

**Demotentamen SF1671 Baskurs med Diskret matematik,
2015-10-15**

Skrivtid: 5 timmar

Tillåtna hjälpmedel: Inga

Examinator: Svante Linusson

Maximal poäng på tentamen är 36 poäng. Tentan är indelad i tre delar I, II och III om max 12 poäng vardera. Eventuella bonuspoäng läggs till poängen på del I, det kan dock aldrig överstiga 12 poäng. Bonuspoängen framgår av er resultatsida och läggs till automatiskt.

Betygsgränserna vid denna tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del III	6	3	-	-	-	-

För full päng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som alvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I

1. På denna uppgift skall svaren vara heltal.

a) (2p) Beräkna inversen till 17 i $\mathbb{Z}_{39}$.

b) (1p) Beräkna $\binom{7}{3, 1, 3}$.

c) (1p) Beräkna $S(6, 2)$.

2. (4p) Lös ekvationen $\cos(2x) = 3 \cos x - 2$.

3. Låt $\mathcal{R}$ vara relationen på $\mathbb{Z}$ där $a \mathcal{R} b$ om $a - b$ är ett ickenegativt jämnt tal.

a) (3p) Visa att $\mathcal{R}$ är en partialordning på $\mathbb{Z}$.

b) (1p) Rita Hassediagrammet för relationen $\mathcal{R}$ begränsat till mängden $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

DEL II

4. (4p) På hur många sätt kan man fördela 16 kanelbullar (identiska) och 16 chokladmuffins (identiska) till 5 flickor (särskiljbara) och 5 pojkar (särskiljbara) om varje flicka måste få minst en kanelbulle och varje pojke minst en muffin? (Svaret skall skrivas som potenser, faktieller, produkter, summor, skillnader och/eller kvoter mellan hela tal.)

5. (4p) Talföljden $\{a_n\}_{n \geq 0}$ definieras genom rekursionen

$$a_{n+1} = 4a_n + 5a_{n-1},$$

där $a_0 = 1$ och $a_1 = 17$.

Visa att $a_n = 3 \cdot 5^n - 2 \cdot (-1)^n$ för alla $n \geq 0$.

6. (4p) Summan av de två första termerna i en geometrisk talföljd är 10, och summan av de tre första termerna är 19. Bestäm talföljden (eller talföljderna om det kan finnas flera).

DEL III

7. (4p) Lös ekvationen $(\sin(\arctan x))^{-2} - (\tan(\arcsin x))^{-2} = 4x$.

8. (4p) De sju syskonen kanin skall dela på ett antal morötter.

Då rotsakerna fördelats på sju lika högar är 3 stycken över. Dem äter storasyster kanin upp och somnar sedan.

Sex vakna kaniner delar rötterna från de sju högarna i sex lika högar. Storebror äter upp de 3 som nu blev över – och somnar.

Fem vakna kaniner delar de sex högarna i fem lika högar, det blir 2 över.

Hur många var det från början, om det var färre än 300 stycken?

9. (4p) Avgör om funktionen $f(x) = e^{2\sqrt{x+1}} + e^{\sqrt{x+1}} - 1$ definierad på $x \geq -1$ är inverterbar (det vill säga att det finns en invers definierad på värdemängden för f). Om så är fallet, bestäm dess invers.

**Tentamen SF1671 Baskurs med Diskret matematik,
2015-10-23**

Skrivtid: 14:00-19:00

Tillåtna hjälpmedel: Inga

Examinator: Svante Linusson

Maximal poäng på tentamen är 36 poäng. Tentan är indelad i tre delar I, II och III om max 12 poäng vardera. Eventuella bonuspoäng läggs till poängen på del I, det kan dock aldrig överstiga 12 poäng. Bonuspoängen framgår av er resultatsida och läggs till automatiskt.

Betygsgränserna vid denna tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del III	6	3	-	-	-	-

För full päng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som alvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I

- (2p) Beräkna principalresten då 7^{2015} divideras med 5.
 - (2p) Skriv 2015 i bas 3. (Talet 2015 antas här vara skrivet i bas tio.)
 - (4p) Lös ekvationen $\ln \frac{x}{2} + \ln(x-3) = \ln(x-2)$.
 - (2p) Är $(A \cup B) \cap C^c = (B \cap (A \cup C)) \setminus (B \cap C)$ sann för alla mängder A, B, C ?
 - (1p) Vad betyder det att en relation $\mathcal{R}$ på en mängd A är antisymmetrisk?
 - (1p) Vad betyder det att en funktion $f : X \rightarrow Y$ är surjektiv?
-

DEL II

4. (4p) Talföljden $\{a_n\}_{n \geq 0}$ definieras genom rekursionen

$$a_{n+1} = a_n + 6a_{n-1},$$

där $a_0 = 3$ och $a_1 = 4$.

Visa att $a_n = 2 \cdot 3^n + (-2)^n$ för alla $n \geq 0$.

5. (4p) En klass med 5 pojkar och 5 flickor skall utse en kommitté (storleken på kommittén är inte bestämd) och gör det med likformig sannolikhet över alla möjliga val. (Det är samma som att singla slant för varje person separat om hen skall ingå i kommittén eller inte.) Vad är sannolikheten att kommittén får minst 3 pojkar och högst 1 flicka.

6. Låt $m(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x + 12$ och $n(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 9$.

- a) (2p) Bestäm $\text{sgd}(m(x), n(x))$, största gemensamma delaren till $m(x)$ och $n(x)$.
- b) (2p) Bestäm för vilka värden på x som $m(x) < n(x)$.

DEL III

7. (4p) Skriv $\cos(2 \arcsin x)$ som ett polynom i x . För vilka x gäller ditt uttryck?

8. (4p) Professor Kalkyl skall göra en lappskrivning med 5 uppgifter. Uppgift nummer i skall ge $p_i \in \mathbb{Z}$ poäng. Summan av poängen skall vara 14 och varje uppgift skall ge minst 1 poäng och högst 4 poäng. På hur många sätt kan hon fördela poängen på uppgifterna?

9. (4p) Använd binomialsatsen för att visa att, för $n \geq 0$, gäller

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (2+x)^k = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k.$$

**Tentamen SF1671 Baskurs med Diskret matematik,
2016-01-07**

Skrivtid: 14:00-19:00

Tillåtna hjälpmedel: Inga

Examinator: Svante Linusson

Maximal poäng på tentamen är 36 poäng. Tentan är indelad i tre delar I, II och III om max 12 poäng vardera. Eventuella bonuspoäng läggs till poängen på del I, det kan dock aldrig överstiga 12 poäng. Bonuspoängen framgår av er resultatsida och läggs till automatiskt.

Betygsgränserna vid denna tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del III	6	3	-	-	-	-

För full päng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I

1. (4p) Finn alla $x \in \mathbb{Z}$ sådana att $77x \equiv 3 \pmod{258}$.

2. (4p) Låt $p(x) = 2x^3 + 5x^2 - 28x - 15$. Minst ett av talen $-3, -2, -1, 1, 2, 3$ är en rot till $p(x)$. För vilka värden på x gäller $p(x) > 0$?

3. (4p) Följande 4 påståenden är antingen sanna eller falska. Svara SANT eller FALSKT eller inte alls på varje deluppgift. Rätt svar på en deluppgift ger 1 poäng, fel svar -1 poäng och inget svar 0 poäng. Du behöver inte motivera dina svar på denna uppgift. Du kan inte få mindre än 0 poäng totalt på uppgiften.

a) För alla $k, n \geq 1$ gäller $n^{\ln k} = k^{\ln n}$.

b) Om $f(x) = 3x^2 + 1$ är definierad på $\mathbb{R}_+$ så tillhör 2 definitionsmängden för f^{-1} .

c) För alla $-1/2 \leq x \leq 1/2$ gäller $\arcsin(\sin(x)) = x$.

d) Antalet sätt att lägga 7 olika bollar i 4 identiska lådor är $S(7, 4)$.

DEL II

4. (4p) Antag att $\cos \alpha = -3/4$ och $-\pi < \alpha \leq 0$. Beräkna exakt värde av $\cot \alpha + \sin \alpha$.

Glöm inte att förenkla så långt som möjligt.

5. (4p) 42 (identiska) kakor skall fördelas bland 9 (särskiljbara) barn. På hur många sätt kan det ske om minst ett barn skall få ett udda antal kakor?

Svaret får innehålla heltal, faktorer, potenser och de fyra räknesätten.

6. (4p) Bestäm x så att

$$\left(\frac{3}{2} + \sum_{i=1}^x 3^i\right)^2 = \frac{15^{15} \cdot (1+5)^4 \cdot 4^2 \cdot 3^3}{10^{10} \cdot 5^5}.$$

DEL III

7. (4p) Bestäm höstgradstermen i $(x^4 - 4x)^9 - (x^3 - 3)^{12}$.

