. (2 p)
 - (c) För vilka x gäller det att $f(x) < 1$. (2 p)
2. Beräkna nedanstående integraler.
- (a) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{1 + \sin^2(x)} dx$. (3 p)
 - (b) $\int_0^1 \frac{x^2}{1 + x^2} dx$. (3 p)
-

DEL B

3. En modell för en population $P(t)$ ges av integralekvationen

$$P'(t) = 2P(t) - 2 \int_0^t P(s) ds - e^{2t},$$

där t är tiden.

- (a) Deriverar man integralekvationen erhåller man en andra ordningens ordinär differentialekvation (ODE). Bestäm denna ODE. (2 p)
 - (b) Bestäm $P(t)$ om startpopulationen $P(0) = 10$. (4 p)
4. Funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ är definierad för alla positiva reella tal.
- (a) Bestäm Taylorpolynomet $P(x)$ av grad 2 till f kring punkten $x = 4$. (2 p)
 - (b) Bestäm ett närmevärde till $\sqrt{5}$ som avviker högst $1/200$ från det faktiska värdet. (4 p)
-

DEL C

5. Visa att $\ln(n!) > 1 + n(\ln(n) - 1)$ för alla $n \geq 2$. (6 p)
6. Antag att funktionen $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är två gånger deriverbar och att $\phi''(x)$ är kontinuerlig överallt. Visa att om $\phi''(x) > x^2$ för alla x , och om $\phi(0) = -1$, så finns det ett tal $c > 0$ sådant att $\phi(c) = 0$. (6 p)

DEL A

1. Bestäm alla primitiva funktioner till

(a) $f(x) = x^2 e^{1-x^3}$, (3 p)

(b) $g(x) = \arctan(x)$. (3 p)

2. Bestäm punkterna på kurvan $y = x^2$ som ligger närmast punkten $(0, 3)$. (6 p)

DEL B

3. Funktionen f ges av

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 14.$$

För vilka reella värden y har ekvationen $f(x) = y$ precis två olika lösningar? (4 p)

4. Avgör om serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + \sin(n)}{n^2 + \sqrt{n}}$$

är konvergent eller divergent. (3 p)

5. Avgör om $|\ln(3/2) - \frac{3}{8}|$ är större eller mindre än 0.05. (5 p)

DEL C

6. Vi har funktionen

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \cos(1/x) & \text{när } x \neq 0, \\ 0 & \text{när } x = 0. \end{cases}$$

Visa att $F''(0)$ inte existerar. (5 p)

7. Kurvan C parametriseras av

$$r(t) = \left(\frac{\cos t}{t^2}, \frac{\sin t}{t^2} \right) \quad \text{där} \quad \frac{\pi}{2} \leq t < \infty.$$

Visa att kurvan C har ändlig längd. (7 p)

DEL A

1. Denna uppgift behandlar differentialekvationen $y'' - y' - 2y = 12e^{-t}$.
- (a) Bestäm koefficienten A sådan att $y_P(t) = Ate^{-t}$ blir en lösning. **(2 p)**
 - (b) Bestäm samtliga lösningar till differentialekvationen. **(2 p)**
 - (c) Bestäm lösningarna $y(t)$ till differentialekvationen som uppfyller de bägge villkoren $y(0) = 2$ och $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$. **(2 p)**
2. Bestäm alla primitiva funktioner till den rationella funktionen **(6 p)**

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 1}{x^2 - 1}.$$

DEL B

3. Funktionen $g(x) = \ln(1 + \sin x)$ är definierad på det öppna intervallet $I = (-\pi/2, 3\pi/2)$.
- (a) Skissa funktionsgrafen till funktionen g , och markera alla extremvärden. **(3 p)**
 - (b) Ge ett exempel på en kontinuerlig funktion $f(x)$, definierad på I , som inte har extremvärden. **(2 p)**
4. Funktionen $g(x) = \ln(1 + \sin x)$ är definierad på det öppna intervallet $I = (-\pi/2, 3\pi/2)$.
- (a) Bestäm andragradspolynomet $P(x)$ som bäst approximerar funktionen g omkring punkten $x = 0$. **(2 p)**
 - (b) Låt t vara ett tal sådant att $0 \leq t \leq \pi$. Visa att $|g(t) - P(t)| \leq \frac{1}{6}t^3$. **(2 p)**
 - (c) Bestäm ett närmevärde till integralen $\int_0^{1/2} g(x) dx$ som avviker med mindre än $1/300$ från det exakta värdet. **(3 p)**

DEL C

5. (a) Visa att för varje heltal $n \geq 1$ har vi att **(6 p)**

$$\int_{\cos(1/n)}^1 \frac{1}{t} dt \leq \frac{\sin^2(1/n)}{\cos^2(1)}.$$

- (b) Visa att serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} -\ln(\cos(1/n))$$

är konvergent.

(6 p)

DEL A

1. Bestäm Taylorpolynomet av grad 3 till $f(x) = \arctan(2x)$ kring $x = 0$. (4 p)
 2. Bestäm en primitiv funktion till $g(x) = x \cos^3(2x^2)$. (3 p)
 3. Kurvan $y = \sin x$, med $0 \leq x \leq \pi/2$ roteras omkring y -axeln, och bildar en vas V . Bestäm volymen som ryms i vasen V . (5 p)
-

DEL B

4. Vi har funktionen $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos(1/x) & \text{när } x \neq 0 \\ 2 & \text{när } x = 0. \end{cases}$
 - (a) Vad menas med att en funktion är kontinuerlig i en given punkt? (2 p)
 - (b) Visa att $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \cos(1/x)) = 0$. (3 p)
 - (c) Existerar det en kontinuerlig funktion F definierad på hela tallinjen, som sammanfaller med f när $x \neq 0$? (2 p)
 5. Vi har funktionen $g(x) = \int_0^x \frac{1-t}{1+t^{7/2}} dt$, definierad för alla positiva $x \geq 0$.
 - (a) Bestäm talet x där funktionen g uppnår sitt största värde. (2 p)
 - (b) Avgör om gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ existerar. (3 p)
-

