

SF1625, seminarium 1

Tentamen 2019-06-07, uppgift 4

Vi har funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos(1/x) & \text{när } x \neq 0, \\ 2 & \text{när } x = 0. \end{cases}$$

- (a) Vad menas med att en funktion är kontinuerlig i en given punkt?
- (b) Visa att $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \cos(1/x)) = 0$.
- (c) Existerar det en kontinuerlig funktion F definierad på hela tallinjen, som sammanfaller med f när $x \neq 0$?

Tentamen 2019-06-07, uppgift 7

En funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kallas likformigt kontinuerlig om det till varje $\epsilon > 0$ finns $\delta > 0$ sådant att för alla x och y gäller att

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Visa att funktionen $f(x) = x^2$ inte är likformigt kontinuerlig.

Tentamen 2019-10-22, uppgift 6(a)

Antag att funktionen $f(x)$ är kontinuerlig på intervallet $[0, 1]$ och att $0 \leq f(0) \leq 1$ och $0 \leq f(1) \leq 1$. Visa att det finns (minst) en punkt p i intervallet $[0, 1]$ sådan att $f(p) = p$.

Tentamen 2020-01-07, uppgift 6(a)

Antag att funktionen $f(x)$ är definierad på hela reella linjen och att $(f(x))^2 \leq x^4 + x^6$ för alla x . Avgör om f måste vara kontinuerlig i punkten $x = 0$.

Tentamen 2021-01-07, uppgift 5(a)

Låt funktionen f vara definierad för alla reella tal x genom

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{om } x \neq 0, \\ 0, & \text{om } x = 0. \end{cases}$$

I vilka punkter är f kontinuerlig?

SF1625, seminarium 2

Tentamen 2016-10-25, uppgift 7

- (a) Definiera vad det betyder för en funktion f att vara kontinuerlig i a .
- (b) Definiera vad det betyder för en funktion f att vara deriverbar i a .
- (c) Bestäm talen a och b så att funktionen f som ges av

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1, \\ ax + b, & x > 1 \end{cases}$$

blir både kontinuerlig och deriverbar i punkten $x = 1$.

Tentamen 2017-03-17, uppgift 7

Vi betraktar funktionen f som ges av

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

- (a) Visa att f är deriverbar i origo, och bestäm $f'(0)$.
- (b) Är f 's derivata kontinuerlig i origo?

Tentamen 2016-06-10, uppgift 6

Betrakta kurvan som ges av ekvationen $2x^2 + 4xy + 3y^2 + 2y = 10$.

- (a) Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan i punkten $(x_0, y_0) = (-1, 2)$.
- (b) Bestäm med hjälp av tangenten ett närmevärde för y -koordinaten till en punkt på kurvan vars x -koordinat är -0.8 .
- (c) Kan det finnas mer än en punkt på kurvan som har x -koordinat -0.8 ?

Tentamen 2017-10-24, uppgift 2

- (a) Ge ett exempel på en funktion definierad på ett slutet och begränsat intervall som inte antar ett största värde.

- (b) Visa att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x - \frac{1}{2})e^x}{x - \frac{1}{2}} & \text{om } x \neq \frac{1}{2}, \\ \sqrt{e} & \text{om } x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

är kontinuerlig i punkten $x = \frac{1}{2}$.

- (c) Avgör om funktionen $f(x)$ antar ett största och ett minsta värde på det slutna intervallet $[0, 1]$.

Tentamen 2018-03-12, uppgift 4

Visa att ekvationen $x^7 + 3x^5 - \frac{3}{2x} + 2 = 0$ har en unik lösning i det öppna intervallet $(0, 1)$.

Tentamen 2019-01-07, uppgift 6

Vi har funktionen

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \cos(1/x) & \text{när } x \neq 0, \\ 0 & \text{när } x = 0. \end{cases}$$

Visa att $F''(0)$ inte existerar.

Tentamen 2020-10-15, uppgift 6

- (a) Antag att $f(0) = 0$ och att $|f(x)| > \sqrt{|x|}$ för alla $x \neq 0$. Visa att funktionen f inte kan vara deriverbar i punkten $x = 0$.
- (b) Antag att funktionen g är definierad på hela reella axeln och uppfyller följande villkor: $g'(0) = k$, $g(0) \neq 0$ och $g(x+y) = g(x)g(y)$ för alla x och y . Visa att $g(0) = 1$ och att $g'(x) = kg(x)$ för alla x .

SF1625, seminarium 3

Uppgift A (tentamen 2017-01-09, uppgift 8)

Funktionen f ges av

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} + \frac{4}{5} \arctan x.$$

Bestäm det största öppna intervallet som innehåller punkten $x = 1$, där f är inverterbar.

Uppgift B (tentamen 2016-03-22, uppgift 6)

Ett föremål med massan m faller genom jordatmosfären mot jordens yta. Om vi antar att luftmotståndet är direkt proportionellt mot farten v fås enligt Newtons andra lag differentialekvationen

$$mv'(t) = -kv(t) + mg$$

där k är en positiv konstant och g tyngdaccelerationen.

- (a) Bestäm farten v vid en godtycklig tidpunkt t , om föremålet släpps från vila vid tidpunkten $t = 0$.
- (b) Visa att farten enligt modellen inte kan öka obegränsat utan kommer att närma sig ett visst värde efter lång tid. Bestäm detta värde.