8. (4p) På en kurs gör de 5 studenterna dels en lappskrivning och dels en inlämningsuppgift som skall rättas. Läraren delar helt slumpmässigt (likformigt) ut både lappskrivningarna och inlämningsuppgifterna till eleverna för rättning, så att varje student får en lappskrivning och en inlämningsuppgift att rätta. Vad är sannolikheten att ingen student rättar något av sina egna alster (dvs varken lappskrivning eller inlämningsuppgift)?

9. (4p) Låt funktionen $f(n) : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Z}$ vara definierad på de positiva heltalen genom rekursionen

$$f(n) = 4f(n-1) - 2f(n-2), n \geq 3,$$

och startvärden $f(1) = 1, f(2) = 2$. Visa att f är injektiv.

**Tentamen SF1671 Baskurs med Diskret matematik,
2016-10-21**

Skrivtid: 14:00-19:00

Tillåtna hjälpmedel: Inga

Examinator: Svante Linusson

Maximal poäng på tentamen är 36 poäng. Tentan är indelad i tre delar I, II och III om max 12 poäng vardera. Eventuella bonuspoäng läggs till poängen på del I, det kan dock aldrig överstiga 12 poäng. Bonuspoängen framgår av er resultatsida och läggs till automatiskt.

Betygsgränserna vid denna tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del III	6	3	-	-	-	-

För full päng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som alvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I

1. (4p) Bestäm alla heltal x, y sådana att $69x + 51y = 12$.
 2. (4p) Lös okliheten $|x - 4| \leq 4 \cdot |x + 5|$.
 3. På denna uppgift krävs bara svar (ingen motivering).
 - a) (1p) Vad är $\log_2(6) + \log_2(\frac{1}{3})$?
 - b) (1p) Skriv upp rekursionen för Stirlingtal av andra slaget $S(m, n)$.
 - c) (1p) Vad betyder det att en relation $\mathcal{R}$ på en mängd A är transitiv?
 - d) (1p) Vad betyder det att en funktion $f : X \rightarrow Y$ är injektiv?
-

DEL II

4. (4p) Talföljden $\{a_n\}_{n \geq 0}$ definieras genom rekursionen

$$a_{n+1} = 7a_n - 10a_{n-1},$$

där $a_0 = 4$ och $a_1 = 17$.

Visa att $a_n = 3 \cdot 5^n + 2^n$ för alla $n \geq 0$.

5. (4p) För vilka reella tal c gäller att ekvationen $x^2 + c \cdot x - 2c^2 = 0$ har $x = 1$ som en rot? Räkna ut den andra roten för varje möjligt värde på c .

6. (4p) Hur många 5-bokstavsord kan man skriva med bokstäverna A A A B C C C C?
-

DEL III

7. (4p) Ge ett exakt förenklat uttryck (utan trigonometriska funktioner) för

$$\cos \left(2 \arctan \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

8. (4p) Låt a_n vara antalet ord av längd n som kan skrivas från alfabetet $\{A, B, C\}$ där upprepning är tillåten, men bokstaven B får aldrig komma direkt till höger om bokstaven A. Exempelvis är $a_1 = 3$ och $a_2 = 8$. Bestäm tal $r, s \in \mathbb{Z}$ så att, för $n \geq 2$,

$$a_{n+1} = r \cdot a_n + s \cdot a_{n-1}.$$

9. (4p) Visa att för varje irrationellt tal $x \in \mathbb{R}$ och varje positivt heltal n , så finns det ett rationellt tal $\frac{p}{q}$, med $1 \leq q \leq n$ sådant att $\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{nq}$. (Tips: använd postfacksprincipen)

**Tentamen SF1671 Baskurs med Diskret matematik,
2016-12-20**

Skrivtid: 08:00-13:00

Tillåtna hjälpmedel: Inga

Examinator: Svante Linusson

Maximal poäng på tentamen är 36 poäng. Tentan är indelad i tre delar I, II och III om max 12 poäng vardera. Eventuella bonuspoäng läggs till poängen på del I, det kan dock aldrig överstiga 12 poäng. Bonuspoängen framgår av er resultatsida och läggs till automatiskt.

Betygsgränserna vid denna tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del III	6	3	-	-	-	-

För full päng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I

1. På dessa uppgifter skall svaret vara ett heltal.

a) (2p) Beräkna inversen till 19 i $\mathbb{Z}_{43}$.

b) (1p) Beräkna $\binom{8}{3,2,3}$.

c) (1p) Hur många ord av längd 3 kan man skriva med bokstäverna A B C D E F G?
(Varje bokstav får bara användas en gång.)

2. (4p) För vilka $x \in \mathbb{R}$ gäller olikheten

$$\ln(x-2) + \ln(x+3) \leq \ln x \quad ?$$

3. På denna uppgift krävs bara svar (ingen motivering).

a) (1p) Vad menas med att $p \in \mathbb{Z}$ är ett primtal?

b) (1p) Formulera binomialsatsen.

c) (1p) Vad betyder det att en relation $\mathcal{R}$ på en mängd A är reflexiv?

d) (1p) Hur många lösningar x finns det till ekvationen $x = \arcsin 0,3$?

DEL II

4. (4p) Bestäm det minsta positiva $x \in \mathbb{Z}$ så att

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{5} \\ x \equiv 3 \pmod{7} \\ x \equiv 5 \pmod{11} \end{cases}$$

5. (4p) Fem pojkar och fem flickor skall delas in i tre grupper så att det är minst en flicka och minst en pojke i varje grupp. Hur många sätt finns det att göra det? För full poäng skall svaret ges som ett heltal.

6. Låt $m(x) = 2x^3 - 6x^2 + 2x + 4$ och $n(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 4$.

- a) (2p) Använd Euklides algoritm för att bestämma $\text{sgd}(m(x), n(x))$, största gemensamma delaren till $m(x)$ och $n(x)$.
- b) (2p) Bestäm för vilka värden på x som $m(x) < n(x)$.

DEL III

7. a) (2p) Funktionen $f(x) = \ln(x+1) \cdot \ln(x^2+2x+1) + 2$ är definierad för $x \in \mathbb{R}, x > -1$. Är f injektiv?

b) (2p) Låt $g(x) = \cos 2x + \sin x$. Kan $g(x)$ anta värdet 2?

8. (4p) Definiera det harmoniska talet $H_m = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m}$, för $m \in \mathbb{Z}_+$. Visa med induktion att för $n \in \mathbb{Z}_+$ gäller

$$H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}.$$

9. (4p) Bestäm antalet heltalslösningar till $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 22$, där $1 \leq x_i \leq 8$ för alla $1 \leq i \leq 4$.

**Tentamen SF1671 Baskurs med Diskret matematik,
2017-10-20**

Skrivtid: 14:00-19:00

Tillåtna hjälpmedel: Inga

Examinator: Svante Linusson

Maximal poäng på tentamen är 36 poäng. Tentan är indelad i tre delar I, II och III om max 12 poäng vardera. Eventuella bonuspoäng läggs till poängen på del I, det kan dock aldrig överstiga 12 poäng. Bonuspoängen framgår av er resultatsida och läggs till automatiskt.

Betygsgränserna vid denna tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del III	6	3	-	-	-	-

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I

1. På följande tal skall svaret vara ett heltal.

- (2p) Hur många surjektiva funktioner $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ finns det?
- (2p) Skriv 2017 i bas 5. (Talet 2017 antas här vara skrivet i bas tio.)

2. (4p) Lös

$$\frac{\ln(5x^2 - 5x - 1)}{\ln(2x - 1)} = 2.$$

3. På denna uppgift krävs bara svar (ingen motivering).

- (1p) Skriv upp sanningstabellen för $q \vee p \rightarrow p \wedge \neg q$.
 - (1p) Vad betyder det att en relation $\mathcal{R}$ på en mängd A är reflexiv?
 - (1p) Du kastar en röd och en blå (sexsidig) tärning och får r och b . Vad är sannolikheten att $r \equiv_3 0$ om du vet att $r + b \equiv_3 0$?
 - (1p) Skriv upp De Morgans lagar i mängdlära.
-

DEL II

4. (4p) Teknologen Tove skall göra 9 tentauppgifter, en i taget. På tentan har hon med sig 5 (likadana) chokladbitar som hon skall äta innan vissa tentauppgifter för att få energi i tänkandet. Hon äter upp en hel chokladbit åt gången, men inte mer än en i rad. På hur många sätt kan hon ordna tentauppgifterna och chokladätandet om hon inte vill sluta med en chokladbit?

(Svaret får innehålla heltal, potenser, fakulteter och de fyra enkla räknesätten.)

Exempel: Beteckna tentauppgifterna med 1 till 9 och chokladbitarna med c.

Då är 5 c 4 7 1 c 2 c 8 3 c 6 c 9 och c 3 9 7 4 c 5 c 1 c 2 6 c 8 möjliga ordningar.