DEL C

6. Det existerar ett heltal n sådan att $\sum_{k=1}^n k^3 = 90000$.
 - (a) Visa att $n > 23$. (4 p)
 - (b) Bestäm talet n . (4 p)
 7. En funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kallas *likformigt kontinuerlig* om det till varje $\epsilon > 0$ finns $\delta > 0$ sådant att för alla x och y gäller att
$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$
Visa att funktionen $f(x) = x^2$ inte är likformigt kontinuerlig. (4 p)
-

DEL A

1. Beräkna

(3+3 p)

$$\int_{-1}^1 x^2 \ln(2 + x^3) dx \quad \text{och} \quad \int \frac{3}{2 + 8x^2} dx.$$

2. Låt $f(x) = xe^{-x^2}$ vara definierad för $x > 0$.(a) Bestäm alla lokala extrempunkter till f och avgör deras karaktär (max/min). (2 p)(b) Bestäm de intervall på vilka f är strängt växande respektive strängt avtagande. (2 p)(c) Antar f något största respektive minsta värde? Bestäm i förekommande fall dessa.

(2 p)

DEL B3. Låt $f(x) = \sqrt{x}$ och låt $P(x)$ vara Taylorpolynomet av grad 2 till f kring $x = 1$.(a) Bestäm polynomet $P(x)$. (2 p)(b) Enligt Taylors formel kan resttermen $E(x) = f(x) - P(x)$ skrivas som ett uttryck som innehåller f 's tredjederivata. Vilket är uttrycket? (1 p)(c) Är det sant att $|\sqrt{3/2} - P(3/2)| < 1/100$? (3 p)4. (a) Beräkna den generaliserade integralen $\int_1^\infty \frac{3}{x^2 + 3x} dx$. (4 p)(b) Avgör om serien $\sum_{k=1}^\infty \frac{3}{k^2 + 3k}$ är konvergent eller divergent. (2 p)

DEL C5. (a) Beräkna gränsvärdet $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{n} + \frac{2}{n} \sqrt{\frac{2k}{n}} \right)$. (3 p)

(b) Beräkna gränsvärdet (3 p)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+1} t \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt.$$

6. (a) Antag att funktionen $f(x)$ är kontinuerlig på intervallet $[0, 1]$ och att $0 \leq f(0) \leq 1$ och $0 \leq f(1) \leq 1$. Visa att det finns (minst) en punkt p i intervallet $[0, 1]$ sådan att $f(p) = p$. (3 p)(b) Antag att funktionen $g(x)$ är deriverbar på hela reella axeln och att $|g'(x)| \leq 1/2$ för alla x . Visa att det finns (minst) en punkt p sådan att $g(p) = p$. (3 p)

DEL A

1. (a) Låt $g(x) = \arcsin(\sqrt{x})$. Bestäm g 's definitionsmängd och bestäm $g'(x)$. **(2 p)**
(b) Låt $f(x) = x + \arctan(x)$. Bestäm f 's definitionsmängd och värdemängd. Använd derivatan för att avgöra om funktionen f är inverterbar eller ej. **(4 p)**
2. (a) Beräkna $\int_{\pi^2}^{4\pi^2} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$. **(3 p)**
(b) Funktionen $f(x)$ uppfyller $f'(x) = x \ln(x)$ och $f(1) = 1$. Bestäm funktionen $f(x)$. **(3 p)**
-

DEL B

3. Låt $f(x) = xe^{-x}$, $x \geq 1$.
(a) Bestäm den punkt (x_0, y_0) på funktionsgrafen $y = f(x)$ som gör arean av triangeln med hörn i $(0, 0)$, $(x_0, 0)$ och (x_0, y_0) maximal. **(4 p)**
(b) Finns det någon punkt (x_1, y_1) på funktionsgrafen $y = f(x)$ som gör arean av triangeln med hörn i $(0, 0)$, $(x_1, 0)$ och (x_1, y_1) minimal? **(2 p)**
4. Låt $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$.
(a) Bestäm Taylorpolynomet av ordning 1 till $F(x)$ omkring $x = 0$. **(2 p)**
(b) Bestäm ett närmevärde till $F(1/2)$ som avviker högst $1/8$ från det exakta värdet. **(4 p)**
-

DEL C

5. (a) Visa att för alla heltal $n \geq 1$ gäller olikheten $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} > \ln(n)$. **(3 p)**
(b) Beräkna gränsvärdet **(3 p)**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

6. Antag att funktionen $f(x)$ är definierad på hela reella linjen och att $(f(x))^2 \leq x^4 + x^6$ för alla x .
(a) Avgör om f måste vara kontinuerlig i punkten $x = 0$. **(3 p)**
(b) Avgör om f måste vara deriverbar i punkten $x = 0$. **(3 p)**
Motivera dina svar med bevis eller motexempel.

DEL A

1. (a) Beräkna $\int_1^e \frac{(1 + \ln(x))^2}{x} dx$. (3 p)
(b) Bestäm alla primitiva funktioner till $f(x) = x \sin(x)$. (3 p)
 2. (a) Låt L vara tangentlinjen till kurvan $y = \arctan(x^2)$ i den punkt på kurvan som har x -koordinat 1. Bestäm en ekvation för linjen L . (3 p)
(b) Låt $f(x) = e^{-x}$ och låt $P(x)$ vara Taylorpolynomet av grad 1 till f kring $x = 0$. Visa att $0 < f(1/3) - P(1/3) < 1/10$. (3 p)
-

DEL B

3. Låt $f(x) = (x^2 - 2x - 2)e^x$.
(a) Har funktionen f något största eller minsta värde? Bestäm i förekommande fall dessa. (4 p)
(b) Hur många lösningar har ekvationen $f(x) = -1$? (2 p)
 4. (a) Avgör om den generaliserade integralen $\int_0^\infty \frac{2 + \sin(x)}{1 + x^2} dx$ är konvergent eller divergent. (4 p)
(b) Avgör om serien $\sum_{k=1}^\infty \cos(1/k^2)$ är konvergent eller divergent. (2 p)
-