Uppgift C (tentamen 2017-01-09, uppgift 4)

Positionen $y(t)$ av en viss partikel i ett kraftfält vid tiden t uppfyller differentialekvationen

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0.$$

- (a) Om man vet att $y(t) = 3e^{-3t} + 6e^{2t}$, vilka värden har då a och b ?
- (b) Lös differentialekvationen när $a = -5$ och $b = 6$ med initialvillkoren $y(0) = 1$ och $y'(0) = 4$.

Uppgift D (tentamen 2017-03-17, uppgift 4)

Newtons avsvälningslag säger att ett varmt objekt svalnar i en takt som är proportionell mot temperaturskillnaden mot omgivningen. Låt $y(t)$ vara temperaturen i ett vattenkär, vid tiden t minuter. När vattnet kokar ställs kärlet utomhus i -20° . Temperaturen $y(t)$ uppfyller differentialekvationen på formen $y'(t) = k(y(t) + 20)$. Vi vet också att temperaturen är 40° efter 10 minuter.

- (a) Lös differentialekvationen (ledning: Substituera $u(t) = y(t) + 20$).
- (b) När är temperaturen 25° ?

Uppgift E (extra utmanande¹ uppgift om Lipschitzkontinuitet och regularitet, global entydighet och existens av lösningar till autonoma differentialekvationer)

Låt $I \subseteq \mathbb{R}$ vara² ett intervall. En funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ sägs vara *glatt* om den i varje punkt kan deriveras hur många gånger som helst. Vi säger att f är *Lipschitzkontinuerlig* om det finns en konstant K sådan att $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$ för alla $x, y \in I$.

- (a) Är alla glatta funktioner $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitzkontinuerliga? Är alla Lipschitzkontinuerliga funktioner $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ glatta? Blir svaren annorlunda om vi antar att I är ett slutet och begränsat intervall? Bevisa eller ge motexempel för varje påstående.
- (b) *Regularitet*: Antag att $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är glatt, och antag att $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ är en funktion definierad på ett öppet intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, som uppfyller $y(x_0) = y_0$, för något $x_0 \in I$ och något $y_0 \in \mathbb{R}$, och $y'(x) = f(y(x))$ för alla $x \in I$. Visa att y är glatt.

Följande sats kan vara användbar för att lösa de återstående uppgifterna:

Sats 1. Antag att $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, och att $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är en Lipschitzkontinuerlig funktion. Då finns ett $\epsilon > 0$ och en funktion $y : (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ som uppfyller $y(x_0) = y_0$ och $y'(x) = f(y(x))$ för alla $x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$, och som är den unika funktionen som uppfyller dessa villkor. Med andra ord, om $\tilde{y} : (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ är en annan funktion som uppfyller $\tilde{y}(x_0) = y_0$ och $\tilde{y}'(x) = f(\tilde{y}(x))$ för alla $x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$, så är $y = \tilde{y}$.

Satsen är ett specialfall av *Picard–Lindelöfs sats*, och ni får använda satsen utan³ bevis.

- (c) *Global entydighet*: Antag att f och y uppfyller villkoren i deluppgift (b), men antag också att f är Lipschitzkontinuerlig. Visa att y är den *unika* funktionen på intervallet I som uppfyller dessa villkor. Med andra ord, visa att om $\tilde{y} : I \rightarrow \mathbb{R}$ är en annan funktion som uppfyller $\tilde{y}(x_0) = y_0$ och $\tilde{y}'(x) = f(\tilde{y}(x))$ för alla $x \in I$, så är $y = \tilde{y}$.
- (d) *Global existens*: Antag att $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är glatt, Lipschitzkontinuerlig och begränsad, och att $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. Visa att det existerar en funktion $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definierad på hela $\mathbb{R}$, sådan att $y(x_0) = y_0$ och $y'(x) = f(y(x))$ för alla $x \in \mathbb{R}$.
- (e) Visa att resultatet från deluppgift (d) gäller även utan antagandet om att f är Lipschitzkontinuerlig.
- (f) Visa att resultatet från deluppgift (d) gäller även utan antagandet om att f är begränsad (men fortfarande med antagandet om att f är Lipschitzkontinuerlig).
- (g) Visa att resultatet från deluppgift (d) inte gäller om båda dessa antaganden tas bort. Med andra ord, ge ett exempel på en glatt funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (som enligt deluppgift (e) och (f) varken kan vara Lipschitzkontinuerlig eller begränsad), tillsammans med konstanter $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, sådana att det inte existerar någon funktion $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ som uppfyller $y(x_0) = y_0$ och $y'(x) = f(y(x))$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

¹Den här uppgiften är egentligen bara avsedd för några studenter som tyckte att seminarieuppgifterna var väldigt lätta. Uppgiften är betydligt svårare än uppgifter som skulle kunna komma på tentor i alla de matematikkurser som ingår i ert program. Den går däremot att lösa med enbart teorin ni hittills har lärt er i SF1625.

²Notera att I även kan vara hela $\mathbb{R}$, eller vara obegränsat i en riktning.

³Beviset kräver verktyg ni inte kommer lära er i denna kurs, såsom teori för metriska rum, speciellt *Banachs fixpunktsats* (för bakgrund till detta, se exempelvis boken *Principles of Mathematical Analysis* av Walter Rudin, som används i kursen *SF1677 Analysens grunder*). Det kräver även viss teori om integraler, som ni inte har gått igenom i kursen ännu.