

Lösingsförslag till demotentamen
SF1671 Baskurs med Diskret matematik, 2015-10-15 version 1.2

DEL I

1. På denna uppgift skall svaren vara heltal.

a) (2p) Beräkna inversen till 17 i $\mathbb{Z}_{39}$.

b) (1p) Beräkna $\binom{7}{3,1,3}$.

c) (1p) Beräkna $S(6,2)$.

Lösning: a) Vi vill lösa $17x + 39y = 1$. Vi använder Euklides algoritim:

$$39 = 2 \cdot 17 + 5$$

$$17 = 3 \cdot 5 + 2$$

$$5 = 2 \cdot 2 + 1$$

och så baklänges

$$1 = 5 - 2 \cdot 2 = 5 - 2(17 - 3 \cdot 5) = -2 \cdot 17 + 7 \cdot 5 = -2 \cdot 17 + 7(39 - 2 \cdot 17) = 7 \cdot 39 - 16 \cdot 17$$

Alltså är $17 \cdot (-16) \equiv_{39} 1$ och då också $17 \cdot 23 \equiv_{39} 1$

Svar: Inversen är 23.

$$b) \binom{7}{3,1,3} = \frac{7!}{3!1!3!} = 7 \cdot 5 \cdot 4 = 140.$$

c) Antingen använder man rekursionen $S(n,k) = S(n-1,k-1) + k \cdot S(n-1,k)$ flera ggr tillsammans med $S(n,1) = S(n,n) = 1$. Vi får

$$S(3,2) = S(2,1) + 2S(2,2) = 3$$

$$S(4,2) = S(3,1) + 2S(3,2) = 7$$

$$S(5,2) = S(4,1) + 2S(4,2) = 15$$

$$S(6,2) = S(5,1) + 2S(5,2) = 31$$

Eller så resonerar man att $S(6,2)$ räknar antalet sätt att dela upp 6 element i två icke-tomma block. Detta kan man räkna ut genom att först välja en delmängd (som inte får vara tom eller hela mängden), det kan göras $2^6 - 2 = 62$ sätt. Sedan dividera med två eftersom blocken inte är numrerade.

Svar: $S(6,2) = 31$.

2. (4p) Lös ekvationen $\cos(2x) = 3\cos x - 2$.

Lösning: Skriver om mha formeln för dubbla vinkeln:

$$2\cos^2 x - 1 = 3\cos x - 2 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0.$$

Detta är en andragradsekvation för $\cos x$. Vi får lösningar $\cos x = 1$ och $\cos x = 1/2$.

Vidare, $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, och

$$\cos x = 1/2 \Leftrightarrow x = \pm\pi/3 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Svar: Lösningar är $x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, och $x = \pm\pi/3 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

3. Låt $\mathcal{R}$ vara relationen på $\mathbb{Z}$ där $a \mathcal{R} b$ om $a - b$ är ett icke-negativt jämnt tal.

a) (3p) Visa att $\mathcal{R}$ är en partialordning på $\mathbb{Z}$.

b) (1p) Rita Hassediagrammet för relationen $\mathcal{R}$ begränsat till mängden $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

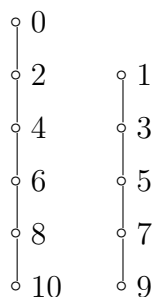
Lösning: a)

Reflexiv: Ja, ty $a \mathcal{R} a$ eftersom $a - a = 0$ som är ett icke-negativt jämnt heltal.

Antisymmetrisk: Ja, ty $a \mathcal{R} b$ medför $a - b \geq 0$ och $b \mathcal{R} a$ medför $b - a \geq 0$. Alltså måste $a = b$.

Transitiv: Ja, ty om $a \mathcal{R} b$ och $b \mathcal{R} c$ så är $b - c = 2s$ och $a - b = 2r$ för några $r, s \in \mathbb{N}$ vilket ger att $a - c = a - b + b - c = 2(r + s)$ och eftersom $r + s \in \mathbb{N}$ så är $a \mathcal{R} c$.

b)



DEL II

4. (4p) På hur många sätt kan man fördela 16 kanelbullar (identiska) och 16 chokladmuffins (identiska) till 5 flickor (särskiljbara) och 5 pojkar (särskiljbara) om varje flicka måste få minst en kanelbulle och varje pojke minst en muffins? (Svaret skall skrivas som potenser, faktulteter, produkter, summor, skillnader och/eller kvoter mellan hela tal.)

Lösning: Först ger vi en bulle till varje pojke och en muffins till varje flicka. Vi kan sen fördela de 11 bullar som är kvar hur vi vill till de 10 personerna. Det är oordnat val med repetition tillåten, bullarna "väljer" vilken person de skall hamna hos. Antalet är $\binom{10+11-1}{9}$ (tänk att 9 skiljeväggar skall placeras ut tillsammans med de 11 bullarna). Antalet sätt att fördela de 11 muffinsen är lika många. Då vi inte får använda binomialkoefficienten i svaret så skriver vi om med $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Svar: $\left(\frac{20!}{9!11!}\right)^2$

5. (4p) Talföljden $\{a_n\}_{n \geq 0}$ definieras genom rekursjonen

$$a_{n+1} = 4a_n + 5a_{n-1},$$

där $a_0 = 1$ och $a_1 = 17$.

Visa att $a_n = 3 \cdot 5^n - 2 \cdot (-1)^n$ för alla $n \geq 0$.

Lösning: Vi använder induktion över n .

Bassteg: För $n = 0$ ger formeln $3 \cdot 5^0 - 2 \cdot (-1)^0 = 1$, och för $n = 1$ ger formeln $3 \cdot 5^1 - 2 \cdot (-1)^1 = 17$, vilket stämmer med startvärdena.

Induktionssteg: Antag att formeln $a_n = 3 \cdot 5^n - 2 \cdot (-1)^n$ stämmer för $n \leq k$, för något fixt $k \geq 1$.

Vi får att

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 4a_k + 5a_{k-1} = [\text{induktionsantagandet}] \\ &= 4(3 \cdot 5^k - 2 \cdot (-1)^k) + 5(3 \cdot 5^{k-1} - 2 \cdot (-1)^{k-1}) \\ &= (4 \cdot 3 + 3)5^k + (-8 + 10)(-1)^k \\ &= 15 \cdot 5^k + 2(-1)^k \\ &= 3 \cdot 5^{k+1} - 2(-1)^{k+1} \end{aligned}$$

Så formeln stämmer då också för $k + 1$ och enligt induktionsprincipen stämmer den för alla $n \geq 0$. $\square$

6. (4p) Summan av de två första termerna i en geometrisk talföljd är 10, och summan av de tre första termerna är 19. Bestäm talföljden (eller talföljderna om det kan finnas flera).

Lösning: Låt a beteckna första termen i talföljden, och k beteckna kvoten. De två talen tillsammans definierar talföljden, och det är dem vi ska bestämma.

Vi vet att $a + ak = 10$, och $a + ak + ak^2 = 19$. Sätter detta i ett system:

$$\begin{cases} a + ak = 10 \\ a + ak + ak^2 = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(k+1) = 10 \\ ak^2 = 9. \end{cases}$$

Detta ger: $a = 9/k^2$ (ok ty $k \neq 0$) och $\frac{k+1}{k^2} = \frac{10}{9} \Leftrightarrow 10k^2 = 9(k+1) \Leftrightarrow 10k^2 - 9k - 9 = 0$. Denna andragradsekvation har lösningarna $k = 3/2$ och $k = -3/5$.

För $k = 3/2$ blir $a = 9/k^2 = 4$. Följden blir: 4, 6, 9, ...

För $k = -3/5$ blir $a = 9/k^2 = 25$. Följden blir: 25, -15, 9, ...

Båda är alltså lösningar.

Svar: Två följderna: $k = 3/2$, $a = 4$, samt $k = -3/5$, $a = 25$.

DEL III

7. (4p) Lös ekvationen $(\sin(\arctan x))^{-2} - (\tan(\arcsin x))^{-2} = 4x$.