DEL C

5. Låt $n \geq 1$ vara ett heltal, och låt P_n vara partitionen av intervallet $[2, 3]$ i n stycken delintervall, alla av längd $1/n$. Låt $L(P_n)$ vara Riemann-undersumman (lower sum) av funktionen $f(x) = 3x$ på intervallet $[2, 3]$ med avseende på den givna partitionen P_n .
(a) Bestäm en formel, bara beroende på talet n , för $L(P_n)$. (4 p)
(b) Bestäm gränsvärdet $\lim_{n \rightarrow \infty} L(P_n)$. (2 p)
6. Antag att funktionen f är deriverbar med derivatan $f'(x) = 0$ för alla reella tal x .
(a) Visa att f är kontinuerlig på hela reella axeln (dvs visa att deriverbarhet medför kontinuitet). (3 p)
(b) Använd differentialkalkylens medelvärdessats för att visa att funktionen f är konstant. (3 p)

DEL A

1. Beräkna gränsvärdena (3+3 p)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x/2} + \ln(x) + 2e^{2x}}{3e^{2x} + x^{100} - 7} \quad \text{och} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{x - x \cos(x)}.$$

2. (a) Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = 1/(x^2 + 5x + 6)$. (3 p)
(b) Bestäm arean av området i planet som begränsas av kurvan $y = xe^{-x}$ och linjerna $y = 0$, $x = 0$ och $x = 1$. (3 p)
-

DEL B

3. Låt $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^4 + 1}}$. (6 p)

- Bestäm alla intervall där f är växande respektive avtagande och bestäm alla lokala extrempunkter.
- Finn alla asymptoter till kurvan $y = f(x)$.

Använd informationen ovan för att skissa kurvan $y = f(x)$. Bestäm också eventuella största och minsta värden hos funktionen f .

4. Avgör om följande generaliserade integraler är konvergenta eller divergenta. Beräkna dem om de är konvergenta.

(a) $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{x} dx$. (3 p)

(b) $\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln x)^2} dx$. (3 p)

DEL C

5. Visa att (6 p)

$$\ln \left(\left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{1}{2x}} \right) > 1 \quad \text{för alla } 0 < x < 1.$$

6. Antag att funktionen f är definierad på hela reella axeln och att f , f' och f'' är kontinuerliga överallt. Antag vidare att $f(0) = f'(0) = 0$ och att $f''(x) \geq 0$ för alla x . Visa att serien $\sum_{k=1}^{\infty} f(1/k)$ är konvergent. (6 p)

DEL A

1. (a) Bestäm alla funktioner $y(t)$ som uppfyller $y'' + y' - 2y = 0$. **(2 p)**
(b) Bestäm alla funktioner $y(t)$ som uppfyller **(4 p)**

$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = 4e^{-t} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0 \\ y(0) = 5. \end{cases}$$

2. Beräkna följande integraler: **(3+3 p)**

$$\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}} dx \quad \text{och} \quad \int \frac{x+4}{x^2+2x} dx$$

DEL B

3. Låt $f(x) = x \ln x$.
(a) Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 till f kring punkten $x = 1$ och använd det för att bestämma ett närmevärde till $3 \ln 3$. **(2 p)**
(b) Är det sant att närmevärdet i (a) avviker med högst $1/10$ från det faktiska värdet? **(3 p)**
(c) Är närmevärdet större eller mindre än $3 \ln 3$? **(1 p)**
4. Hur många lösningar har ekvationen

$$\frac{1}{x} + 2 \arctan x = 3?$$

DEL C

5. Visa att för alla positiva heltal m och n gäller att

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \leq \ln 2 \leq \sum_{k=m}^{2m-1} \frac{1}{k}.$$

6. (a) Antag att $f(0) = 0$ och att $|f(x)| > \sqrt{|x|}$ för alla $x \neq 0$. Visa att funktionen f inte kan vara deriverbar i punkten $x = 0$. **(3 p)**
(b) Antag att funktionen g är definierad på hela reella axeln och uppfyller följande villkor: $g'(0) = k$, $g(0) \neq 0$ och $g(x+y) = g(x)g(y)$ för alla x och y . Visa att $g(0) = 1$ och att $g'(x) = kg(x)$ för alla x . **(3 p)**

DEL A

1. (a) Beräkna integralen $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$. (3 p)
(b) Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = \arctan x$. (3 p)
2. Låt $f(x) = \ln(1 + x^2)$.
(a) Bestäm definitionsmängden till f och beräkna $f'(x)$. (2 p)
(b) Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 till f kring $x = 0$. (2 p)
(c) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$. (2 p)

DEL B

3. (a) Parametrisera kurvan $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$. Skissera också kurvan. (2 p)
(b) Hur stor area kan en rektangel ha om dess hörn ska ligga på kurvan i (a) och ha sidor parallella med koordinataxlarna? (4 p)
4. Låt $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$.
(a) Gör ett teckenschema för derivatan och bestäm alla lokala extrempunkter. Skissera kurvan $y = f(x)$ med hjälp av teckenschemat och med hjälp av relevanta gränsvärden. (3 p)
(b) Avgör vilken eller vilka av följande generaliserade integraler som är konvergenta:
 $\int_0^1 f(x) dx, \int_1^\infty f(x) dx$. Beräkna dem om de är konvergenta. (3 p)

DEL C

5. Låt funktionen f vara definierad för alla reella tal x genom

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{om } x \neq 0 \\ 0, & \text{om } x = 0 \end{cases}$$

- (a) I vilka punkter är f kontinuerlig? (2 p)
(b) I vilka punkter är f deriverbar? (2 p)
(c) Bestäm värdemängden till f . (2 p)
6. Visa att det för varje konstant $c > 0$ gäller att (6 p)

$$\frac{\pi}{2\sqrt{c}} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + c} \leq \frac{\pi}{2\sqrt{c}} + \frac{1}{c}$$

DEL A

1. Beräkna följande integraler: (3+3 p)

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x} \quad \text{och} \quad \int \frac{dx}{x^2 - 4}.$$

2. Låt $f(x) = \sqrt{1-x}$, $0 \leq x \leq 1$. Bestäm den punkt (x_0, y_0) på grafen $y = f(x)$ som gör rektangeln med hörn i punkterna $(0, 0)$, $(x_0, 0)$, (x_0, y_0) och $(0, y_0)$ maximal. Glöm inte att förklara varför arean blir maximal i punkten. (6 p)

DEL B

3. Avgör om det finns någon lösning $y(t)$ till differentialekvationen $y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = 0$ som uppfyller att