5. (4p) Låt $f(x) = ax + b$, $g(x) = x^2 - 1$. Bestäm alla $a, b \in \mathbb{R}$ sådana att

$$f \circ g(x) = g \circ f(x), \text{ för alla } x \in \mathbb{R}.$$

6. (4p) Beräkna $17^{17^{17}} \pmod{19}$.

DEL III

7. (4p) I en aritmetisk summa är fjärde, elfte och sista talet -1 , $\frac{19}{2}$, respektive 41. Bestäm antalet termer och summans värde.

8. (4p) Vi definierar en följd av polynom $p_n(x)$ rekursivt genom $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x$ och

$$p_{n+1}(x) = x \cdot p_n(x) + p_{n-1}(x), \text{ för } n \geq 1.$$

Visa med induktion att $\text{sgd}(p_n(x), p_{n-1}(x)) = 1$ för alla $n \geq 1$.

9. (4p) Hur många permutationer av 1 2 3 4 5 6 finns det om vi förbjuder tre på varandra följande siffror att vara i växande ordning?

Exempel: 3 5 1 4 2 6 är tillåtet, men 5 1 4 6 2 3 är förbjudet på grund av att 1 4 6 är växande. (Tips: Låt A_i vara mängden av permutationer som är förbjudna för att siffrorna på positionerna $i, i+1, i+2$ är i växande ordning. Börja med att räkna ut $|A_i|$ och använd det i inklusion-exklusion.)

Lycka till! Svante

**Tentamen SF1671 Baskurs med Diskret matematik,
2017-12-19**

Skrivtid: 8:00-13:00

Tillåtna hjälpmedel: Inga

Examinator: Svante Linusson

Maximal poäng på tentamen är 36 poäng. Tentan är indelad i tre delar I, II och III om max 12 poäng vardera. Eventuella bonuspoäng läggs till poängen på del I, det kan dock aldrig överstiga 12 poäng. Bonuspoängen framgår av er resultatsida och läggs till automatiskt.

Betygsgränserna vid denna tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del III	6	3	-	-	-	-

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I

1. Beräkna följande (med motivering som vanligt).

a) (2p) Bestäm inversen till 53 i $\mathbb{Z}_{2017}$.

b) (1p) Hur många sätt finns det att ge 5 (olika) julklappar till 3 barn?

c) (1p) Hur många ord av längd 8 kan man skriva med bokstäverna G O T T G O T T?

2. (4p) Lös

$$6 \cos^2 x + 7 \sin x - 1 = 0.$$

3. På denna uppgift krävs bara svar (ingen motivering).

a) (1p) Sätt $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 5\}$. Ange alla element i $A \times B$.

b) (1p) Vad betyder det att funktionen $f : A \rightarrow B$ är injektiv?

c) (1p) Vad betyder det att en relation $\mathcal{R}$ på A är transitiv?

d) (1p) Formulera Fermats lilla sats.

DEL II

4. (4p) Lös ekvationen

$$\ln(2x + 1) + 2\ln(x - 1) = \ln(11x - 5).$$

5. (4p) Bestäm höstgradstermen i $(x^2 - 2)^{18} - (x^3 - 3x)^{12}$.

6. (4p) Hur många ord av längd 5 kan bildas med bokstäverna A A B B B B C C C C C ?
-

DEL III

7. (4p) Funktionen $f(x)$ definieras på följande sätt (x reellt)

$$f(x) = \begin{cases} \ln x, & \text{för } 0 < x < 1 \\ (x - 1)^2, & \text{för } 1 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

- a) (3p) Bestäm inversen f^{-1} och dess definitionsmängd och värdemängd.
b) (1p) Lös ekvationen $f^{-1}(x) = 4$.

8. (4p) Visa med induktion att för alla $n \geq 2$ gäller

$$4^n < \frac{(2n)!(n+1)}{n!^2}.$$

9. (4p) Ett palindrom är ett ord som blir likadant om man läser det baklänges. Antag att man väljer en registreringsskylt för en bil (tre bokstäver följt av tre siffror) helt slumpmässigt likformigt, dvs varje tecken är oberoende av vilka de andra tecknen är. Vad är då sannolikheten att bokstavsföljden är ett palindrom eller sifferföljden är ett palindrom (eller både och)? Vi utgår från ett alfabet med 28 bokstäver. Svara med ett reducerat bråk.

Lycka till! Svante

**Tentamen SF1671 Baskurs med Diskret matematik,
2018-10-19**

Skrivtid: 14:00-19:00

Tillåtna hjälpmedel: Inga utom penna, suddgummi och linjal.

Examinator: Svante Linusson

Maximal poäng på tentamen är 36 poäng. Tentan är indelad i tre delar I, II och III om max 12 poäng vardera. Eventuella bonuspoäng läggs till poängen på del I, det kan dock aldrig överstiga 12 poäng. Bonuspoängen framgår om ni loggar in på kurshemsidan och läggs till automatiskt.

Betygsgränserna vid denna tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del III	6	3	-	-	-	-

För full päng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som alvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I

- (4p) a) (2p) Bestäm inversen till 335 i $\mathbb{Z}_{2018}$.
b) (2p) Skriv 2018 i bas 6. (Talet 2018 antas här vara skrivet i bas tio.)
 - (4p) Lös ekvationen $\tan(x) + \frac{3}{2}\tan(2x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \cos(2x)$.
 - På denna uppgift krävs bara svar (ingen motivering).
 - (1p) Vad är $\log_3(\frac{1}{6}) + \log_3(2)$?
 - (1p) Skriv upp sanningstabellen för $p \wedge q \leftrightarrow q \vee r$.
 - (1p) Ge exempel på en udda surjektiv funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ som inte är injektiv.
 - (1p) Bestäm $3! \cdot S(5, 3)$.
-

DEL II

4. (4p) Talföljden $\{a_n\}_{n \geq 0}$ definieras genom rekursionen

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} - 2.$$

där $a_0 = 2$, $a_1 = 4$.

Gissa en formel för a_n och visa den med induktion.

5. Vi har de reella funktionerna $g(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = x^2 + x - 6$

- a) (1p) Bestäm $g \circ f(2)$.
- b) (2p) Bestäm definitionsmängd och värdemängd för $g \circ f(x)$.
- c) (1p) Om man begränsar $g \circ f(x)$ till $x \geq 10$, vad blir då inversen?

6. Låt $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ och låt $\sim$ vara en relation på icke-tomma delmängder till S , sådan att

$$A \sim B \iff |A| = |B| \text{ och } \min(A) - \min(B) \equiv 0 \pmod{2}$$

där $\min(A)$ betecknar minsta elementet i A .

(Exempel: $\{2, 3, 5\} \sim \{4, 6, 7\}$, men $\{2, 3, 5\} \not\sim \{6, 7\}$ och $\{2, 3\} \not\sim \{5, 7\}$)

- a) (1p) Skriv upp villkoren som krävs för att $\sim$ skall vara en ekvivalensrelation.
- b) (1p) Visa att $\sim$ är en ekvivalensrelation.
- c) (2p) Hur många delmängder av S är i samma ekvivalensklass som $\{3, 5, 6, 8\}$?

DEL III

7. (4p) Bestäm ett positivt heltal x , sådant att $2^x \equiv 1 \pmod{23}$ och $3^x \equiv 9 \pmod{31}$.

(Tips: använd Fermats lilla sats för att skriva upp en mängd lösningar till var och en av ekvationerna.)

- 8) (4p) 5 olika färgade kulor och 6 (identiska) svarta kulor skall fördelas mellan 4 barn. På hur många sätt kan det göras så att varje barn får minst en kula (svart eller färgad)?

(Svaret får innehålla heltal, potenser, faktorer, Stirlingtal och de fyra enkla räknesätten.)

9. (4p) Bevisa att det finns oändligt många primtal.

**Tentamen SF1671 Baskurs med Diskret matematik,
2018-12-18**

Skrivtid: 8:00-13:00

Tillåtna hjälpmedel: Inga utom penna, suddgummi och linjal.

Examinator: Svante Linusson

Maximal poäng på tentamen är 36 poäng. Tentan är indelad i tre delar I, II och III om max 12 poäng vardera. Eventuella bonuspoäng läggs till poängen på del I, det kan dock aldrig överstiga 12 poäng. Bonuspoängen framgår om ni loggar in på kurshemsidan och läggs till automatiskt.

Betygsgränserna vid denna tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del III	6	3	-	-	-	-

För full päng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som alvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I

1. (Motivera noga!)