Lösning: Först förenklar vi vänsterledet. Låt $\arctan x = \alpha$. Då $\tan \alpha = x$, $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$. Antag först att $\alpha \in (0, \pi/2)$. Då har vi $x = \tan \alpha > 0$. Rita en rät triangel med en av vinklarna α och $\tan \alpha = x$ (t.ex. med kateterna x och 1). Hypotenusen är då $\sqrt{1+x^2}$. Från denna ser vi att $\sin(\arctan x) = \sin(\alpha) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Antag nu att $x < 0$. Då är $(-x) > 0$, och formeln ovan gäller för $(-x)$. Vi använder att både $\sin(x)$ och $\arctan(x)$ är udda funktioner.

$$\sin(\arctan(x)) = \sin(-(\arctan(-x))) = -\sin(\arctan(-x)) = -\frac{(-x)}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

alltså gäller formeln för $x < 0$ också. Vi måste bortakta $x = 0$ separat. För $x = 0$ har vi division med 0 i den ursprungliga ekvationen, så det är ingen rot.

På liknande sätt (jag hoppar här över detaljerna) får man att $(\tan(\arcsin x)) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ för $x \neq 0$.

Sätter in i ekvationen: $\frac{1+x^2}{x^2} - \frac{1-x^2}{x^2} = 4x$.

Svar: $x = 1/2$.

8. (4p) De sju syskonen kanin skall dela på ett antal morötter.

Då rotsakerna fördelats på sju lika högar är 3 stycken över. Dem äter storasyster kanin upp och somnar sedan.

Sex vakna kaniner delar rötterna från de sju högarna i sex lika högar. Storebror äter upp de 3 som nu blev över – och somnar.

Fem vakna kaniner delar de sex högarna i fem lika högar, det blir 2 över.

Hur många var det från början, om det var färre än 300 stycken?

Lösning: Låt antalet morötter vara x .

Vid delning på 7 lika högar blev 3 över, så $x \equiv_7 3$.

Då alla utom de 3 delas på 6 lika högar blir åter 3 över, så $x - 3 \equiv_6 3$, dvs $x \equiv_6 6 \equiv_6 0$.

Då alla utom de totalt 6 uppatna delas på 5 lika högar blir 2 över, så $x - 6 \equiv_5 2$, dvs $x \equiv_5 8 \equiv_5 3$.

Eftersom 5, 6, 7 är relativt prima och $5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$, bestämmer dessa villkor x entydigt modulo 210 enligt Kinesiska restsatsen.

$13 \cdot 7 + (-3) \cdot 30 = 1$, så $-90 \equiv_5 0, \equiv_6 0, \equiv_7 1$ och

$17 \cdot 5 + (-2) \cdot 42 = 1$, så $-84 \equiv_5 1, \equiv_6 0, \equiv_7 0$.

(Fås med prövning eller med Euklides algoritm.) Eftersom $x \equiv_6 0$ så behöver vi inte räkna ut M_2 (med beteckning som i extramaterialet om Kinesiska restsatsen).

Således är $x \equiv_{210} 3 \cdot (-90) + 3 \cdot (-84) = -522 \equiv_{210} 108$.

Det enda positiva $x < 300$ som uppfyller detta är 108.

Svar: Det fanns 108 morötter.

9. (4p) Avgör om funktionen $f(x) = e^{2\sqrt{x+1}} + e^{\sqrt{x+1}} - 1$ definierad på $x \geq -1$ är inverterbar (det vill säga att det finns en invers definierad på värdemängden för f). Om så är fallet, bestäm dess invers.

Lösning: Ja, funktionen är inverterbar. Ett sätt att se det är att observera att funktionen $g(x) = \sqrt{x+1}$ är strängt växande (på $x \geq -1$), exponentialfunktionen är strängt växande; komposition och summa av strängt växande funktioner är strängt växande, alltså är funktionen $f(x)$ strängt växande, och därför inverterbar.

Observera att då f är växande så är lägsta möjliga värde för $f(x)$ är $f(-1) = 1$ så värdemängden är $[1, \infty]$. Därför skall $f^{-1}(x)$ vara definierad för $x \geq 1$. För att hitta invers

låt $y = f(x)$. Om vi betecknar $z := e^{\sqrt{x+1}}$ (observera att $z \geq 0$), får vi ekvationen för att uttrycka z i termer av y :

$$z^2 + z - 1 = y \Leftrightarrow z^2 + z - (1 + y) = 0 \Leftrightarrow z = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{5/4 + y}.$$

Vi behöver $z \geq 0$ och det är bara $z = -\frac{1}{2} + \sqrt{5/4 + y}$ som är positiv. Vi löser ut z ur $z = e^{\sqrt{x+1}}$:

$$\sqrt{x+1} = \ln\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{5/4 + y}\right) \Leftrightarrow x = -1 + \left(\ln\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{5/4 + y}\right)\right)^2.$$

Eftersom $f^{-1}(x)$ skall vara definierad för $x \geq 1$ och $\ln(-\frac{1}{2} + \sqrt{5/4 + x}) \geq 0$ då $x \geq 1$ så gäller ekvivalensen i sista steget ovan.

Svar: $f^{-1}(x) = -1 + (\ln(-\frac{1}{2} + \sqrt{5/4 + x}))^2$.

Lösingsförslag till tentamen 2015-10-23
SF1671 Baskurs med Diskret matematik

DEL I

1. a) (2p) Beräkna principalresten då 7^{2015} divideras med 5.
b) (2p) Skriv 2015 i bas 3. (Talet 2015 antas här vara skrivet i bas tio.)

Lösning: a) Först noterar vi att $7 \equiv_5 2$ och $2^4 = 16 \equiv_5 1$. (Det senare hittar man genom att prova några värden för några 2-potenser) Sedan noterar vi att $2015 = 503 \cdot 4 + 3$. Tillsammans ger detta

$$7^{2015} \equiv_5 2^{2015} = 2^{503 \cdot 4 + 3} \equiv_5 1^{503} \cdot 2^3 = 8 \equiv_5 3.$$

Svar: Resten blir 3.

- b) Vi utför succesiva divisioner med basen 3:

$$2015 = 671 \cdot 3 + 2$$

$$671 = 223 \cdot 3 + 2$$

$$223 = 74 \cdot 3 + 1$$

$$74 = 24 \cdot 3 + 2$$

$$24 = 8 \cdot 3 + 0$$

$$8 = 2 \cdot 3 + 2$$

$$2 = 0 \cdot 3 + 2$$

Siffrorna i talbas 3 blir principalresterna vid dessa divisioner i omvänd ordning.

Svar: $(2015)_{10} = (2202122)_3$.

2. (4p) Lös ekvationen $\ln \frac{x}{2} + \ln(x-3) = \ln(x-2)$.

Lösning: De tre logaritmerna i ekvationen är definierade för $x > 0$, $x > 3$ och $x > 2$. Alltså är ekvationen definierad för $x > 3$. Vi får

$$\ln \frac{x}{2} + \ln(x-3) = \ln(x-2)$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{2} \cdot (x-3)\right) = \ln(x-2)$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} \cdot (x-3) = x-2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0.$$

Den andragradaren har lösningar $x = 1$ och $x = 4$. Vår ursprungsekvation är inte definierad för $x = 1$ så det är en falsk rot. Vi stoppar in $x = 4$ och ser att det är en korrekt lösning.

Svar: $x = 4$

3. a) (2p) Är $(A \cup B) \cap C^c = (B \cap (A \cup C)) \setminus (B \cap C)$ sann för alla mängder A, B, C ?
 b) (1p) Vad betyder det att en relation $\mathcal{R}$ på en mängd A är antisymmetrisk?
 c) (1p) Vad betyder det att en funktion $f : X \rightarrow Y$ är surjektiv?

Lösning: a) Ett element x som ligger i $A \cap B^c \cap C^c$ ligger i både $(A \cup B)$ och i C^c så det tillhör snittet i vänsterledet.

Men $x \notin B$ så $x \notin B \cap (A \cup C)$ och x tillhör då inte mängden i högerledet. Man kan alternativt göra ett resonemang med Venndiagram för att visa att de inte är lika.

Svar: Nej, den är inte sann.

b) Relationen $\mathcal{R}$ på en mängd A är antisymmetrisk om för alla $a, b \in A$,
 $a \mathcal{R} b$ och $b \mathcal{R} a$ medför att $a = b$.

c) Funktionen $f : X \rightarrow Y$ är surjektiv om det för alla $y \in Y$ finns $x \in X$ så att $f(x) = y$.