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{y(t)}{t} = 1.$$

Bestäm en sådan lösning om en sådan lösning finns, annars förklara varför det inte finns någon. (6 p)

4. Bestäm de punkter på kurvan $y = e^{x^2+2x}$ i vilka tangenten till kurvan går genom punkten $(1, 0)$. (Notera att punkten $(1, 0)$ inte ligger på kurvan.) (6 p)

DEL C

5. Betrakta integralen $\int_1^\infty \frac{2}{2x^2 + \sin x + 1} dx$

- (a) Visa att integralen är konvergent. (2 p)
 (b) Bestäm ett närmevärde till integralen där felet inte är större än $\frac{1}{8}$. (4 p)

6. För varje heltal $n \geq 1$, låt

$$A_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{\left(\frac{1}{n^2}\right)} \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^{\left(\frac{2}{n^2}\right)} \cdot \left(\frac{3}{n}\right)^{\left(\frac{3}{n^2}\right)} \cdots \left(\frac{n}{n}\right)^{\left(\frac{n}{n^2}\right)}.$$

Bestäm $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$. (6 p)

DEL A

1. (a) Finn en lösning till differentialekvationen $y''(x) + 2y'(x) = 12 \cos(2x) + 4 \sin(2x)$ som är på formen $y(x) = A \cos(2x) + B \sin(2x)$ där A och B är konstanter. **(2 p)**
- (b) Bestäm den lösning till differentialekvationen $y''(x) + 2y'(x) = 12 \cos(2x) + 4 \sin(2x)$ som uppfyller $y(0) = 0$ och $y'(0) = 4$. **(4 p)**
2. Beräkna arean av området som begränsas av kurvan $y = \frac{1}{4+x^2} + \frac{x}{x^2+3x+2}$ samt linjerna $y = 0$, $x = 0$ och $x = 2$. Förenkla ditt svar. **(6 p)**

DEL B

3. Låt $f(x) = e^{x - \frac{x^2}{2}}$.
- (a) Bestäm de punkter på kurvan $y = f(x)$ där tangenten är horisontell. **(2 p)**
- (b) Avgör om det finns någon punkt på kurvan $y = f(x)$ där lutningen är maximal. Bestäm en sådan punkt om en sådan punkt finns, annars förklara varför det inte finns någon. **(4 p)**
4. (a) Låt $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$. Visa med hjälp av derivata att funktionen f är avtagande på intervallet $(1, \infty)$. **(2 p)**
- (b) Använd lämpliga integraluppskattningar för att visa att **(4 p)**

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2} \leq \frac{1}{\ln 2}.$$

DEL C

5. Funktionen f är en oändligt deriverbar funktion, definierad i någon öppen omgivning I till $x = e$, och bestämd av villkoren
- $$\begin{cases} e^{f(x)} - x(f(x))^2 = 0 \\ f(e) = 1 \end{cases}$$
- Bestäm andra ordningens Taylorpolynom till f kring punkten $x = e$. **(6 p)**
6. (a) Antag att funktionen g är kontinuerlig överallt (men vi antar inte att g är deriverbar). Låt $f(x) = xg(x)$. Visa att funktionen f är deriverbar i punkten $x = 0$ och bestäm $f'(0)$. **(3 p)**
- (b) Antag att funktionen $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uppfyller $|h(x) - h(y)| \leq |x - y|^2$ för alla reella tal x, y . Visa att h är konstant. **(3 p)**

DEL A

1. (a) Bestäm alla funktioner $f(x)$ sådana att $f'(x) = e^x \sqrt{1 + e^x}$. **(3 p)**
(b) Beräkna $\int_1^2 x^2 \ln x \, dx$. **(3 p)**
2. (a) Låt $f(x) = \sqrt{1 + x}$. Bestäm Taylorpolynomet av grad 1 till f kring $x = 0$, och använd detta polynom för att approximera talet $\sqrt{\frac{3}{2}}$. **(3 p)**
(b) Avgör om felet i approximationen i del (a) är mindre än $1/20$. **(3 p)**

DEL B

3. Bestäm värdemängden till funktionen f som ges av **(6 p)**

$$f(x) = \frac{\ln(1 + x^2)}{1 + x^2}.$$

Svara också på frågan: hur många lösningar har ekvationen $f(x) = 1$?

4. Betrakta differentialekvationen $y''(x) - y(x) = 2e^{-x}$.
(a) Visa att det finns en lösning y_p till ekvationen på formen $y_p(x) = axe^{-x}$, där a är någon konstant. **(2 p)**
(b) Avgör om det finns en lösning y till ekvationen sådan att $\int_0^\infty y(x) \, dx = 1$. Bestäm en sådan lösning om en sådan lösning finns, annars förklara varför det inte finns någon. **(4 p)**

DEL C

5. Visa olikheten **(6 p)**

$$\int_{-1}^x e^{t^2} \, dt > \frac{e^{x^2}}{2x} \text{ för alla } x \geq 1.$$

6. (a) Avgör om det finns någon funktion f , som är kontinuerlig i hela $\mathbb{R}$, sådan att **(3 p)**

$$f(x) = \arctan \frac{1}{x^2} \quad \text{för } x \neq 0.$$

- (b) Avgör om det finns någon funktion f , som är deriverbar i hela $\mathbb{R}$, sådan att **(3 p)**

$$f(x) = \arctan \frac{1}{x^2} \quad \text{för } x \neq 0.$$

DEL A

1. Bestäm den lösning $y(x)$ till differentialekvationen

$$y''(x) - 4y'(x) + 3y(x) = 6$$

som uppfyller villkoren $y(0) = 0$ och $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(x)}{e^{3x}} = 0$. (6 p)

2. Låt

$$f(x) = \frac{1}{(2+x)^2}, \quad 1 \leq x \leq 3.$$

Bestäm den punkt $(a, f(a))$, $1 \leq a \leq 3$, på grafen $y = f(x)$ som gör arean av rektangeln med hörn i punkterna $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(a, f(a))$ och $(0, f(a))$ minimal. (6 p)

DEL B

3. Bestäm värdet på konstanten a så att (6 p)

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2 + x} = \int_1^\infty a x e^{-x} dx.$$