- a) (1p) Är relationen $\mathcal{R}$ på $\mathbb{Z}$ som definieras genom $a\mathcal{R}b$ om $a^2 - b^2 \leq 7$ en ekvivalensrelation?
b) (1p) Är relationen $\mathcal{R}$ på $\mathbb{Z}$ som definieras genom $a\mathcal{R}b$ om $a + b \equiv 0 \pmod{7}$ en ekvivalensrelation?
c) (1p) Är funktionen $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = 2x$ en surjektion?
d) (1p) Är funktionen $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ en injektion? (Här är $\mathbb{R}_{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$)

2. (4p) Lös ekvationen

$$x^2 + |6x - 5| = 12$$

3. På denna uppgift krävs bara svar (ingen motivering).

- a) (1p) Vad är definitionen av att en funktion $f : A \rightarrow B$, $A \subseteq \mathbb{R}$ är en jämn funktion?
b) (1p) Hur många möjliga utfall finns det när man rullar 3 identiska (6-sidiga) tärningar?
(Svaret får innehålla heltal, potenser, fakulteter, binomialkoefficienter, Stirlingtal och de fyra enkla räknesätten.)
c) (1p) Uttryck $|A \cup B \cup C|$ med formeln för inklusion-exklusion.
d) (1p) Låt $A = \{4, 5, 6\}$ och $B = \{1, 3, 5\}$. Skriv upp alla element i $A \times B$.

DEL II

4. (4p) Beräkna största gemensamma delaren $\text{sgd}(m(x), n(x))$ till polynomen $m(x) = x^4 + 5x^3 + 10x^2 + 16x + 16$ och $n(x) = x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 19x + 22$. Bestäm sedan polynom $u(x), v(x)$ sådana att $m(x) \cdot u(x) + n(x) \cdot v(x) = \text{sgd}(m(x), n(x))$

5. (4p) En kortlek (vanlig standardkortlek med 52 kort) är helt slumpässigt blandad (så varje ordning är lika sannolik). Vad är sannolikheten att klöver kung inte ligger direkt ovanpå klöver ess och att ruter kung inte ligger direkt ovanpå ruter ess?

6. (4p) Beräkna $13^{15^{17}} \pmod{17}$.

DEL III

7. (4p) Antag $x > 0$, förenkla

$$\sin(2 \arctan(\frac{1}{\sqrt{x}}))$$

till en funktion som inte innehåller trigonometriska funktioner.

8. (4p) Använd induktion för att visa att för alla $n \geq 1$ gäller

$$\sum_{j=1}^n j^3 = \binom{n+1}{2}^2$$

9. (4p) Låt A, B, X vara mängder, med $A \cap B = \emptyset$, $|A| = a$, $|B| = b$ och $|X| = n$, där $a + b \geq n$, $n \geq a$ och $n \geq b$.

Hur många surjektioner $f : A \cup B \rightarrow X$, finns det där f :s begränsning till A och f :s begränsning till B båda är injektioner?

(Svaret får innehålla heltal, potenser, faktorer, Stirlingtal och de fyra enkla räknesätten.)

**Tentamen SF1671 Baskurs med Diskret matematik,
2019-10-24**

Skrivtid: 08:00–13:00

Tillåtna hjälpmedel: Inga utom penna, suddgummi och linjal.

Examinator: Petter Brändén

Maximal poäng på tentamen är 36 poäng. Tentan är indelad i tre delar I, II och III om max 12 poäng vardera. Eventuella bonuspoäng läggs till poängen på del I, det kan dock aldrig överstiga 12 poäng. Bonuspoängen framgår om ni loggar in på kurshemsidan och läggs till automatiskt.

Betygsgränserna vid denna tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	F _x
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del III	6	3	-	-	-	-

För full päng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som alvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I

- (2p) Hur många inverterbara element finns i $\mathbb{Z}_{99}$?
 - (2p) Hitta alla lösningar till ekvationen $105x = 3$ i $\mathbb{Z}_{342}$.
- (4p) Finn alla lösningar till ekvationen $5 \sin x + \cos 2x + 2 = 0$.
- På denna uppgift krävs bara svar (ingen motivering).
 - (1p) Förenkla $2 \cdot \log_4(3) - 3 \cdot \log_4(12) + \log_4(\frac{3}{2})$ så långt som möjligt?
 - (1p) Relationen $\mathcal{R}$ på mängden $\{1, 2, 3, 4\}$ ges av $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3), (4, 4), (4, 3), (4, 1)\}$. Vilka av egenskaperna reflexiv, symmetrisk, anti-symmetrisk och/eller transitiv har $\mathcal{R}$?
 - (1p) Hur många injektiva funktioner $f : \{7, 0, 3\} \rightarrow \{1, 0, 9, 3, -1\}$ finns det?
 - (1p) Hur många surjektiva funktioner $g : \{1, 0, 9, 3, -1\} \rightarrow \{7, 0, 3\}$ finns det?

DEL II

4. Låt $\mathcal{M}$ vara mängden av alla ord som kan bildas genom att kasta om bokstäverna i ordet RAGGARGRANEN. (Orden AAEGGGRRRRN och RAGGGRENARNA ligger i $\mathcal{M}$, men inte RAGGRENARNA).

- a) (1p) Bestäm $|\mathcal{M}|$.
- b) (1p) Hur många ord i $\mathcal{M}$ innehåller ordet GRENAR? (T.ex. RAGGRENARNAG).
- c) (2p) Hur många ord i $\mathcal{M}$ innehåller varken ordet GRENAR eller ordet NARRA?

(Svaren får innehålla heltal, potenser, faktorer och de fyra enkla räknesätten.)

5. (4p) Skriv polynomet $2x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ som en produkt av irreducibla polynom. (*Obs!* Polynomet har ett rationellt nollställe).

6. (4p) En talföljd $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ defineras rekursivt genom

$$a_n = \begin{cases} 2 & \text{om } n = 0, \\ 5 & \text{om } n = 1, \\ 5a_{n-1} - 6a_{n-2} & \text{om } n \geq 2. \end{cases}$$

Bevisa med induktion (eller stark induktion) att $a_n = 2^n + 3^n$ för alla heltal $n \geq 0$.

DEL III

7. Kom ihåg att om A och B är mängder så defineras $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Definera en relation $\mathcal{R}$ på $X = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ genom

$A \mathcal{R} B$ om och endast om $A \Delta B$ är ändlig eller uppräknelig.

(Kom ihåg att en mängd är uppräknelig om den har samma kardinalitet som $\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, \dots\}$.)

- a) (3p) Visa att $\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation på X . (Även om du inte kan visa alla egenskaper som en ekvivalensrelation ska ha, visa så många du kan!)
- b) (1p) Ge enkla beskrivningar av ekvivalensklasserna $[\emptyset]$ och $[\mathbb{R}]$.

8. (4p) Milena vill ge sina 4 kompisar godis. Hon har 10 identiska chokladbitar, 7 identiska geléhallon, 6 identiska lakritsbåtar och 3 identiska klubbor. På hur många olika sätt kan hon fördela dessa bland sina 4 kompisar så att alla får minst en godis var? (Svaret får innehålla heltal, potenser, faktorer, binomialtal och de fyra enkla räknesätten.)

9. (4p) Bestäm alla reella tal x för vilka $-1 \leq x \leq 1$ och

$$\cos(\arcsin x) + |2x - 1| \leq 1.$$

**Tentamen SF1671 Baskurs med Diskret matematik,
2019-12-19**

Skrivtid: 08:00–13:00

Tillåtna hjälpmedel: Inga utom penna, suddgummi och linjal.

Examinator: Petter Brändén

Maximal poäng på tentamen är 36 poäng. Tentan är indelad i tre delar I, II och III om max 12 poäng vardera. Eventuella bonuspoäng läggs till poängen på del I, det kan dock aldrig överstiga 12 poäng. Bonuspoängen framgår om ni loggar in på kurshemsidan och läggs till automatiskt.

Betygsgränserna vid denna tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	F _x
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del III	6	3	-	-	-	-

För full päng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som alvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I

1. a) (2p) Bestäm inversen till 11 i $\mathbb{Z}_{82}$.

b) (2p) Hur många inverterbara element finns i $\mathbb{Z}_{220}$?

2. Funktionen $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definieras rekursivt av $f(0) = 2$, $f(1) = 1$ och

$$f(n) = f(n-1) + 6f(n-2), \quad \text{för alla heltal } n \geq 2.$$

Bevisa att $f(n) = 3^n + (-2)^n$, för alla $n \in \mathbb{N}$.

3. På denna uppgift krävs bara svar (ingen motivering).

(Svaren får innehålla reella tal, potenser, fakulteter och de fyra enkla räknesätten.)

a) (1p) Hitta alla reella tal x sådana att $0 \leq x \leq 2\pi$ och $\sin x + 2^{-1/2} = 0$.

b) (1p) Det finns 11 olika rätter på Ho's Thai-restaurang. Ann-Britt ska beställa 14 rätter därifrån. På hur många olika sätt kan hon göra det?

c) (1p) Hur många bijektiva funktioner $f : \{7, 0, 3, 8, 2\} \rightarrow \{7, 0, 3, 8, 1\}$ finns det?

d) (1p) Hur många funktioner $g : \{1, 2, \dots, 11, 12\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 7\}$ sådana att $g(x) \neq g(y)$ för alla olika *udda* tal x och y finns det?

DEL II

4. (4p). Bestäm antalet heltalslösningar till ekvationen $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 120$, då $x_i \geq i$ för $i = 1, 2, \dots, 6$.