DEL II

4. (4p) Talföljden $\{a_n\}_{n \geq 0}$ definieras genom rekursionen

$$a_{n+1} = a_n + 6a_{n-1},$$

där $a_0 = 3$ och $a_1 = 4$.

Visa att $a_n = 2 \cdot 3^n + (-2)^n$ för alla $n \geq 0$.

Lösning: Vi använder induktion över n .

Bassteg: För $n = 0$ ger formeln $2 \cdot 3^0 + (-2)^0 = 3$, och för $n = 1$ ger formeln $2 \cdot 3^1 + (-2)^1 = 4$, vilket stämmer med startvärdena.

Induktionssteg: Antag att formeln $a_n = 2 \cdot 3^n + (-2)^n$ stämmer för alla $n, 0 \leq n \leq k$, för något fixt $k \geq 1$.

Vi får att

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + 6a_{k-1} = [\text{induktionsantagandet}] \\ &= 2 \cdot 3^k + (-2)^k + 6(2 \cdot 3^{k-1} + (-2)^{k-1}) \\ &= (2 + 4)3^k + (1 - 3)(-2)^k \\ &= 2 \cdot 3^{k+1} + (-2)^{k+1} \end{aligned}$$

Formeln är alltså korrekt också för $k + 1$ och enligt induktionsprincipen stämmer den för alla $n \geq 0$. $\square$

5. (4p) En klass med 5 pojkar och 5 flickor skall utse en kommitté (storleken på kommittén är inte bestämd) och gör det med likformig sannolikhet över alla möjliga val. (Det är samma som att singla slant för varje person separat om hen skall ingå i kommittén eller inte.) Vad är sannolikheten att kommittén får minst 3 pojkar och högst 1 flicka.

Lösning: Alla möjliga utfall är alla val av delmängder av de 10 personerna, dvs 2^{10} . De utfall som ger en kommitté med minst tre pojkar bland pojkarna är enligt additionsprincipen utfallen med 3, 4 eller 5 pojkar dvs $\binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5}$. Antalet utfall bland flickorna med högst en

flicka är på samma sätt summan av fallen med ingen eller en flicka: $\binom{5}{0} + \binom{5}{1}$. Dessa händelser är oberoende av varandra och enligt multiplikationsprincipen blir alla utfall med både minst tre pojkar och högst en flicka $((\binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5})((\binom{5}{0} + \binom{5}{1})) = 16 \cdot 6$.

Den likformiga sannolikheten är då

$$\frac{16 \cdot 6}{2^{10}} = \frac{3}{32}.$$

Svar: Den sökta sannolikheten är $\frac{3}{32}$.

6. Låt $m(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x + 12$ och $n(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 9$.

a) (2p) Bestäm $\text{sgd}(m(x), n(x))$, största gemensamma delaren till $m(x)$ och $n(x)$.

b) (2p) Bestäm för vilka värden på x som $m(x) < n(x)$.

Lösning: a) Vi använder Euklides algoritm

$$2x^3 + 4x^2 - 2x + 12 = 2 \cdot (x^3 + 3x^2 + 3x + 9) + (-2x^2 - 8x - 6)$$

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 9 = (-\frac{x}{2} + \frac{1}{2})(-2x^2 - 8x - 6) + 4x + 12$$

$$-2x^2 - 8x - 6 = (-\frac{x}{2} - \frac{1}{2})(4x + 12)$$

Största gemensamm delaren fås av den sista icke-försvinnande resten justerad så att den ledande termen har koefficient 1. Här blir det $(4x + 12)/4 = x + 3$.

Svar: $\text{sgd}(m(x), n(x)) = x + 3$

b) Först faktorerar vi båda polynomen $m(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x + 12 = (x + 3)(2x^2 - 2x + 4)$ och $n(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 9 = (x + 3)(x^2 + 3)$. Vi får

$$(x + 3)(2x^2 - 2x + 4) < (x + 3)(x^2 + 3)$$

$$\Leftrightarrow (x + 3)(2x^2 - 2x + 4 - x^2 - 3) < 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 3)(x^2 - 2x + 1) < 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 3)(x - 1)^2 < 0$$

Då $(x - 1)^2$ alltid är icke-negativt så måste $(x + 3)$ vara negativt och $(x - 1)^2$ positivt för att olikheten skall vara sann. Detta händer precis då $x < -3$.

Svar: $m(x) < n(x)$ om och endast om $x < -3$.

DEL III

7. (4p) Skriv $\cos(2 \arcsin x)$ som ett polynom i x . För vilka x gäller ditt uttryck?

Lösning: Formeln för dubbla vinkeln ger $\cos(2 \arcsin x) = 1 - 2(\sin(\arcsin x))^2 = 1 - 2x^2$. Funktionen $\arcsin x$ är definierat för $-1 \leq x \leq 1$ och identiteten $\sin(\arcsin x) = x$ är sann i hela intervallet.

Svar: $1 - 2x^2$ och det gäller för $-1 \leq x \leq 1$.

8. (4p) Professor Kalkyl skall göra en lappskrivning med 5 uppgifter. Uppgift nummer i skall ge $p_i \in \mathbb{Z}$ poäng. Summan av poängen skall vara 14 och varje uppgift skall ge minst 1 poäng och högst 4 poäng. På hur många sätt kan hon fördela poängen på uppgifterna?

Lösning: Uppgiften är ekvivalent med att bestämma antalet heltalslösningar till $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 14$ med $1 \leq p_i \leq 4$ för alla i . Låt $r_i = p_i - 1$ för $1 \leq i \leq 5$. Problemet omformuleras nu till att räkna antalet heltalslösningar till

$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 = 9$ med $0 \leq r_i \leq 3$. Utan den övre gränsen hade det varit ordnat val med repetition (val av r_i 9 ggr), $\binom{9+5-1}{5-1}$. Nu använder vi inklusion-exklusion. Låt A_j vara mängden av lösningar till $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 = 9$ med $0 \leq r_i$ för alla i och $4 \leq r_j$. Låt $s_j = r_j + 4$ och byt ut r_j mot s_j i ekvationen. Då får vi åter ordnat val med repetition tillåten och $|A_j| = \binom{5+5-1}{5-1} = \binom{9}{4}$.

På samma sätt får man att $|A_j \cap A_k| = \binom{1+5-1}{5-1} = 5$ för alla $1 \leq j < k \leq 5$. Snittet av 3 eller flera av mängderna är tomt, ty då är vänsterledet minst 12.

Inklusion-exklusion ger nu att antalet heltalslösningar till ekvationen med alla $r_i \leq 3$ blir $\binom{13}{4} - \binom{5}{1}\binom{9}{4} + \binom{5}{2}\binom{5}{1} = 715 - 630 + 50 = 135$.

Svar: Hon kan göra på 135 sätt.

9. (4p) Använd binomialsatsen för att visa att, för $n \geq 0$, gäller

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (2+x)^k = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k.$$

Lösning:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (2+x)^k &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (2x + x^2)^k = [\text{binomialsatsen}] \\ &= (1 + 2x + x^2)^n = (1+x)^{2n} = [\text{binomialsatsen}] \\ &= \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k. \end{aligned}$$

Lösingsförslag till tentamen 2016-01-07
SF1671 Baskurs med Diskret matematik

DEL I

1. (4p) Finn alla $x \in \mathbb{Z}$ sådana att $77x \equiv 3 \pmod{258}$.

Lösning: Vi använder Euklides algoritm.

$$258 = 3 \cdot 77 + 27$$

$$77 = 2 \cdot 27 + 23$$

$$27 = 1 \cdot 23 + 4$$

$$23 = 5 \cdot 4 + 3$$

$$4 = 1 \cdot 3 + 1$$

$$3 = 3 \cdot 1$$

Så $\text{sgd}(258, 77) = 1$ och Euklides algoritm baklänges ger

$$1 = 4 - 3 = 4 - (23 - 5 \cdot 4) = -23 + 6 \cdot 4 =$$

$$= -23 + 6(27 - 1 \cdot 23) = 6 \cdot 27 - 7 \cdot 23 =$$

$$= 6 \cdot 27 - 7 \cdot (77 - 2 \cdot 27) = -7 \cdot 77 + 20 \cdot 27 =$$

$$= -7 \cdot 77 + 20 \cdot (258 - 3 \cdot 77) = 20 \cdot 258 - 67 \cdot 77.$$

Alltså är $60 \cdot 258 - 201 \cdot 77 = 3$ och $-201 \equiv 57 \pmod{258}$ är lösningar. Eftersom $\text{sgd}(258, 77) = 1$ så ges alla lösningar av $x = 57 + 258k$, för $k \in \mathbb{Z}$.