4. Låt $f(x) = \int_0^x \ln(1 + \sin t) dt$.

(a) Bestäm Taylorpolynomet av ordning 2 till f kring $x = 0$ och använd polynomet för att approximera värdet $f(1/2)$. (3 p)

(b) Avgör om felet i approximationen i uppgift (a) är mindre än $1/10$. (3 p)

DEL C

5. Bestäm alla värden på konstanten $b > 0$ för vilka det gäller att ekvationen $e^{2x} = bx$ har precis en lösning. (6 p)

6. Visa att (6 p)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2} \leq \frac{2 + 3 \ln 2}{4}.$$

DEL A

1. Bestäm primitiva funktioner till $f(x) = x^{2022} \ln x$ och $g(x) = \frac{(\ln x)^{2022}}{x}$. **(3+3 p)**
2. Låt $f(x) = \arctan(x^2)$.
- (a) Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 till f kring $x = 0$. **(3 p)**
- (b) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x^2)}{x^2 + x^3}$. **(3 p)**
-

DEL B

3. Vi betraktar funktionen $f(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$. **(6 p)**
- Lös olikheten $f(x) < 0$.
 - Bestäm de intervall där f är växande respektive avtagande och bestäm alla lokala extrempunkter.
 - Finn alla asymptoter till kurvan $y = f(x)$.
- Använd informationen ovan för att skissa kurvan $y = f(x)$.
4. (a) Avgör om serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{e^k}$ är konvergent eller divergent. **(3 p)**
- (b) Avgör om den generaliserade integralen $\int_0^1 \frac{dx}{x + \sqrt{x}}$ är konvergent eller divergent. **(3 p)**
-

DEL C

5. (a) Antag att funktionen f är deriverbar i punkten x_0 . Visa att funktionen f är kontinuerlig i punkten x_0 . **(3 p)**
- (b) Antag att funktionen f är deriverbar i punkten x_0 och att $f(x_0) \neq 0$. Visa att funktionen $1/f$ är deriverbar i punkten x_0 . **(3 p)**
6. Bestäm en tangent till kurvan $y = e^{2x} - 2e^{-x} + x$ som inte är parallell med någon annan tangent till kurvan. **(6 p)**

DEL A

1. Låt $f(x) = \tan x$ och $g(x) = \sin(\ln x)$.
- (a) Är linjen $y = x$ tangent till kurvan $y = f(x)$ i punkten $(0, f(0))$? **(3 p)**
- (b) Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 till g kring $x = 1$. **(3 p)**
2. Bestäm arean av det begränsade område som innesluts av kurvan $y = \frac{1}{1 + 4x^2}$ och linjen $y = 1/2$. Förenkla ditt svar så långt som möjligt. **(6 p)**
-

DEL B

3. Bestäm värdemängden till funktionen $f(x) = 2xe^{x-x^2}$. **(6 p)**
4. Vilka av följande olikheter är sanna? (Glöm inte att motivera ordentligt.)
- (a) $\int_0^1 \frac{dx}{1 + \arctan x} \leq 1$. **(2 p)**
- (b) $\int_1^\infty \frac{x}{2x^2 - \sin^2 x} dx \leq 1$. **(2 p)**
- (c) $\int_1^\infty \frac{x}{x^3 + \ln x} dx \leq 1$. **(2 p)**
-

DEL C

5. Finns det ett kortaste linjesegment sådant att ena ändpunkten är på x -axeln och den andra ändpunkten är på y -axeln och som går genom punkten $(9, \sqrt{3})$? Bestäm längden på ett sådant kortaste linjesegment om ett sådant finns, annars förklara varför det inte finns något. **(6 p)**
6. Visa att för varje heltal $n \geq 1$ gäller: **(6 p)**

$$2 \ln(2) - 1 \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right) \leq 2 \ln(2) - 1 + \frac{\ln 2}{n}.$$

DEL A

1. (a) Beräkna integralen $\int_0^{\pi/3} \sin^3(x) \cos(x) dx$. **(3 p)**
(b) Beräkna $F(4)$ där F är funktionen som är definierad för $x > 0$ och uppfyller villkoren $F'(x) = \ln(x)$ och $F(1) = 5$. **(3 p)**
2. Hitta en lösning $y(x)$ till differentialekvationen
- $$y'' - y' - 2y = 8x$$
- som uppfyller $y(0) = 1, y'(0) = 0$. **(6 p)**
-

DEL B

3. Avgör om ekvationen $x^4 - 2x^2 + x + 1 = 0$ har någon lösning i intervallet $[-1, 0]$. Om ekvationen har lösningar i intervallet, bestäm hur många. **(6 p)**
4. Avgör med hjälp av derivatans definition om funktionerna nedan är deriverbara i $x = 0$.
(a) $f(x) = |x|$ **(3 p)**
(b) $g(x) = |x|^3$ **(3 p)**
-

DEL C

5. Bestäm arean av området som innesluts av graferna $y = 4 \sin^2 x$ och $y = \frac{1}{\cos^2 x}$ samt linjerna $x = 0$ och $x = \frac{\pi}{4}$. **(6 p)**
6. Avgör om den generaliserade integralen
- $$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x} + x(\ln x)^6}$$
- är konvergent eller divergent. **(6 p)**

DEL A

1. Beräkna följande integraler

(a) $\int_1^2 x e^{x^2} dx$ (3 p)

(b) $\int_1^2 x e^{-x} dx$. (3 p)

2. Vi har funktionen $f(t) = 1/t$, där $t \neq 0$. Bestäm alla punkter på funktionsgrafen till $y = f(t)$ där tangentlinjen är parallell med linjen $4y + t = 0$. (6 p)

DEL B

3. Låt $f(x) = x - \sqrt{24x - 8x^2}$.

(a) Bestäm definitionsmängden till f . (1 p)

(b) Bestäm $f'(x)$. (1 p)

(c) Finn alla kritiska punkter till f . (2 p)

(d) Avgör om f har något största respektive minsta värde och bestäm dessa om de finns. (2 p)

4. Avgör om följande gränsvärden existerar och bestäm deras värden om de existerar.

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n + 1} - n)$ (3 p)

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{2}{\ln n}}$ (3 p)