(Svaret får innehålla heltal, potenser, faktorer och de fyra enkla räknesätten.)

5. (4p) För vilka reella tal x gäller

$$\ln(x) - \ln(x - 10) + \ln(x - 3) + \ln(x + 2) \geq 0?$$

6. a) (2p) Hur många olika ekvivalensrelationer finns det på mängden $\{1, 2, 3, 4\}$?

c) (2p) Hur många olika transitiva relationer finns det på mängden $\{1, 2\}$?

DEL III

7. Hundra identiska kulor ska fördelas i fyra olika lådor så att ingen låda är tom och ingen låda innehåller fler än trettio kulor. På hur många olika sätt kan detta göras?

(Svaret får innehålla heltal, potenser, faktorer, binomialtal och de fyra enkla räknesätten.)

8. (4p) Låt $x_1, x_2, \dots, x_{n+2}$ vara godtyckliga heltal. Visa att (A) eller (B) nedan är sann:

(A) Det finns $1 \leq i < j \leq n + 2$ sådana att $2n$ delar $x_i - x_j$.

(B) Det finns $1 \leq i < j \leq n + 2$ sådana att $2n$ delar $x_i + x_j$.

9. (4p) Låt x vara ett reellt tal. En talföljd $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ definieras rekursivt genom $a_0 = 1$ och

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^n x^{n-k} a_k, \quad \text{för alla heltal } n \geq 0.$$

Bevisa att $a_n = (x + 1)^{n-1}$ för alla heltal $n \geq 1$.

Tentamen SF1671 Baskurs med Diskret matematik,
2020-10-21

Skrivtid: 08:00–13:00

Tillåtna hjälpmedel: Inga utom penna, suddgummi och linjal.

Examinator: Petter Brändén, 08-790 65 41

Obs: Om du har frågor om uppgifter på tentan, så ska du formulera dessa på ett blad och ge dem till tentavakten senast kl 10:00. Ange vilken uppgift frågan gäller. Läs igenom *alla* uppgifterna innan du börjar att skriva tentan.

Maximal poäng på tentamen är 36 poäng. Tentan är indelad i tre delar I, II och III om max 12 poäng vardera. Eventuella bonuspoäng läggs till poängen på del I, det kan dock aldrig överstiga 12 poäng. Bonuspoängen framgår om ni loggar in på kurshemsidan och läggs till automatiskt.

Betygsgränserna vid denna tentamen kommer att ges enligt

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del III	6	3	-	-	-	-

För full päng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar som inte är standard i kursen definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som har allvarliga brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I

1. (4p) Finn alla lösningar till ekvationen $165x = 21$ i $\mathbb{Z}_{192}$.

(Svaret ska ges som en lista av tal i $\{0, 1, 2, \dots, 191\}$.)

2. (4p) Finn alla lösningar till ekvationen $\tan(x) = \tan(-2x)$.

3. På denna uppgift krävs bara svar (ingen motivering). Svaren på c) och d) får innehålla heltal, potenser, faktorer och de fyra enkla räknesätten.

a) (1p) Talet 2020 är skrivet på decimalform. Skriv det i bas 6.

b) (1p) Relationen $\mathcal{R}$ på mängden $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ges av $\mathcal{R} = \{(1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3), (5, 5)\}$. Vilka av egenskaperna reflexiv, symmetrisk, anti-symmetrisk och/eller transitiv har $\mathcal{R}$?

c) (1p) Hur många olika ord kan bildas av ordet PAPPERSPAPPAS genom att kasta om (blanda) bokstäverna?

(T.ex. PAPPASPEPPARS och SPRPEPAAPAPSP, men inte PRPEPAAPAPSP.)

d) (1p) Hur många olika injektioner $f : \{-3, 2, 5, 7, 9, -9, 6\} \rightarrow \{5, -4, 4, 3\}$ finns det?

DEL II

4. (4p) 150 identiska kulor ska fördelas bland 5 olika lådor L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 , så att inga låda blir tom. Hur många olika sådana fördelningar finns det där L_1 får högst 25 kulor och L_2 får minst 5 kulor?

(Svaret får innehålla heltal, potenser, faktorer, binomialtal, Stirlingtal och de fyra enkla räknesätten.)

5. (4p) Skriv polynomet $8x^3 + 10x^2 + 7x + 3$ som en produkt av irreducibla polynom.

6. (4p) En talföljd $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ med positiva reella tal uppfyller $a_{n+1}^2 \cdot a_{n-2} = a_n^3$ för alla heltal $n \geq 2$. Dessutom är $a_0 = 1, a_1 = 3$ och $a_2 = 9$. Bevisa med induktion (eller stark induktion) att $a_n = 3^n$ för alla heltal $n \geq 0$.

DEL III

7. Kom ihåg att två relationer $\mathcal{R}_1$ och $\mathcal{R}_2$ på en mängd X är *lika* om det för alla $x, y \in X$ gäller att $x\mathcal{R}_1y$ om och endast om $x\mathcal{R}_2y$.

a) (2p) Hur många olika relationer finns det på mängden $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, som både är reflexiva och symmetriska?

b) (2p) Hur många olika ekvivalensrelationer som har exakt 3 ekvivalensklasser finns det på mängden $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

(Svaren ska ges som heltal skrivna i decimalbasen.)

8. (4p) 15 flickor och 15 pojkar ska fördelas i 4 icke-tomma grupper (onummerade). På hur många olika sätt kan detta göras om vi förbjuder alla grupper av formen $\{x, y\}$, där x är en pojke och y är en flicka?

(Svaret får innehålla heltal, potenser, faktorer, binomialtal, Stirlingtal och de fyra enkla räknesätten.)

9. För vilka reella tal x gäller

$$2x + 2 \leq \log_3(4 \cdot 3^x - 7) + 2 \cdot \log_9(2 \cdot 3^x - 5)?$$

(Svaret får innehålla heltal, potenser, logaritmer och de fyra enkla räknesätten.) (*Tips.* $18^2 = 324$.)

**Tentamen SF1671 Baskurs med Diskret matematik,
2021-10-27**

Skrivtid: 08:00–13:00

Tillåtna hjälpmedel: Inga utom penna, suddgummi och linjal.

Examinator: Petter Brändén, 08-790 65 41

Maximal poäng på tentamen är 36 poäng. Tentan är indelad i tre delar I, II och III om max 12 poäng vardera. Eventuella bonuspoäng läggs till poängen på del I, det kan dock aldrig överstiga 12 poäng. Bonuspoängen framgår om ni loggar in på kurshemsidan och läggs till automatiskt.

Betygsgränserna vid denna tentamen kommer att ges enligt

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del III	6	3	-	-	-	-

För full päng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar som inte är standard i kursen definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som har allvarliga brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I

1. (4p) Finn alla heltalslösningar till den Diofantiska ekvationen $384x + 330y = 42$.

2. (4p) Finn alla lösningar till ekvationen $\sin(2x - 3) + \cos(2 - 3x) = 0$.

3. På denna uppgift krävs bara svar (ingen motivering). Svaren på c) och d) får innehålla heltal, potenser, faktulteter och de fyra enkla räknesätten.

a) (1p) Hitta alla lösningar till ekvationen $\ln(2) + \ln(3 - x) = \ln(x) + \ln(x - 1)$.

b) (1p) Relationen $\mathcal{R}$ på mängden $\mathbb{Z}_7$ ges av

$$\mathcal{R} = \{(i, j) : j - i \in \{0, 1, 6\}\}.$$

Vilka av egenskaperna reflexiv, symmetrisk, anti-symmetrisk och/eller transitiv har $\mathcal{R}$?

c) (1p) Hur många surjektioner $f : \{1, 3, 5, 7, 9\} \rightarrow \{2, 4, 6\}$ finns det?

d) (1p) Hur många olika injektioner $f : \{-3, 2, 5, 7\} \rightarrow \{5, -4, 4, 3, 9, -2, 8\}$ finns det?

DEL II

4. (4p) Skriv polynomet $2x^3 + 7x^2 + 10x + 35$ som en produkt av irreducibla polynom.

5. Betrakta olikheten

$$\frac{1}{|x|} \geq \frac{1}{|x + \frac{1}{2}|} - \frac{1}{|x + 1|} \quad (\star)$$

a) (1p) Visa att x uppfyller $(\star)$ om och endast om $-1 - x$ uppfyller $(\star)$.

b) (3p) Bestäm alla reella tal x som uppfyller olikheten $(\star)$.

6. (4p) Bestäm antalet inverterbara element i $\mathbb{Z}_{468}$.

(Svaret får innehålla heltal, potenser, faktorer, binomialtal, Stirlingtal och de fyra enkla räknesätten.)

DEL III

7. (4p) Lilla Gunvor ska ge 100 olika idolkort till hennes 25 klasskompisar (Gunvor själv ska inte ha något kort). På hur många olika sätt kan hon göra detta om hennes 4 bästa vänner måste få minst ett kort var.