Svar: $x = 57 + 258k$, för $k \in \mathbb{Z}$.

2. (4p) Låt $p(x) = 2x^3 + 5x^2 - 28x - 15$. Minst ett av talen $-3, -2, -1, 1, 2, 3$ är en rot till $p(x)$. För vilka värden på x gäller $p(x) > 0$?

Lösning: $p(3) = 0$ så vi kan faktorisera $p(x) = (x - 3)(2x^2 + 11x + 5)$, och det kvadratiska polynomet faktorerar vi och får $p(x) = (x - 3)(2x + 1)(x + 5)$. Vi gör en teckenanalys och får att $p(x) > 0$ om och endast om ingen av faktorerna är noll och exakt en eller tre är positiva, dvs $p(x) > 0$ om $-5 < x < -1/2$ eller $3 < x$.

Svar: $p(x) > 0$ då $-5 < x < -1/2$ eller $3 < x$

3. (4p) Följande 4 påståenden är antingen sanna eller falska. Svara SANT eller FALSKT eller inte alls på varje deluppgift. Rätt svar på en deluppgift ger 1 poäng, fel svar -1 poäng och inget svar 0 poäng. Du behöver inte motivera dina svar på denna uppgift.

a) För alla $k, n \geq 1$ gäller $n^{\ln k} = k^{\ln n}$.

b) Om $f(x) = 3x^2 + 1$ är definierad på $\mathbb{R}_+$ så tillhör 2 definitionsmängden för f^{-1} .

c) För alla $-1/2 \leq x \leq 1/2$ gäller $\arcsin(\sin(x)) = x$.

d) Antalet sätt att lägga 7 olika bollar i 4 identiska lådor är $S(7, 4)$.

Svar: a) Sant (ta logaritmen på båda sidor), b) Sant, c) Sant, d) Falskt (Stirlingtalen räknar placeringar sådana att varje låda har minsta en boll).

DEL II

4. (4p) Antag att $\cos \alpha = -3/4$ och $-\pi < \alpha \leq 0$. Beräkna exakt värde av $\cot \alpha + \sin \alpha$.

Glöm inte att förenkla så långt som möjligt.

Lösning: Då $\cos \alpha < 0$ så måste $-\pi < \alpha < -\pi/2$ och foljdaktligen är $\sin \alpha = -\sqrt{1 - (-3/4)^2} = -\sqrt{7/16} = -\sqrt{7}/4$ och $\cot \alpha = \frac{-3/4}{-\sqrt{7}/16} = \frac{3}{\sqrt{7}}$. Vi får

$$\cot \alpha + \sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{7}} - \sqrt{7}/4 = \frac{12 - 7}{4\sqrt{7}} = \frac{5}{4\sqrt{7}}.$$

5. (4p) 42 (identiska) kakor skall fördelas bland 9 (särskiljbara) barn. På hur många sätt kan det ske om minst ett barn skall få ett udda antal kakor?
Svaret får innehålla heltal, faktulteter, potenser och de fyra räknesätten.

Lösning: Alla sätt att fördela 42 kakor till 9 barn är (val med upprepning tillåten, vi väljer ett barn 42 ggr) $\binom{42+9-1}{42}$. Från detta skall vi dra bort de fall då inget barn får udda antal kakor, dvs alla barn får jämnt antal kakor. Detta kan vi lösa genom att lägga kakorna i par och sedan fördeka de 21 paren med kakor till de 9 barnen dvs $\binom{21+9-1}{21}$. Vi får

$$\binom{50}{42} - \binom{29}{21} = \frac{50!}{42!8!} - \frac{29!}{21!8!}.$$

Svar: Antalet sätt är $\frac{50!}{42!8!} - \frac{29!}{21!8!}$.

6. (4p) Bestäm x så att

$$\left(\frac{3}{2} + \sum_{i=1}^x 3^i \right)^2 = \frac{15^{15} \cdot (1+5)^4 \cdot 4^2 \cdot 3^3}{10^{10} \cdot 5^5}.$$

Lösning: Högerledet förkortas lätt till $\frac{15^{15} \cdot (6)^4 \cdot 4^2 \cdot 3^3}{10^{10} \cdot 5^5} = \frac{3^{22}}{2^2}$.

Då båda sidor i $\frac{3}{2} + \sum_{i=1}^x 3^i = \frac{3^{11}}{2}$ är positiva är det ett ekvivalent problem. Nu använder vi formeln för geometrisk summa $\sum_{i=0}^x 3^i = \frac{3^{x+1}-1}{3-1}$ och får $\frac{3}{2} + \frac{3^{x+1}-1}{3-1} - 1 = \frac{3^{11}}{2}$. Enkla beräkningar ger att den enda lösningen är $x = 10$.

Svar: $x = 10$ är enda lösningen.

DEL III

7. (4p) Bestäm högstagrader termen i $(x^4 - 4x)^9 - (x^3 - 3)^{12}$.

Lösning: Nedan låter jag punkterna $\dots$ beteckna termer med lägre grad än 30.

$$(x^4 - 4x)^9 - (x^3 - 3)^{12} = \\ x^{4 \cdot 9} + \binom{9}{1} x^{4 \cdot 8} (-4x)^1 + \binom{9}{2} x^{4 \cdot 7} (-4x)^2 + \dots - \left(x^{3 \cdot 12} + \binom{12}{1} x^{3 \cdot 11} (-3)^1 + \binom{12}{2} x^{3 \cdot 10} (-3)^2 + \dots \right) = \\ 36 \cdot 16x^{30} - 66 \cdot 9x^{30} + \dots = -18x^{30} + \dots$$

Svar: Högstgradstermen är $-18x^{30}$.

8. (4p) På en kurs gör de 5 studenterna dels en lappskrivning och dels en inlämningsuppgift som skall rättas. Läraren delar helt slumpmässigt (likformigt) ut både lappskrivningarna och inlämningsuppgifterna till eleverna för rättning, så att varje student får en lappskrivning och en inlämningsuppgift att rätta. Vad är sannolikheten att ingen student rättar något av sina egna alster (dvs varken lappskrivning eller inlämningsuppgift)?

Lösning: Vi tänker först på lappskrivningarna. Det finns totalt $5! = 120$ sätt att dela ut dem. Antalet sätt där minst i studenter får sin egen lappskrivning är $\binom{5}{i} \cdot (5-i)! = \frac{5!}{i!}$ sätt.

Inklusion-exklusion ger nu att antalet sätt så att ingen får sin egen lappskrivning blir

$$5! - \frac{5!}{1!} + \frac{5!}{2!} - \frac{5!}{3!} + \frac{5!}{4!} - \frac{5!}{5!} = 44$$

Sannolikheten att ingen får sin egen lappskrivning blir $44/120 = 11/30$. På samma sätt blir sannolikheten att ingen får sin egen inlämningsuppgift $11/30$. Att ingen får sin egen lappskrivning och att ingen får sin egen inlämningsuppgift att rätta är två oberoende händelser så multiplikationsprincipen ger $(11/30)^2$.

Svar: Sannolikheten är $(11/30)^2$.

9. (4p) Låt funktionen $f(n) : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Z}$ vara definierad på de positiva heltalen genom rekursionen

$$f(n) = 4f(n-1) - 2f(n-2), n \geq 3,$$

och startvärden $f(1) = 1, f(2) = 2$. Visa att f är injektiv.

Lösning: Om vi kan visa att f är strikt växande så följer att den är injektiv. Vi gör ett induktionsbevis över $n \geq 2$ av påståendet

$$P(n) : f(n) > 0 \text{ och } f(n) - f(n-1) > 0$$

Basfall: $n = 2, f(2) = 2 > 0$ och $f(2) - f(1) = 1 > 0$ ok

Induktionssteg: Antag att $P(n-1)$ är sann.