DEL C

5. Beräkna integralen $\int_1^2 \frac{x+1}{x^4+x^2} dx$. (6 p)

6. (a) Antag att funktionen f är kontinuerlig på hela reella axeln och att $f(0) = f(2)$. Visa att det finns (minst) ett tal a i intervallet $[1, 2]$ sådant att $f(a) = f(a-1)$. (3 p)

(b) Antag att $a_1, a_2, \dots, a_n$ är reella tal sådana att $a_0 + a_1/2 + a_2/3 + \dots + a_n/(n+1) = 0$. Visa att ekvationen

$$a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = 0$$

har (minst) en rot i intervallet $(0, 1)$. (3 p)

DEL A

1. Beräkna följande integraler

(a) $\int_0^{\pi/3} \sin(x)e^{2\cos(x)} dx$ (3 p)

(b) $\int_0^1 \frac{5}{x^2 + x - 6} dx$ (3 p)

2. Låt $f(x) = \ln(\cos x)$.

(a) Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 till f kring $x = 0$ och använd det för att ge ett närmevärde till $f(1/10)$. (4 p)

(b) Bestäm gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{f(x)}$. (2 p)

DEL B

3. Låt

$$f(x) = 1 + \arccos(x) + 2\sqrt{1-x^2}.$$

(a) Bestäm funktionens definitionsmängd. (1 p)

(b) Bestäm de intervall där funktionen växer respektive avtar. (2 p)

(c) Bestäm eventuella kritiska punkter och deras typ. (1 p)

(d) Bestäm funktionens största och minsta värde. (1 p)

(e) Rita grafen till funktionen med hjälp av informationen ovan. (1 p)

4. Avgör om följande generaliserade integraler är konvergenta eller divergenta

(a) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^2} dx$ (2 p)

(b) $\int_0^\infty \frac{2 + \sin x}{1 + x} dx$ (2 p)

(c) $\int_0^\infty e^{-x+\sin x} dx$ (2 p)

DEL C

5. Låt $f(x) = x^3$. Visa att det för varje punkt $P = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ finns en tangent till grafen till $f(x)$ som går igenom P . (6 p)

6. Låt f vara en funktion som är kontinuerlig på hela reella axeln and låt a vara en reell konstant. För varje $h > 0$, låt

$$g_h(x) = \begin{cases} 1/h, & \text{om } 0 \leq x \leq h, \\ 0, & \text{om } x < 0 \text{ eller } x > h. \end{cases}$$

Bestäm $\lim_{h \rightarrow 0+} \int_{-1}^1 f(a-x)g_h(x)dx$. (6 p)

DEL A

1. (a) Bestäm lösningen $y(t)$ till differentialekvationen $y'(t) = -\frac{1}{10}(y(t) - 10)$ som uppfyller $y(0) = 2022$. **(4 p)**
(b) Beräkna $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$. **(2 p)**
 2. (a) Bestäm Taylorpolynomet av grad 3 kring $x = 0$ för $f(x) = \ln(1 + \sin(x))$. **(5 p)**
(b) Använd Taylorpolynomet från uppgift (a) för att approximera $f(\frac{1}{10})$. **(1 p)**
-

DEL B

3. Bestäm följande gränsvärden:
(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\ln(2n^2 + n) - \ln(n^2 - 1))$ **(3 p)**
(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \sin \frac{1}{n}}{3n + 1}$ **(3 p)**
 4. För vilket värde av $c > 0$ är arean av området inneslutet av kurvorna $y = c - 2x^2$ och $y = 2x^2 - c$ lika med $\frac{16}{3}$? **(6 p)**
-

DEL C

5. Gammafunktionen $\Gamma(x)$ är definierad av

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

- (a) Visa att $\Gamma(x)$ är väldefinierad för varje $x > 0$, dvs visa att den generaliserade integralen $\int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ är konvergent för varje $x > 0$. **(3 p)**
(b) Använd partiell integration för att visa att $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ för alla $x > 0$. **(3 p)**
6. Bestäm de värden på $x \geq 0$ som serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{(2n+1) \cdot 2^n}$ konvergerar för. **(6 p)**

DEL A

1. (a) Beräkna integralen $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos(2t) dt$. (3 p)
- (b) Beräkna den generaliserade integralen $\int_e^{\infty} \frac{1}{t(\ln t)^3} dt$. (3 p)
2. (a) Bestäm Taylorpolynomet av grad 4 till funktionen $f(x) = \cos(x^2)$ kring punkten $x = 0$. (3 p)
- (b) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x^2) - 1}{2x^4}$. (3 p)
-

DEL B

3. Avgör om följande serier konvergerar eller divergerar:
- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(1/n)$ (2 p)
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n) + 2}{2^n}$ (2 p)
- (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(1/n)}{n}$ (2 p)
4. Betrakta funktionen $F(x) = \int_0^x e^{-\sqrt{t}} \cos t dt$ med definitionsmängd $D = [0, \pi]$.
- (a) Ange de intervall där F är växande respektive avtagande. (3 p)
- (b) Avgör om F har något största och minsta värde. Bestäm i så fall i vilka punkter dessa värden antas. (3 p)
-

Var god vänd!

DEL C

5. Bestäm alla positiva tal λ för vilka det finns en lösning $y(t)$ till problemet

$$\begin{cases} y''(t) + \lambda^2 y(t) = 0 \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$$

som inte är identisk lika med noll.