(Svaret får innehålla heltal, potenser, faktorer, binomialtal, Stirlingtal och de fyra enkla räknesätten.)

8. (4p) Bevisa, med induktion eller stark induktion, att för alla positiva heltal n ,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2}.$$

9. (4p) Ge ett exempel på en surjektion $f : \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}$ och en injektion $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{Z})$. Förklara varför funktionerna är surjektioner och injektioner.

(Kom ihåg att $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ är potensmängden till $\mathbb{Z}$.)

**Tentamen SF1671 Baskurs med Diskret matematik,
2021-12-22**

Skrivtid: 08:00–13:00

Tillåtna hjälpmedel: Inga utom penna, suddgummi och linjal.

Examinator: Petter Brändén, 08-790 65 41

Maximal poäng på tentamen är 36 poäng. Tentan är indelad i tre delar I, II och III om max 12 poäng vardera. Eventuella bonuspoäng läggs till poängen på del I, det kan dock aldrig överstiga 12 poäng. Bonuspoängen framgår om ni loggar in på kurshemsidan och läggs till automatiskt.

Betygsgränserna vid denna tentamen kommer att ges enligt

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del III	6	3	-	-	-	-

För full päng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar som inte är standard i kursen definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som har allvarliga brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I

1. (4p) Finn alla heltalslösningar till den Diofantiska ekvationen $495x + 576y = 63$.

2. (4p) Finn alla lösningar till ekvationen $\sin(5x + 2) + \cos(|2 - 3x|) = 0$.

3. På denna uppgift krävs bara svar (ingen motivering). Svaren på c) och d) får innehålla heltal, potenser, fakulteter och de fyra enkla räknesätten.

a) (1p) Skriv upp sanningstabellen för $(q \vee \neg p) \rightarrow (p \wedge q)$.

b) (1p) Relationen $\mathcal{R}$ på mängden $\mathbb{Z}$ ges av $\mathcal{R} = \{(i, j) : |j - i| \leq 4\}$. Vilka av egenskaperna reflexiv, symmetrisk, anti-symmetrisk och/eller transitiv har $\mathcal{R}$?

c) (1p) På hur många olika sätt kan 15 olika bollar fördelas i 4 olika lådor?

d) (1p) Fem kort ska dras slumpvis från en vanlig (perfekt blandad) kortlek. Vad är sannolikheten att du endast får damer, knektar och/eller kungar?

Kom ihåg att en kortlek består av 52 kort:

$\heartsuit 1, \heartsuit 2, \dots, \heartsuit 10, \heartsuit$ -knekt, $\heartsuit$ -dam, $\heartsuit$ -kung, $\diamondsuit 1, \diamondsuit 2, \dots, \diamondsuit 10, \diamondsuit$ -knekt, $\diamondsuit$ -dam, $\diamondsuit$ -kung,
 $\clubsuit 1, \clubsuit 2, \dots, \clubsuit 10, \clubsuit$ -knekt, $\clubsuit$ -dam, $\clubsuit$ -kung, $\spadesuit 1, \spadesuit 2, \dots, \spadesuit 10, \spadesuit$ -knekt, $\spadesuit$ -dam, $\spadesuit$ -kung.

DEL II

4. (4p) Skriv polynomet $3x^3 + 7x^2 + 13x + 12$ som en produkt av irreducibla polynom.
5. (4p) Bestäm högstgradstermen i polynomet $(x^3 + 3x)^{20} - (x^5 - 2x^2)^{12}$.
Obs! Högstgradstermen i $-3x^7 + 5x^4 + 2x^3 - 4x + 1$ är $-3x^7$.
6. (4p) Bestäm antalet inverterbara element i $\mathbb{Z}_{396}$.
(Svaret får innehålla heltal, potenser, faktorer, binomialtal, Stirlingtal och de fyra enkla räknesätten.)
-

DEL III

7. (4p) Tio personer ska ställa sig i en kö. Alla är olika långa och alla ska ställa sig i kön. På hur många olika sätt kan de göra det om högst en av dem får vara kortare än den som står på platsen framför?
(Svaret får innehålla heltal, potenser, faktorer, binomialtal, Stirlingtal och de fyra enkla räknesätten.)
8. (4p) Bevisa, med induktion eller stark induktion, att för alla naturliga tal n ,

$$\sum_{k=0}^n k^5 \leq \frac{(n+1)^6 - 1}{6}.$$

9. (4p) Låt $\mathcal{M} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, \dots\}$ vara mängden av alla positiva heltal vars enda primtalsdelare är 2 och 3. Bevisa att $\mathcal{M}$ har samma kardinalitet som $\mathbb{Z}$ genom att beskriva en explicit bijektion $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{Z}$.

**Tentamen SF1671 Baskurs med Diskret matematik,
2022-10-26**

Skrivtid: 08:00–13:00

Tillåtna hjälpmedel: Inga utom penna, suddgummi och linjal.

Examinator: Petter Brändén, 08-790 65 41

Maximal poäng på tentamen är 36 poäng. Tentan är indelad i tre delar I, II och III om max 12 poäng vardera. Eventuella bonuspoäng läggs till poängen på del I, det kan dock aldrig överstiga 12 poäng. Bonuspoängen framgår om ni loggar in på kurshemsidan och läggs till automatiskt.

Betygsgränserna vid denna tentamen kommer att ges enligt

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del III	6	3	-	-	-	-

För full päng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar som inte är standard i kursen definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som har allvarliga brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I

1. (4p) För vilka x gäller $\arctan(\sinh(x)) = \pi/3$?

2. (4p) Finn alla lösningar till ekvationen $330x + 342 = 0$ i $\mathbb{Z}_{384}$.

3. På denna uppgift krävs bara svar (ingen motivering). Svaren på c) och d) får innehålla heltal, potenser, faktorer och de fyra enkla räknesätten.

a) (1p) Skriv upp sanningstabellen för $(q \rightarrow p) \rightarrow (p \wedge q)$.

b) (1p) Relationen $\mathcal{R}$ på mängden $\mathbb{R}$ ges av $\mathcal{R} = \{(x, y) : y > 4x\}$. Vilka av egenskaperna reflexiv, symmetrisk, anti-symmetrisk och/eller transitiv har $\mathcal{R}$?

c) (1p) På hur många olika sätt kan 15 identiska bollar fördelas i 5 olika (numrerade) lådor?

d) (1p) Fem kort ska dras slumpvis från en vanlig (perfekt blandad) kortlek. Vad är sannolikheten för att du får minst en dam?

Kom ihåg att en kortlek består av 52 kort:

$\heartsuit 1, \heartsuit 2, \dots, \heartsuit 10, \heartsuit\text{-knekt}, \heartsuit\text{-dam}, \heartsuit\text{-kung},$
 $\clubsuit 1, \clubsuit 2, \dots, \clubsuit 10, \clubsuit\text{-knekt}, \clubsuit\text{-dam}, \clubsuit\text{-kung},$

$\diamondsuit 1, \diamondsuit 2, \dots, \diamondsuit 10, \diamondsuit\text{-knekt}, \diamondsuit\text{-dam}, \diamondsuit\text{-kung},$
 $\spadesuit 1, \spadesuit 2, \dots, \spadesuit 10, \spadesuit\text{-knekt}, \spadesuit\text{-dam}, \spadesuit\text{-kung}.$

DEL II

4. (4p) Bestäm alla $x \in \mathbb{R}$ sådana att $5x^3 + 7x^2 - 3x > 2$.

5. (4p) Talföljden $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ definieras av $a_0 = 0$, $a_1 = 2$, $a_2 = 8$ och

$$a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-3} + 2^{n-2}(n+1), \quad \text{för alla } n \geq 3.$$

Visa med induktion eller stark induktion att $a_n = n2^n$ för alla $n \in \mathbb{N}$.

6. (4p) Bestäm resten av 1222^{2403} vid division med 601.

Tips. 601 är ett primtal.

DEL III

7. (4p) 50 olika personer ska delas upp i fyra olika (numrerade) grupper. På hur många olika sätt kan detta göras om vi kräver att varje grupp innehåller minst två personer.

(Svaret får innehålla heltal, potenser, faktorer, binomialtal, Stirlingtal och de fyra enkla räknesätten.)

8. (4p) Hur många lösningar till

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{17} = 3400, \quad x_i \in \mathbb{N}$$

satisfierar $x_i \equiv i \pmod{17}$ för alla $1 \leq i \leq 17$?

(Svaret får innehålla heltal, potenser, faktorer, binomialtal, Stirlingtal och de fyra enkla räknesätten.)

9. (4p) Bestäm kardinaliteten för $\mathbb{R} \times \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Svaret ska vara $|\mathbb{R}|$, $|\mathcal{P}(\mathbb{R})|$ eller $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))|$.

**Tentamen SF1671 Baskurs med Diskret matematik,
2022-12-21**

Skrivtid: 08:00–13:00

Tillåtna hjälpmedel: Inga utom penna, suddgummi och linjal.