Vi har att $f(n) = 4f(n-1) - 2f(n-2) = 2f(n-1) + 2(f(n-1) - f(n-2)) > 0 + 0$ enligt induktionsantagandet.

Vi har också att $f(n) - f(n-1) = f(n-1) + 2(f(n-1) - f(n-2)) > 0 + 0$ enligt induktionsantagandet. Alltså följer att påståendet är sant för n givet att det är sant för $n-1$.

Enligt induktionsprincipen så är påståendet sant för alla $n \geq 2$. Speciellt är $f(n) - f(n-1) > 0$, dvs f är strikt växande vilket medför att f är injektiv.

Lösingsförslag till tentamen 2016-10-21
SF1671 Baskurs med Diskret matematik

DEL I

1. (4p) Bestäm alla heltal x, y sådana att $69x + 51y = 12$.

Lösning: Vi använder Euklides algoritm.

$$69 = 1 \cdot 51 + 18$$

$$51 = 2 \cdot 18 + 15$$

$$18 = 1 \cdot 15 + 3$$

$$15 = 5 \cdot 3$$

Så $\text{sgd}(69, 51) = 3$ och Euklides algoritm baklänges ger

$$\begin{aligned} 3 &= (18 - 15) = 18 - (51 - 2 \cdot 18) = \\ &= -1 \cdot 51 + 3 \cdot 18 = -1 \cdot 51 + 3(69 - 51) = \\ &= 3 \cdot 69 - 4 \cdot 51. \end{aligned}$$

Vi får $12 = 12 \cdot 69 - 16 \cdot 51$ och en lösning är alltså $x = 12, y = -16$. Vi beräknar $\text{mgm}(69, 51) = 69 \cdot 51 / 3 = 3 \cdot 23 \cdot 17$. Den allmänna lösningen till den diofantiska ekvationen får vi genom att förlänga med $\text{mgm}(69, 51)k - \text{mgm}(69, 51)k$ och bryta ut motsvarande termer.

Vi får för varje heltal k , $12 = 12 \cdot 69 - 16 \cdot 51 + \text{mgm}(69, 51)k - \text{mgm}(69, 51)k = (12 + 17k)69 + (-16 - 23k)51$. Enligt sats i boken (se övning 3.18) är detta samtliga lösningar till ekvationen.

Svar: Lösningarna är $x = 12 + 17k, y = -16 - 23k$, för $k \in \mathbb{Z}$.

2. (4p) Lös olikheten $|x - 4| \leq 4 \cdot |x + 5|$.

Lösning: Vi delar in i fall beroende på om det som står innanför absoluttecknen är positivt eller negativt.

Fall I: $x \geq 4$

Olikheten blir då $x - 4 \leq 4(x + 5)$, vilket efter korta räkningar är samma som $x \geq -8$, vilket uppfylls av alla x i intervallet.

Fall II: $4 > x \geq -5$

Olikheten blir då $-(x - 4) \leq 4(x + 5)$, vilket efter korta räkningar är samma som $x \geq -16/5$. Detta ger att olikheten är sann endast för $4 > x \geq -16/5$ i intervallet.

Fall III: $-5 > x$

Olikheten blir då $-(x - 4) \leq -4(x + 5)$, vilket efter korta räkningar är samma som $x \leq -8$.

Svar: Olikheten är sann för $x \leq -8$ och för $x \geq -16/5$.

3. På denna uppgift krävs bara svar (ingen motivering).

a) (1p) Vad är $\log_2(6) + \log_2(\frac{1}{3})$?

1

b) (1p) Skriv upp rekursionen för Stirlingtal av andra slaget $S(m, n)$.

$$S(m+1, n) = S(m, n-1) + n \cdot S(m, n) \text{ för } m \geq n \geq 1$$

c) (1p) Vad betyder det att en relation $\mathcal{R}$ på en mängd A är transitiv?

$$\forall a, b, c \in A \text{ gäller } a\mathcal{R}b, b\mathcal{R}c \implies a\mathcal{R}c.$$

d) (1p) Vad betyder det att en funktion $f: X \rightarrow Y$ är injektiv?

$$\forall a, b \in X, f(a) = f(b) \implies a = b$$

DEL II

4. (4p) Talföljden $\{a_n\}_{n \geq 0}$ definieras genom rekursionen

$$a_{n+1} = 7a_n - 10a_{n-1},$$

där $a_0 = 4$ och $a_1 = 17$.

Visa att $a_n = 3 \cdot 5^n + 2^n$ för alla $n \geq 0$.

Lösning: Vi gör ett induktionsbevis över n .

Bassteg: För $n = 0$ har vi $a_0 = 4$ och $3 \cdot 5^0 + 2^0 = 4$ samt $a_1 = 17$ och $3 \cdot 5^1 + 2^1 = 17$. Påståendet är sant för $n = 0, 1$.

Induktionssteg: Antag för ett specifikt $k \geq 1$ att påståendet är sant för alla värden på n , $0 \leq n \leq k$. Vi skall visa det för $n = k+1$.

$$\begin{aligned} \text{Vi får } a_{k+1} &= 7a_k - 10a_{k-1} = [\text{Induktionsantagandet}] = 7(3 \cdot 5^k + 2^k) - 10(3 \cdot 5^{k-1} + 2^{k-1}) = \\ &= (7 \cdot 3 \cdot 5 - 10 \cdot 3)5^{k-1} + (7 \cdot 2 - 10)2^{k-1} = 75 \cdot 5^{k-1} + 4 \cdot 2^{k-1} = 3 \cdot 5^{k+1} + 2^{k+1}. \end{aligned}$$

Enligt induktionsaxiomet är påståendet sant för alla heltal $n \geq 0$.

5. (4p) För vilka reella tal c gäller att ekvationen $x^2 + c \cdot x - 2c^2 = 0$ har $x = 1$ som en rot? Räkna ut den andra roten för varje möjligt värde på c .

Lösning: För att $x = 1$ skall vara en lösning så måste $1^2 + c \cdot 1 - 2c^2 = 0$. Vi skriver om till det ekvivalenta uttrycket $c^2 - \frac{1}{2}c - \frac{1}{2} = 0$ som har lösningarna $c = -\frac{1}{2}$ och $c = 1$.

$$\text{För } c = -\frac{1}{2} \text{ får vi } 0 = x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = (x-1)(x+\frac{1}{2}).$$

$$\text{För } c = 1 \text{ får vi } 0 = x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2).$$

Svar: Det finns två möjliga fall då $x = 1$ är en rot. Antingen $c = -\frac{1}{2}$ då är den andra roten $x = -\frac{1}{2}$, eller $c = 1$ då den andra roten är $x = -2$.

6. (4p) Hur många 5-bokstavsord kan man skriva med bokstäverna A A A B C C C C?

Lösning: Vi delar in i fall efter om bokstaven B används eller inte. Om B används så finns det $\binom{5}{1}$ sätt att placera B. På de övriga fyra positionerna skall det stå ett ord från bokstäverna A A A C C C C. Det kan vara med 0,1,2 eller 3 A, så det finns $\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3}$ att placera ut An. Totalt $5(1 + 4 + 6 + 4) = 75$ ord.

Om B inte används kan det vara 1,2 eller 3 An med. Dessa kan placeras ut på $\binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} = 25$ sätt.

De båda fallen är disjunkta och täcker alla möjligheter. Tillsammans $75 + 25 = 100$ ord.

Svar: 100 ord.