(6 p)

6. Låt f vara funktionen

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{om } x < 0, \\ 0, & \text{om } x = 0, \\ 1, & \text{om } x > 0. \end{cases}$$

- (a) Bestäm var funktionen $g(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$, definierad för $x \in (-1, 1)$ är deriverbar och bestäm dess derivata där den existerar. **(3 p)**

- (b) Bestäm var funktionen $h(x) = \int_{-1}^{x^3} f(t) dt$, definierad för $x \in (-1, 1)$ är deriverbar och bestäm dess derivata där den existerar. **(3 p)**

DEL A

1. (a) Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 till funktionen $\arctan(x^2)$ kring punkten $x = 0$. (3 p)
 (b) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x^2)}{2x^2 + x^3}$. (3 p)
2. En benbit innehåller 80 procent av den ursprungliga mängden kol-14. Hur gammal är den? Antag att sönderfallstakten är proportionell mot mängden av ämnet och att halveringstiden är 5700 år. (6 p)

DEL B

3. Bestäm antalet lösningar till ekvationen $\arccos x - e^x + x = 0$. (6 p)
4. (a) Beräkna integralen $\int_1^e (\ln x)^2 dx$. (3 p)
 (b) Avgör om den generaliserade integralen $\int_0^1 e^{\frac{1}{x}} dx$ är konvergent eller divergent. (3 p)

DEL C

5. (a) Låt f vara en funktion definierad för alla reella tal. Definiera vad som menas med att f är deriverbar i punkten $x = a$ och definiera $f'(a)$. (2 p)
 (b) Låt

$$g(x) = \frac{f(\ln(1 + x/2))}{2x}$$
 där f är en kontinuerlig funktion som är deriverbar i punkten $x = 0$ och sådan att $f(0) = 0$ och $f'(0) = 6$. Bestäm $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$. (4 p)
OBS: Det går inte att använda L'Hopitals regel direkt på denna uppgift.
6. (a) Avgör om serien $\sum_{n=30}^{\infty} \frac{1}{n \ln(\ln(n))}$ är konvergent eller divergent. (3 p)
 (b) Avgör för vilka x som serien $\sum_{n=30}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n \ln(\ln(n))}$ konvergerar. (3 p)

DEL A

1. Beräkna följande gränsvärden:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x}$ (3 p)

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} - 7 + x \cos x + 5e^x}{x^3 - e^x + 1 + x^2}$ (3 p)

2. (a) Beräkna integralen $\int_1^e \frac{1}{x\sqrt{1 + \ln(x)}} dx$. (3 p)

(b) Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = x^2 e^x$. (3 p)

DEL B

3. Ekvationen $x^4 + y^8 + 3xy = 1$ definierar en sluten kurva i planet.

(a) Bestäm kurvans skärningspunkter med x -axeln. (2 p)

(b) Välj en av dessa punkter och bestäm en ekvation för tangentlinjen till kurvan i den punkten. (4 p)

4. (a) Avgör om serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k) + 1}{1 + k^2}$ är konvergent eller divergent. (3 p)

(b) Avgör om den generaliserade integralen $\int_0^1 \frac{1}{\sin x} dx$ är konvergent eller divergent. (3 p)

DEL C

5. (a) Antag att funktionen $f(x)$ är definierad och deriverbar för alla x och att $f'(x) > 0$ för alla $x \geq 0$. Avgör om detta medför att $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$. (2 p)

(b) Antag att funktionen $g(x)$ är definierad och deriverbar för alla x och att $g'(x) \geq 1$ för alla $x \geq 0$. Visa att funktionen $h(x) = g(x) - x$ uppfyller $h(x) \geq g(0)$ för alla $x \geq 0$. (2 p)

(c) Avgör om $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ där g är funktionen i (b), t ex genom att använda slutsatsen i (b). (2 p)

Motivera dina svar med bevis eller motexempel.

6. Beräkna ett närmevärde till $\int_0^1 e^{-t^2} dt$ med ett fel som är mindre än $1/20$. (6 p)

DEL A

1. Beräkna följande gränsvärden:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\tan(4x)}$ **(3 p)**

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(3x) + e^{-x}}{\ln(4x)}$ **(3 p)**

2. (a) Beräkna $\int_1^2 x^3 \ln(x) dx$. **(3 p)**

(b) Bestäm $\int \cos^3 x \sin x dx$. **(3 p)**

DEL B

3. Låt $f(x) = x^3$.

(a) Beräkna volymen av kroppen som erhålls när området som begränsas av $x = 0$, $y = 8$ och $y = f(x)$ roteras kring y -axeln. **(3 p)**

(b) Beräkna volymen av kroppen som erhålls när området som begränsas av $x = 0$, $y = 8$ och $y = f(x)$ roteras kring x -axeln. **(3 p)**

4. Låt $f(x) = x^7 + 2x + 1$.

(a) Visa att $f(x)$ är inverterbar. **(3 p)**

(b) Beräkna $\int_1^4 f^{-1}(x) dx$. **(3 p)**

DEL C

5. Bestäm antalet lösningar x till ekvationen

$$\int_2^x e^{t^2} dt = e^x,$$

som uppfyller $x \geq 2$. **(6 p)**

6. Antag att f är en två gånger kontinuerligt deriverbar funktion på $[0, 1]$ sådan att linjesegmentet mellan $(0, f(0))$ och $(1, f(1))$ skär funktionsgrafen $y = f(x)$ vid (minst) en punkt (i tillägg till ändpunkterna $(0, f(0))$ och $(1, f(1))$). Visa att det finns en punkt $x \in [0, 1]$ sådan att $f''(x) = 0$. **(6 p)**

DEL 1

1. Beräkna följande integraler.

$$(a) \int x\sqrt{x^2+1} \, dx \qquad (b) \int_1^2 x \ln(x) \, dx \qquad (3+3 \text{ p})$$

2. Avgör om följande serier konvergerar eller divergerar.

$$(a) \sum_{n=2}^{\infty} \arctan(n) \qquad (b) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^n + 1} \qquad (3+3 \text{ p})$$

3. Låt funktionen f vara given av $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x+2)$.

(a) Bestäm definitionsmängden till f . (2 p)

(b) Hur många lösningar har ekvationen $f(x) = -10$? (4 p)

DEL 2

4. Avgör om det finns en lösning $y(t)$ till differentialekvationen

$$y'' - 2y' + 5y = 4 \sin t - 2 \cos t$$

som uppfyller $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{y(t)}{t} = 7$. Bestäm en sådan lösning om en sådan lösning finns, annars förklara varför det inte finns någon. (6 p)

5. Betrakta kurvan som ges av $y = \sqrt{x}$ för $1 \leq x \leq R$ där R är ett positivt tal och låt $b(R)$ vara båglängden av kurvan.