Examinator: Petter Brändén, 08-790 65 41

Maximal poäng på tentamen är 36 poäng. Tentan är indelad i tre delar I, II och III om max 12 poäng vardera. Eventuella bonuspoäng läggs till poängen på del I, det kan dock aldrig överstiga 12 poäng.

Betygsgränserna vid denna tentamen kommer att ges enligt

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del III	6	3	-	-	-	-

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar som inte är standard i kursen definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som har allvarliga brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I

1. (4p) Lös ekvationen $x^2 + |x + 1/2| = 3$, $x \in \mathbb{R}$.

2. (4p) Finn alla heltalslösningar till den diofantiska ekvationen $267x + 99y = 216$.

3. På denna uppgift krävs bara svar (ingen motivering). Svaren på c) och d) får innehålla heltal, potenser, faktorer och de fyra enkla räknesätten.

a) (1p) Skriv upp sanningstabellen för $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q)$.

b) (1p) Relationen $\mathcal{R}$ på $X = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ ges av $A\mathcal{R}B$ om och endast om det finns en injektion $f : A \rightarrow B$. Vilka av egenskaperna reflexiv, symmetrisk, anti-symmetrisk och/eller transitiv har $\mathcal{R}$? (Kom ihåg att $\mathcal{P}(\mathbb{R}) = \{S \mid S \subseteq \mathbb{R}\}$).

c) (1p) Hur många följder $a_1, a_2, \dots, a_9$ av positiva heltal sådana att

$$1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_9 \leq 19$$

finns det?

d) (1p) Hur många olika ord kan man bilda genom att kasta om bokstäverna i ordet RAGGARGRANNAR?

DEL II

4. (4p) Lös olikheten $3x^3 - x^2 + 5x \leq 12$, $x \in \mathbb{R}$.

5. (4p) Bestäm resten av $35^{(35^{35})}$ vid division med 19.

Tips. Använd Fermats lilla sats.

6. (4p) 8 olika gåvor ska lottas ut slumpvis till 10 olika personer. Vad är sannolikheten att ingen person får fler än en gåva?

(Svaret får innehålla heltal, potenser, fakulteter, binomialtal, Stirlingtal och de fyra enkla räknesätten.)

DEL III

7. (4p) Talföljden $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ definieras av $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ och

$$a_n = (n-1)(a_{n-1} + a_{n-2}), \quad \text{för alla } n \geq 2.$$

Visa med induktion eller stark induktion att $a_n \geq n!/3$ för alla $n \geq 2$.

8. (4p) Låt $1 \leq k \leq n$ vara positiva heltal. Hur många följder av heltal $a_1, a_2, \dots, a_k$ sådana att

$$0 < a_1 < a_2 < \dots < a_k \leq n$$

och

$$a_i \equiv i \pmod{2}, \quad \text{för alla } 1 \leq i \leq n$$

finns det?

(Svaret får innehålla heltal, potenser, fakulteter, binomialtal, Stirlingtal och de fyra enkla räknesätten.)

9. (4p) 60 olika saker ska fördelas till 9 olika personer (Person 1, Person 2, ..., Person 9). På hur många olika sätt kan detta göras om vi kräver att

- alla saker ska delas ut, och
- varje person ska få minst en sak, och
- Person 1 ska få minst tre saker, och
- Person 2, Person 3 och Person 4 ska få minst två saker vardera?

(Svaret får innehålla heltal, potenser, fakulteter, binomialtal, Stirlingtal och de fyra enkla räknesätten.)

Tentamen SF1671 Baskurs med Diskret matematik,
2023-10-25

Skrivtid: 08:00–13:00

Tillåtna hjälpmedel: Inga utom penna, suddgummi och linjal.

Examinator: Petter Brändén, 08–790 65 41

Maximal poäng på tentamen är 36 poäng. Tentan är indelad i tre delar I, II och III om max 12 poäng vardera. Eventuella bonuspoäng läggs till poängen på del I, det kan dock aldrig överstiga 12 poäng. Bonuspoängen framgår om ni loggar in på kurshemsidan och läggs till automatiskt.

Betygsgränserna vid denna tentamen kommer att ges enligt

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del III	6	3	-	-	-	-

För full päng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar som inte är standard i kursen definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som har allvarliga brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I

1. (4p) För vilka x gäller $\arctan(2 \sin(x)/3) = \pi/6$?

2. (4p) Finn alla heltalslösningar till den Diofantiska ekvationen $511x + 342y = 12$.

3. Till denna uppgift krävs bara svar (ingen motivering). Svaret på b) får innehålla heltal, potenser, fakulteter och de fyra enkla räknesätten.

a) (2p) Relationen $\mathcal{R}$ på mängden $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ges av

$$\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 4), (5, 5)\}.$$

Vilka av egenskaperna reflexiv, symmetrisk, anti-symmetrisk och/eller transitiv har $\mathcal{R}$?

b) (2p) Fem kort ska dras slumpvis från en vanlig (perfekt blandad) kortlek. Vad är sannolikheten för att du inte får någon dam och samtidigt inte får färg? Färg betyder att alla fem korten är av samma typ ($\heartsuit$, $\diamondsuit$, $\clubsuit$ eller $\spadesuit$).

En kortlek består av följande 52 kort:

$\heartsuit 1, \heartsuit 2, \dots, \heartsuit 10$, $\heartsuit$ -knekt, $\heartsuit$ -dam, $\heartsuit$ -kung, $\diamondsuit 1, \diamondsuit 2, \dots, \diamondsuit 10$, $\diamondsuit$ -knekt, $\diamondsuit$ -dam, $\diamondsuit$ -kung,
 $\clubsuit 1, \clubsuit 2, \dots, \clubsuit 10$, $\clubsuit$ -knekt, $\clubsuit$ -dam, $\clubsuit$ -kung, $\spadesuit 1, \spadesuit 2, \dots, \spadesuit 10$, $\spadesuit$ -knekt, $\spadesuit$ -dam, $\spadesuit$ -kung.

DEL II

4. (4p) Lös olikheten

$$(2x - x^2)^{1/3} + |1 - x| \leq 1.$$

5. (4p) Visa att

$$\sum_{k=3}^n \binom{k}{3} = \binom{n+1}{4},$$

för all heltal $n \geq 3$.

6. (4p) Bestäm resten av 1412^{2804} vid division med 701.

Tips. 701 är ett primtal.

DEL III

7. (4p) 60 olika katter, 60 olika hundar och 60 olika kaniner ska delas upp i 3 numrerade burar med 60 djur i varje bur. På hur många olika sätt kan detta göras om vi kräver att ingen bur får innehålla djur av endast en art?

(Svaret får innehålla heltal, potenser, faktulteter, binomialtal, Stirlingtal och de fyra enkla räknesätten.)

8. (4p) Låt n vara ett positivt heltal.

- (a) Visa att antalet sätt att fördela $\{1, 2, \dots, n\}$ i tre numrerade lådor så att ingen låda blir tom är

$$3^n - 3 \cdot 2^n + 3.$$

- (b) Visa att

$$k!S(n, k) = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n,$$

där $S(n, k)$ är ett Stirlingtal.

9. (4p) Visa att $|\mathcal{P}(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}(\mathbb{R})| = |\mathcal{P}(\mathbb{R})|$.

**Tentamen SF1671 Baskurs med Diskret matematik,
2023-12-20**

Skrivtid: 08:00–13:00

Tillåtna hjälpmedel: Inga utom penna, suddgummi och linjal.

Examinator: Petter Brändén, 08–790 65 41

Maximal poäng på tentamen är 36 poäng. Tentan är indelad i tre delar I, II och III om max 12 poäng vardera. Eventuella bonuspoäng läggs till poängen på del I, det kan dock aldrig överstiga 12 poäng. Bonuspoängen framgår om ni loggar in på kurshemsidan och läggs till automatiskt.

Betygsgränserna vid denna tentamen kommer att ges enligt

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del III	6	3	-	-	-	-

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar som inte är standard i kursen definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som har allvarliga brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I

1. (4p) Beräkna $\cos(\pi/12)$.

(Svaret får endast innehålla heltal, kvadratrötter och de fyra enkla räknesätten.)

2. (4p) Finn alla lösningar till ekvationen $165x = 21$ i $\mathbb{Z}_{192}$.

(Svaret ska ges som en lista av tal i $\{0, 1, 2, \dots, 191\}$.)

3. (4p) Till denna uppgift krävs bara svar (ingen motivering). Svaret på c) får endast innehålla heltal, potenser, fakulteter och de fyra enkla räknesätten.

a) Relationen $\mathcal{R}$ på mängden $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ges av

$$\mathcal{R} = \{(1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3), (4, 5), (5, 4)\}.$$

Vilka av egenskaperna reflexiv, symmetrisk, anti-symmetrisk och/eller transitiv har $\mathcal{R}$?

b) Talet 209 är skrivet på decimalform. Skriv talet i bas 4.

c) Hur många injektioner $f : \{2, -1, 0, 3\} \rightarrow \{1, 4, -8, 2, -1, 0, 3\}$ finns det?

d) Bestäm resten 36^{261} vid division med 11.