DEL III

7. (4p) Ge ett exakt uttryck (utan trigonometriska funktioner) för

$$\cos\left(2\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Lösning: Låt oss kalla $\alpha = \arctan\frac{1}{\sqrt{2}}$, då är $0 < \alpha < \pi/2$ så vi kan rita en figur med en rätvinklig triangel där kateten närmast α har längd $\sqrt{2}$ och den andra kateten längd 1. Hypotenusan har då längd $\sqrt{3}$ och definitionen av cosinus ger att $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Formeln för dubbla vinkeln ger

$$\cos\left(2\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\cos^2\left(\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 1 = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1 = \frac{1}{3}.$$

Svar: $\frac{1}{3}$

8. (4p) Låt a_n vara antalet ord av längd n som kan skrivas från alfabetet $\{A, B, C\}$ där upprepning är tillåten, men bokstaven B får aldrig komma direkt till höger om bokstaven A. Exempelvis är $a_1 = 3$ och $a_2 = 8$. Bestäm tal $r, s \in \mathbb{Z}$ så att, för $n \geq 2$,

$$a_{n+1} = r \cdot a_n + s \cdot a_{n-1}.$$

Lösning: Om vi tänker att vi har ett godkänt ord w av längd n (finns a_n möjligheter) och lägger till en av de tre bokstäverna efter så får vi ett ord av längd $n+1$. Detta ord kan dock bryta mot regeln att AB inte får förekomma ifall w slutar på A och vi har lagt till ett B. Dessa otillåtna fall motsvarar att vi har ett godkänt ord för de första $n-1$ bokstäverna och sedan har lagt till AB på slutet. Dessa otillåtna fall är alltså a_{n-1} till antalet. Vi får därför rekursionen

$$a_{n+1} = 3 \cdot a_n - a_{n-1},$$

dvs $r = 3, s = -1$.

9. (4p) Visa att för varje irrationellt tal $x \in \mathbb{R}$ och varje positivt heltal n , så finns det ett rationellt tal $\frac{p}{q}$, med $1 \leq q \leq n$ sådant att $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{nq}$. (Tips: använd postfacksprincipen)

Lösning: Multiplicera olikheten med q så får vi $|qx - p| < \frac{1}{n}$. För varje heltal j , $1 \leq j \leq n+1$ skriver vi nu $jx = h_j + d_j$ där h_j är heltalsdelen av jx och $0 < d_j < 1$ är decimaldelen. Notera att eftersom x är irrationellt så är även jx och alltså även d_j det. Vi tänker nu på $d_1, \dots, d_{n+1}$ som "breven" och intervallen $(0, 1/n), (1/n, 2/n), (2/n, 3/n), \dots, (1 - 1/n, 1)$ som "postfacken". Det måste enligt postfacksprincipen då finnas minst två tal $i < j$ så att d_i och d_j ligger i samma intervall, vilket medför att $-1/n < d_j - d_i < 1/n$. Vi får då, $(j-i)x = h_j - h_i + (d_j - d_i)$. Vi kan nu ta $q = j-i$ och $p = h_j - h_i$. Då är $0 < q \leq n$ och $qx - p = d_j - d_i$ så olikheten är uppfylld. Påståendet är därmed bevisat.

Lösingsförslag till tentamen 2016-12-20
SF1671 Baskurs med Diskret matematik

DEL I

1. På dessa uppgifter skall svaret vara ett heltal.

a) (2p) Beräkna inversen till 19 i $\mathbb{Z}_{43}$.

b) (1p) Beräkna $\binom{8}{3,2,3}$.

c) (1p) Hur många ord av längd 3 kan man skriva med bokstäverna A B C D E F G?
(Varje bokstav får bara användas en gång.)

$$7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$$

Lösning: a) Vi vill hitta ett tal x så att $19x \equiv_{43} 1$, dvs $19x + 43y = 1$ för något heltal y . Vi använder Euklides algoritm.

$$43 = 2 \cdot 19 + 5$$

$$19 = 3 \cdot 5 + 4$$

$$5 = 1 \cdot 4 + 1$$

$$4 = 4 \cdot 1$$

Så $\text{sgd}(43, 19) = 1$, vilket innebär att det finns en invers och Euklides algoritm baklänges ger

$$1 = (5 - 4) = 5 - (19 - 3 \cdot 5) =$$

$$= -1 \cdot 19 + 4 \cdot 5 = -1 \cdot 19 + 4(43 - 2 \cdot 19) =$$

$$= 4 \cdot 43 - 9 \cdot 19.$$

Vi får att inversen till 19 är $-9 \equiv_{43} 34$.

Svar: 34

b) $\frac{8!}{3!2!3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{6 \cdot 2} = 560$.

Svar: 560

c) Det finns 7 möjliga val för första positionen och oavsett vilken bokstav vi valt till första positionen så finns det 6 möjliga val till andra positionen och oavsett vilka vi valt på de första två positionerna finns det 5 val på tredje positionen. Multiplikationsprincipen ger $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$.

Svar: 210

2. (4p) För vilka $x \in \mathbb{R}$ gäller olikheten

$$\ln(x-2) + \ln(x+3) \leq \ln x \quad ?$$

Lösning: Först noterar vi att olikheten är definierad bara för $x > 2$. Sen använder vi en logaritmlag och skriver om till det ekvivalenta

$$\ln(x^2 + x - 6) \leq \ln x$$

Eftersom $\ln$ är en strikt växande funktion är det ekvivalen med att $x^2 + x - 6 \leq x$. Detta löser man sedan enkelt till $x^2 \leq 6$, dvs $-\sqrt{6} \leq x \leq \sqrt{6}$. Tillsammans med villkoret ovan får vi $2 < x \leq \sqrt{6}$.

Svar: Olikheten är sann för $2 < x \leq \sqrt{6}$.

3. På denna uppgift krävs bara svar (ingen motivering).

- a) (1p) Vad menas med att $p \in \mathbb{Z}$ är ett primtal?
Att $p \geq 2$ och saknar positiva heltalsdelare förutom 1 och p själv.
- b) (1p) Formulera binomialsatsen.
För heltal $n \geq 0$ gäller $(x + y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$.
- c) (1p) Vad betyder det att en relation $\mathcal{R}$ på en mängd A är reflexiv?
 $\forall a \in A$ gäller $a\mathcal{R}a$.
- d) (1p) Hur många lösningar x finns det till ekvationen $x = \arcsin 0,3$?
1

DEL II

4. Bestäm det minsta positiva $x \in \mathbb{Z}$ så att

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{5} \\ x \equiv 3 \pmod{7} \\ x \equiv 5 \pmod{11} \end{cases}$$

Lösning: Med beteckningar som i extrahäftet om Kinesiska restsatsen får vi $M_1 = 77$, $M_2 = 55$, $M_3 = 35$. Sen löser vi $b_i M_i \equiv 1 \pmod{m_i}$ och får $b_1 = 3$, $b_2 = 6$, $b_3 = 6$. Värdena är så små att man kan se de lösningarna direkt eller testa sig fram till dem. Sen sätter vi

$$x = 1 \cdot 3 \cdot 77 + 3 \cdot 6 \cdot 55 + 5 \cdot 6 \cdot 35 = 2271.$$

Enligt Kinesiska restsatsen är detta den unika lösningen modulo $5 \cdot 7 \cdot 11 = 385$. Vi beräknar slutligen $2271 \equiv 346 \pmod{385}$ vilket blir den lägsta positiva lösningen.

Svar: 346

5. (4p) Fem pojkar och fem flickor skall delas in i tre grupper så att det är minst en flicka och minst en pojke i varje grupp. Hur många sätt finns det att göra det? För full poäng skall svaret ges som ett heltal.

Lösning: Först delar vi in de fem flickorna i tre icke-tomma grupper. Det kan göras på $S(5, 3)$ sätt, där $S()$ är Stirlingtalet av andra slaget. Även pojkarna kan delas in i tre icke-tomma grupper på $S(5, 3)$ sätt. Sen skall vi para ihop de tre pojkgrupperna med de tre flickgrupperna, vilket kan göras på $3!$ sätt. Multiplikationsprincipen ger att totala antalet möjliga gruppindelningen är

$$S(5, 3)^2 3!.$$

$S(5, 3)$ räknas lättast ut rekursivt med rekursionen för Stirlingtal. $S(5, 3) = S(4, 2) + 3S(4, 3) = S(3, 1) + 2S(3, 2) + 3(S(3, 2) + 3S(3, 3)) = 1 + 5 \cdot 3 + 9 \cdot 1 = 25$. Där vi använde

att $S(n, 1) = S(n, n) = 1$ och att $S(3, 2) = 3$ vilket ses genom att pröva de få fallen eller använda rekursionen en gång till.