(a) Ange en integral som ger $b(R)$. Integralen behöver ej beräknas. (2 p)

(b) Bestäm gränsvärdet $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{b(R)}{R}$. (4 p)

6. (a) Avgör om funktionen

$$f(x) = \int_1^x \frac{1}{s} |\cos(s)| \, ds$$

är begränsad på intervallet $[1, \infty)$. Tips: Det kan vara användbart att jämföra $\cos(s)$ med $1/\sqrt{2}$ på intervallen $[n2\pi - \frac{\pi}{4}, n2\pi]$, för $n = 1, 2, \dots$ (3 p)

(b) Avgör om funktionen

$$g(x) = \int_1^x \frac{1}{s} \cos(s) \, ds$$

är begränsad på intervallet $[1, \infty)$. (3 p)

DEL 1

1. Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$ på två olika sätt:

- (a) Med hjälp av l'Hopitals regel **(3 p)**
 (b) Med hjälp av Taylorutveckling **(3 p)**

2. Finn alla primitiva funktioner till

(a) $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x - 2}$ (b) $g(x) = \frac{6x - 7}{x^2 + x - 6}$ **(3+3 p)**

3. Låt funktionen f vara given av

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\pi}, & x \in (-\pi, \pi], \\ -\cos(x), & x \in (\pi, 2\pi). \end{cases}$$

- (a) Använd definitionen av kontinuitet för att avgöra om f är kontinuerlig i π . **(3 p)**
 (b) Använd definitionen av derivata för att avgöra om f är deriverbar i π . **(3 p)**

DEL 2

4. Hur många lösningar har ekvationen $(x^2 - 1)e^{-x} = 10$? **(6 p)**

5. (a) Bestäm för vilka x potensserien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(9x^2)^k}{\sqrt{k}}$$

konvergerar och för vilka x den divergerar. **(3 p)**

(b) Avgör om serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_1^n \ln t \, dt}{n^2}$$

är konvergent eller divergent. **(3 p)**

6. (a) Antag att funktionen f är definierad på intervallet (a, b) och att c i (a, b) är en lokal extrempunkt till f . Antag också att $f'(c)$ existerar. Bestäm $f'(c)$ med hjälp av derivatans definition. **(2 p)**

(b) Antag att funktionen f är kontinuerlig på intervallet $[a, b]$ och deriverbar på intervallet (a, b) . Antag också att $f(a) = f(b)$. Visa att det finns en punkt c i (a, b) sådan att $f'(c) = 0$. **(2 p)**

(c) Formulera och bevisa medelvärdessatsen. **(2 p)**

DEL 1

1. Bestäm gränsvärdena.

(a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\arctan(x) + e^x}{x^2 e^x + 1}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(\pi x)}{x^2 - 2x + 1}$ **(3+3 p)**

2. Låt $f(x) = \ln(x) - \frac{x}{4}$. Bestäm ett närmevärde till $f(1.1)$ med hjälp av linjär approximation. Avgör också om närmevärdet är större eller mindre än det exakta värdet. **(6 p)**

3. Ett föremål som tas ut ur en brännugn har en temperatur på 200°C . När föremålet placeras i ett rum med temperaturen 20°C svalnar det enligt Newtons avsvlningslag, dvs den momentana temperturförändringen hos föremålet är proportionell mot skillnaden mellan föremålets och rummets temperatur.

- Formulera en differentialekvation som beskriver hur föremålet svalnar och lös den.
- Föremålet kan ytbehandlas när temperaturen har sjunkit till 40°C . En kontrollmätning visar att temperaturen är 80°C efter en timme. När kan föremålet ytbehandlas?

(6 p)

DEL 2

4. (a) Beräkna en undersumma till integralen

$$\int_0^1 \frac{4}{(x+1)(x^2+1)} dx$$

genom att dela upp integrationsintervallet i två lika stora delintervall.

(b) Beräkna integralen i (a) exakt. **(3+3 p)**

5. Undersök ekvationen

$$x^5 + \frac{10}{2 + \cos^2(x)} = 119.$$

(a) Bestäm antalet lösningar till ekvationen i intervallet $[-1, 1]$.

(b) Bestäm antalet lösningar till ekvationen i hela $\mathbb{R}$.

(2+4 p)

6. Antag att f är definierad på $[-1, 1]$, att $f(x) \geq 0$, att andraderivatan till f är kontinuerlig och att $f(0) = f'(0) = 0$. Avgör om integralen

$$\int_1^\infty f(1/x) dx$$

är konvergent.

(6 p)

DEL 1

1. Bestäm följande gränsvärden.

$$(a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 4}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \cos(3x)}{2x + \sin(x)} \quad (3+3 \text{ p})$$

2. Bestäm följande integraler.

$$(a) \int_1^e x^2 \ln(x) dx$$

$$(b) \int \frac{e^t}{1 + e^{2t}} dt \quad (3+3 \text{ p})$$

3. Låt den styckvis definierade funktionen f vara given av

$$f(x) = \begin{cases} x + 3, & \text{om } x \leq 0, \\ (x - 1)e^{-x}, & \text{om } x > 0. \end{cases}$$

(a) Bestäm för vilka x som f är kontinuerlig. (2 p)

(b) Bestäm f' och eventuella kritiska punkter till f . (2 p)

(c) Avgör om f antar något största respektive minsta värde och bestäm dessa om de finns. (2 p)

DEL 2

4. Avgör om den generaliserade integralen respektive serien är konvergent eller divergent.

$$(a) \int_1^\infty \frac{1}{xe^x} dx$$

$$(b) \sum_{n=1}^\infty \frac{\sin(1/n)}{\sqrt{n}} \quad (3+3 \text{ p})$$

5. En kon bildas genom att området i planet som begränsas av y -axeln, linjen $y = x$ och linjen $y = 1$ roteras kring y -axeln. Konens densitet varierar med höjden y enligt funktionen $\rho(y) = 2 - y$. Alla längder är i dm och densiteten anges i kg/dm³. Beräkna konens massa. (6 p)

6. Låt funktionen F vara definierad av

$$F(x) = \int_0^{2x} \frac{1}{(1+t^2)^2} dt.$$

(a) Bestäm ett polynom P sådant att $F(x) = P(x) + \mathcal{O}(x^3)$, då $x \rightarrow 0$. (2 p)

(b) Visa att funktionen F är inverterbar och bestäm $(F^{-1})'(0)$. (2 p)

(c) Visa att F har en horisontell asymptot när $x \rightarrow \infty$. (2 p)