DEL II

4. (4p) Bestäm högstgradtermen i polynomet $(x^7 + 7x^2)^{10} - (x^5 + 5)^{14}$.
(Högstgradtermen i $-4x^8 + 2x^4 + 5x - 3$ är $-4x^8$.)

5. (4p) Lös olikheten $\sqrt{1-x^2} + |1-2x| \leq 1$.

6. Låt $\mathcal{M}$ vara mängden av alla ord som kan bildas genom att kasta om bokstäverna i ordet RAGGARGRANEN. (Orden AAAEGGGRRRRNN och RAGGGRENARNA ligger i $\mathcal{M}$, men inte RAGGRENARNA).

a) (1p) Bestäm $|\mathcal{M}|$.

b) (3p) Hur många av orden i $\mathcal{M}$ uppfyller alla tre villkoren nedan (samtidigt)?

- (1) första bokstaven är inte R,
- (2) andra bokstaven är inte A,
- (3) tredje bokstaven är inte G.

(Svaren får endast innehålla heltal, potenser, faktulteter, binomialtal, Stirlingtal och de fyra enkla räknesätten.)

DEL III

7. (4p) 160 identiska kulor ska fördelas i 3 olika lådor A, B, C så att ingen låda blir tom. På hur många sätt kan detta göras om vi kräver att

- ingen låda får innehålla fler än 60 kulor, och
- A och B får inte innehålla lika många kulor.

(Svaret får endast innehålla heltal, potenser, faktulteter, binomialtal, Stirlingtal och de fyra enkla räknesätten.)

8. (4p) En följd av polynom definieras rekursivt av $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = 1 + x$, $p_2(x) = 1 + x^2$ och

$$p_{n+1}(x) = p_{n-2}(x) \cdot p_n(x) + p_{n-1}(x), \quad \text{för } n \geq 2.$$

Bevisa med induktion eller stark induktion att $\text{sgd}(p_n(x), p_{n+1}(x)) = 1$, d.v.s. att $p_n(x)$ och $p_{n+1}(x)$ inte har några gemensamma delare förutom konstanter för alla $n \geq 0$.

(Kom ihåg att $\text{sgd}(f, g)$ betecknar största gemensamma delaren till f och g .)

9. (4p)

- a) Ge exempel på en injektion $f: \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}$.
- b) Ge exempel på en surjektion $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Motivera noggrant varför funktionerna är surjektioner respektive injektioner.

(Kom ihåg att $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ är potensmängden till $\mathbb{Z}$.)



SF1671 Matematik, baskurs, med diskret matematik
Tentamen, 23 oktober 2024

Skrivtid: 8:00–13:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: David Rydh, 08-790 7179

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. Bonuspoängen läggs till poängen på del I. Det går dock inte att få mer än 12 poäng på del I. Betygsgränserna vid tentamen kommer preliminärt att ges av följande tabell.

Betyg	Fx	E	D	C	B	A
Total poäng	15	16	18	21	24	27
varav från del III	–	–	–	–	3	6

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar som inte är standard i kursen definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I

1. (a) Bestäm inversen till 659 i $\mathbb{Z}_{2024}$. (2 p)
(b) Skriv $2024 = (2024)_{10}$ i basen 8. (2 p)

2. Bestäm alla x för vilka olikheten

$$\ln(x+1) + \ln 3 \leq \ln(3-x) + \ln(x+2)$$

är uppfylld. (4 p)

3. På denna uppgift krävs bara svar (ingen motivering).

- (a) Hur många sexbokstavsord kan man skriva med bokstäverna PAPAYA? (1 p)
(Svara med ett heltal.)
- (b) Du kastar en röd och en blå sexsidig tärning och får r och b . Vad är sannolikheten att $r+b$ är udda om du vet att rb är jämn? (1 p)
- (c) Relationen $\mathcal{R}$ på $\mathbb{Z}_5$ definieras av att $x \mathcal{R} y$ om $x-y=0$ eller $x-y=1$. Vilka av egenskaperna: reflexiv, symmetrisk, antisymmetrisk och transitiv har $\mathcal{R}$? (1 p)
- (d) Bestäm antalet element i mängden $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) \setminus (\mathcal{P}(\{1, 2\}) \cup \mathcal{P}(\{1, 3\}))$. (1 p)
(Svara med ett heltal.)

DEL II

4. Låt f_n vara det n te Fibonaccitalet, dvs, $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ och $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ för alla $n \geq 2$. Visa att

$$f_0^2 + f_1^2 + \cdots + f_n^2 = f_n f_{n+1}. \quad (4 \text{ p})$$

för alla heltal $n \geq 0$.

5. 100 identiska kulor ska fördelas på 5 numrerade lådor så att varje låda har minst 10 kulor och max 40 kulor. På hur många sätt kan detta göras? **(4 p)**
(Svaret får innehålla heltal, potenser, faktulteter, binomialtal, Stirlingtal och de fyra räknesätten.)

6. Lös olikheten

$$2x^3 + 17x \geq 11x^2 + 6. \quad (4 \text{ p})$$

DEL III

7. Bestäm alla lösningar till ekvationen $\cos(\arcsin x) = \tan(\arcsin x)$. **(4 p)**

8. Bestäm alla naturliga tal n så att $10 \mid 3^n + 4^n + 5^n$. **(4 p)**

9. Bestäm antalet funktioner $f: \{1, 2, \dots, 10\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 7\}$ som är surjektiva och som uppfyller $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 3$. **(4 p)**
(Svaret får innehålla heltal, potenser, faktulteter, binomialtal, Stirlingtal och de fyra räknesätten.)



SF1671 Matematik, baskurs, med diskret matematik
Tentamen, 18 december 2024

Skrivtid: 8:00–13:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: David Rydh, 08-790 7179

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. Bonuspoängen läggs till poängen på del I. Det går dock inte att få mer än 12 poäng på del I. Betygsgränserna vid tentamen kommer preliminärt att ges av följande tabell.

Betyg	Fx	E	D	C	B	A
Total poäng	15	16	18	21	24	27
varav från del III	–	–	–	–	3	6

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar som inte är standard i kursen definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I

1. Lös ekvationen

$$\cos(4x) = 2 \sin(2x) - \frac{1}{2} \quad (4 \text{ p})$$

2. Bestäm alla lösningar till ekvationen $105x = 6$ i $\mathbb{Z}_{342}$. (4 p)

3. På denna uppgift krävs bara svar (ingen motivering).

- (a) Gäller $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ för alla mängder A, B, C ? (1 p)
- (b) Beräkna 2^{100} i $\mathbb{Z}_{17}$. (1 p)
- (c) Skriv upp sanningstabellen för $p \vee q \rightarrow \neg q$. (1 p)
- (d) Bestäm antalet injektiva funktioner $\{a, b, c\} \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 10\}$. (1 p)

Var god vänd!

DEL II

4. Talföljden $\{a_n\}_{n \geq 0}$ definieras genom rekursionen

$$a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} + 8, \quad n \geq 2$$

där $a_0 = 0$ och $a_1 = 4$. Visa med hjälp av induktion att

$$a_n = 2(3^n - 1)$$

gäller för alla $n \geq 0$.

(4 p)

5. En grupp med 6 (särskiljbara) vuxna och 5 (särskiljbara) barn ska bilda 3 (onummerade) lag med minst 1 vuxen och 1 barn i varje lag. På hur många sätt kan de göra det? För full poäng ska svaret ges som ett heltal.

(4 p)

6. Låt $f(x) = 2x^4 + 6x^2 + 4$ och $g(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$.

(a) Använd Euklides algoritm för att bestämma den största gemensamma delaren till $f(x)$ och $g(x)$.

(2 p)

(b) Bestäm för vilka $x \in \mathbb{R}$ som $f(x) \geq g(x)$.

(2 p)

DEL III

7. Låt $f(x) = e^x - e^{-x}$.

(a) Visa att f är injektiv.

(1 p)

(b) Bestäm en invers till f .

(3 p)

8. Låt $X = \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\})$ vara potensmängden av $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Inför följande relation $\sim$ på X : om $A, B \in X$ så är $A \sim B$ om minsta gemensamma multipeln av alla elementen i A är lika med minsta gemensamma multipeln av alla elementen i B . (Tomma mängden har minsta gemensamma multipeln 1.)

(a) Visa att $\sim$ är en ekvivalensrelation.

(1 p)

(b) Bestäm antalet ekvivalensklasser.

(3 p)

9. Fem (särskiljbara) barn ska dela på 18 (identiska) kakor. De ska få minst 2 kakor var och ingen får ta fler än 4 kakor. Det kan bli kakor över. På hur många sätt kan kakorna fördelas? För full poäng ska svaret ges som ett heltal.

(4 p)