Vi får därför att

$$S(5, 3)^2 3! = 25^2 \cdot 6 = 3750$$

Svar: Gruppindelningen kan göras på 3750 sätt med de givna förutsättningarna.

6. Låt $m(x) = 2x^3 - 6x^2 + 2x + 4$ och $n(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 4$.

- a) (2p) Använd Euklides algoritm för att bestämma $\text{sgd}(m(x), n(x))$, största gemensamma delaren till $m(x)$ och $n(x)$.
- b) (2p) Bestäm för vilka värden på x som $m(x) < n(x)$.

Lösning: a) Vi använder Euklides algoritm

$$2x^3 - 6x^2 + 2x + 4 = 2 \cdot (x^3 - 4x^2 + 6x - 4) + 2x^2 - 10x + 12$$

$$x^3 - 4x^2 + 6x - 4 = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right)(2x^2 - 10x + 12) + 5x - 10$$

$$2x^2 - 10x + 12 = \left(\frac{2}{5}x - \frac{6}{5}\right)(5x - 10)$$

Största gemensamm delaren fås av den sista icke-försvinnande resten justerad så att den ledande termen har koefficient 1. Här blir det $(5x - 10)/5 = x - 2$.

Svar: $\text{sgd}(m(x), n(x)) = x - 2$

b) Först faktorerar vi båda polynomen $m(x) = 2x^3 - 6x^2 + 2x + 4 = (x - 2)(2x^2 - 2x - 2)$ och $n(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 4 = (x - 2)(x^2 - 2x + 2)$. Vi får

$$\begin{aligned} & (x - 2)(2x^2 - 2x - 2) < (x - 2)(x^2 - 2x + 2) \\ \Leftrightarrow & (x - 2)(2x^2 - 2x - 2 - x^2 + 2x - 2) < 0 \\ & \Leftrightarrow (x - 2)(x^2 - 4) < 0 \\ \Leftrightarrow & (x - 2)(x - 2)(x + 2) < 0 \\ & \Leftrightarrow (x - 2)^2(x + 2) < 0 \end{aligned}$$

Då $(x - 2)^2$ alltid är icke-negativt så måste $(x + 2)$ vara negativt och $(x - 2)^2$ positivt för att olikheten skall vara sann. Detta händer precis då $x < -2$.

Svar: $m(x) < n(x)$ om och endast om $x < -2$.

DEL III

7. a) (2p) Funktionen $f(x) = \ln(x + 1) \cdot \ln(x^2 + 2x + 1) + 2$ är definierad för $x \in \mathbb{R}, x > -1$.

Är f injektiv?

b) (2p) Låt $g(x) = \cos 2x + \sin x$. Kan $g(x)$ anta värdet 2?

Lösning: a) Vi skriver om $f(x) = \ln(x+1) \cdot \ln((x+1)^2) + 2 = \ln(x+1) \cdot 2\ln(x+1) + 2 = 2(\ln(x+1))^2 + 2$. Notera att $\ln(x+1)$ är negativt för $0 > x > -1$ och kan anta alla negativa värden i det intervallet. Så för en givet reellt tal $a > 0$ finns en lösning till $\ln(x+1) = -a$, nämligen $x_1 = e^{-a} - 1$, och en lösning till $\ln(x+1) = a$, nämligen $x_2 = e^a - 1$. Men då är $f(x_1) = f(x_2) = 2a^2 + 2$. Alltså är funktionen $f(x)$ inte injektiv.

Svar: Nej.

b) Eftersom både $\cos$ och $\sin$ har 1 som största möjliga värde så är $g(x) = 2$ bara om $\cos 2x = 1$ och $\sin x = 1$ för samma värde på x . Men $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ något $k \in \mathbb{Z}$. Då sätter vi in det i det andra villkoret och får

$\cos 2(\frac{\pi}{2} + k2\pi) = \cos(\pi + k4\pi) = \cos \pi = -1$. Alltså kan $g(x)$ inte anta värdet 2.

Svar: Nej.

8. (4p) Definiera det harmoniska talet $H_m = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m}$, för $m \in \mathbb{Z}_+$. Visa med induktion att för $n \in \mathbb{Z}_+$ gäller

$$H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}.$$

Lösning:

Bassteg: Först kontrollerar vi basfallet $n = 1$.

$VL_1 = H_2 = 1 + \frac{1}{2} = VL_1$ så det stämmer.

Induktionssteg: Antag nu att påståendet är sant för ett visst värde $n = k$, dvs $H_{2^k} \geq 1 + \frac{k}{2}$. Vi skall då härleda påståendet för $n = k + 1$.

$$VL_{k+1} = H_{2^{k+1}} = \sum_{i=0}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{i+1} = \sum_{i=0}^{2^k-1} \frac{1}{i+1} + \sum_{i=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{i+1} = H_{2^k} + \sum_{i=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{i+1} \geq$$

$$[induktionsantagandet] \geq 1 + \frac{k}{2} + \sum_{i=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{i+1}.$$

Nu använder vi att $\frac{1}{i} \geq \frac{1}{2^{k+1}}$ för alla $i \leq 2^{k+1}$. Det ger att

$$\sum_{i=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{i+1} \geq \sum_{i=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{2^{k+1}} = 2^k \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Tillsammans blir det } VL_{k+1} \geq 1 + \frac{k}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{k+1}{2} = HL_{k+1}.$$

Enligt induktionsprincipen är påståendet sant för alla heltal $n \geq 1$.

9. (4p) Bestäm antalet heltalslösningar till $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 22$, där $1 \leq x_i \leq 8$ för alla $1 \leq i \leq 4$.

Lösning: Låt $r_i = x_i - 1$ för $1 \leq i \leq 4$. Problemet omformuleras nu till att räkna antalet heltalslösningar till

$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 18$ med $0 \leq r_i \leq 7$. Utan den övre gränsen hade det varit ordnat val med repetition (val av r_i 18 ggr), $\binom{18+4-1}{4-1} = \binom{21}{3}$. Nu använder vi inklusion-exklusion. Låt A_j vara mängden av lösningar till $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 18$ med $0 \leq r_i$ för alla i och $8 \leq r_j$. Låt $s_j = r_j + 8$ och byt ut r_j mot s_j i ekvationen. Då får vi åter ordnat val med repetition tillåten och $|A_j| = \binom{10+4-1}{4-1} = \binom{13}{3}$.

På samma sätt får man att $|A_j \cap A_k| = \binom{2+4-1}{4-1} = 10$ för alla $1 \leq j < k \leq 4$. Snittet av 3 eller flera av mängderna är tomt, ty om 3 av $r_i \geq 8$ blir vänsterledet minst 24.

Inklusion-exklusion ger nu att antalet heltalslösningar till ekvationen med alla $r_i \leq 7$ blir $\binom{21}{3} - \binom{4}{1}\binom{13}{3} + \binom{4}{2}\binom{5}{3} = 1330 - 1144 + 60 = 246$.

Svar: Det finns 246 lösningar.

Lösingsförslag till tentamen 2017-10-20

DEL I

1. På följande tal skall svaret vara ett heltal.

- a) (2p) Hur många surjektiva funktioner $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ finns det?
b) (2p) Skriv 2017 i bas 5. (Talet 2017 antas här vara skrivet i bas tio.)

Lösning: a) Antalet surjektiva funktioner är $3!S(5, 3)$. Sen måste man räkna ut $S(5, 3) = 25$, det kan man göra enklast med hjälp av rekursionen för Stirlingtal. Svar 150.

b) Vi gör successiva divisioner.

$$2017 = 5 \cdot 403 + 2$$

$$403 = 5 \cdot 80 + 3$$

$$80 = 5 \cdot 16 + 0$$

$$16 = 5 \cdot 3 + 1$$

$$5 = 5 \cdot 0 + 5$$

Vi kan nu avläsa svaret i resterna.

$$\text{Svar: } (2017)_{10} = (31032)_5$$

2. (4p) Lös

$$\frac{\ln(5x^2 - 5x - 1)}{\ln(2x - 1)} = 2.$$

Lösning: Först noterar vi att ekvationen är definierad bara om $5x^2 - 5x + 1 > 0$, $2x - 1 > 0$ och $\ln(2x - 1) \neq 0$, det sista är samma som att $x \neq 1$.

$$\begin{aligned} \frac{\ln(5x^2 - 5x - 1)}{\ln(2x - 1)} &= 2 \\ \iff \ln(5x^2 - 5x - 1) &= 2 \ln(2x - 1) \end{aligned}$$

Sen räknar vi $2 \ln(2x - 1) = \ln(2x - 1)^2 = \ln(4x^2 - 4x + 1)$ och kommer ihåg att kvadreringen kan ge falska rötter. Då $\ln$ är en injektiv funktion på hela sin definitionsmängd får vi

$$\begin{aligned} \ln(5x^2 - 5x - 1) &= \ln(4x^2 - 4x + 1) \\ \iff 5x^2 - 5x - 1 &= 4x^2 - 4x + 1 \\ \iff 0 &= x^2 - x - 2. \end{aligned}$$

Den har två rötter $x = -1, 2$. Vi jämför med de villkor vi noterade i början och ser att $x = -1$ är en falsk rot, men $x = 2$ uppfyller villkoren.

$$\text{Svar: } x = 2$$

3. På denna uppgift krävs bara svar (ingen motivering).

a) (1p) Skriv upp sanningstabellen för $q \vee p \rightarrow p \wedge \neg q$.

	p	q	$q \vee p$	$p \wedge \neg q$	$q \vee p \rightarrow p \wedge \neg q$
	0	0	0	0	1
Svar:	0	1	1	0	0
	1	0	1	1	1
	1	1	1	0	0

b) (1p) Vad betyder det att en relation $\mathcal{R}$ på en mängd A är reflexiv?

Svar: Att $x\mathcal{R}x$ gäller för alla $x \in A$.

c) (1p) Du kastar en röd och en blå tärning och får r och b . Vad är sannolikheten att $r \equiv_3 0$ om du vet att $r + b \equiv_3 0$?

Svar: $1/3$ (Antingen observerar man att betingningen inte spelar någon roll så $r \equiv_3 0$ och $r + b \equiv_3 0$ är oberoende händelser. Eller så listar man alla händelse i båda fallen och får 4 i första och 12 i andra fallet.)

d) (1p) Skriv upp De Morgans lagar i mängdlära.

Svar: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ och $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

DEL II

4. (4p) Teknologen Tove skall göra 9 tentauppgifter, en i taget. På tentan har hon med sig 5 (likadana) chokladbitar som hon skall äta innan vissa tentauppgifter för att få energi i tänkandet. Hon äter upp en hel chokladbit åt gången, men inte mer än en mellan två tentauppgifter. På hur många sätt kan hon ordna tentauppgifterna och chokladätandet om hon inte vill sluta med en chokladbit?

(Svaret får innehålla heltal, potenser, faktorer och de fyra enkla räknesätten.)

Exempel: Beteckna tentauppgifterna med 1 till 9 och chokladbitarna med c.

Då är 5 c 4 7 1 c 2 c 8 3 c 6 c 9 och c 3 9 7 4 c 5 c 1 c 2 6 c 8 möjliga ordningar.

Lösning: Bestäm först ordningen för de nio tentatalen. Det kan göras på $9!$ sätt. Sedan skall chokladbitarna stoppas in i mellanrummen mellan tentauppgifterna. Även första platsen är tillåten, så det finns nio möjliga platser för chokladen. Vi kan välja 5 av dem utan repetition på $\binom{9}{5}$ sätt. Detta ger alla möjligheter.

Svar: $\binom{9}{5} = \frac{9! \cdot 9!}{4! \cdot 5!}$.

5. (4p) Låt $f(x) = ax + b$, $g(x) = x^2 - 1$. Bestäm alla $a, b \in \mathbb{R}$ sådana att

$$f \circ g(x) = g \circ f(x), \text{ för alla } x \in \mathbb{R}.$$

Lösning: $f \circ g(x) = ax^2 - a + b$ och $g \circ f(x) = (ax + b)^2 - 1$. Om vi sätter dem lika får vi $ax^2 - a + b = a^2x^2 + 2abx + b^2 - 1$ vilket är ekvivalent med $(a^2 - a)x^2 + 2abx + b^2 - 1 + a - b = 0$. Skall det vara sant för alla $x \in \mathbb{R}$ så måste alla koefficienterna vara 0. Först ser vi att $a^2 - a = 0$ har lösningarna $a = 0$ och $a = 1$. Sen använder vi $2ab = 0$ som ger de två möjligheterna

$a = 1, b = 0$ och $a = 0$ utan krav på b . Slutligen skall de också uppfylla $b^2 - 1 + a - b = 0$. Den första lösningen gör det. För den andra får vi $b^2 - b - 1 = 0$, dvs $b = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Svar: Det finns tre möjliga par av värden $a = 1, b = 0$; $a = 0, b = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ och $a = 0, b = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$

6. Beräkna $17^{17^{17^{17}}} \pmod{19}$.

Lösning: Enligt Fermats lilla sats så är $17^{18} \equiv 1 \pmod{19}$ eftersom 19 är ett primtal som inte delar 17. Vi vill därför räkna ut $17^{17^{17}} \pmod{18}$. Vi får $17^{17^{17}} \equiv_{18} (-1)^{17^{17}} = -1 \equiv_{18} 17$, då 17 är ett udda tal. Så $17^{17^{17}} = 18n + 17$ för något $n \in \mathbb{Z}$. Därmed blir $17^{17^{17^{17}}} = 17^{18n+17} \equiv_{19} 17^{17} \equiv_{19} (-2)^{17} = 16^4 \cdot (-2) \equiv_{19} (-3)^4 \cdot (-2) = 81 \cdot -2 \equiv_{19} 5 \cdot -2 = -10 \equiv_{19} 9$.

Svar: 9

DEL III

7. (4p) I en aritmetisk summa är fjärde, elfte och sista talet $-1, \frac{19}{2}$, respektive 41. Bestäm antalet termer och summans värde.

Lösning: Ansätt termerna $a_1, \dots, a_n$ i den aritmetiska summan till $a_k = b + kd$ där d är den konstanta skillnaden. Vi får då $b + 4d = -1, b + 11d = \frac{19}{2}$ vilket har lösningen $b = -7, d = \frac{3}{2}$. Den sista termen blir då $41 = -7 + n\frac{3}{2}$, vilket ger $n = 32$ som är antalet termer. Summan blir

$$\sum_{k=1}^{32} -7 + \frac{3}{2}k = \frac{-\frac{11}{2} + 41}{2} 32 = 568.$$

Svar: Den aritmetiska summan har 32 termer och summerar till 568.

8. (4p) Definiera följderna av polynom $p_n(x)$ rekursivt genom $p_0(x) = 1, p_1(x) = x$ och

$$p_{n+1}(x) = x \cdot p_n(x) + p_{n-1}(x), \text{ för } n \geq 1.$$

Visa med induktion att $\text{sgd}(p_n(x), p_{n-1}(x)) = 1$ för alla $n \geq 1$.

Lösning: Vi visar påståendet med induktion över n .

Basfall: $n = 1$, $\text{sgd}(x, 1) = 1$, ok.

Induktionssteg: Antag att påståendet är sant för ett visst n , säg $n = k$, dvs $\text{sgd}(p_k(x), p_{k-1}(x)) = 1$.

Nu använder vi att om $q(x)$ är en delare till $p_n(x)$ och $p_{n+1}(x)$ så är det också en delare till $p_{n+1}(x) - xp_n(x)$ eftersom det är en linjärkombination, dvs om $p_n(x) = q(x)a(x), p_{n+1}(x) = q(x)b(x)$ så följer att $p_{n+1}(x) - xp_n(x) = q(x)(b(x) - xa(x))$. Omvänt om $q(x)$ är en delare till $p_n(x)$ och $p_{n+1}(x) - xp_n(x)$ så är det också en delare till $p_{n+1}(x)$. Därför blir $\text{sgd}(p_{n+1}(x), p_n(x)) = \text{sgd}(p_{n+1}(x) - xp_n(x), p_n(x)) = \text{sgd}(p_{n-1}(x), p_n(x))$ som enligt induktionsantagandet är 1.

Enligt induktionsprincipen är påståendet därför sant för alla värden på n .

9. (4p) Hur många permutationer av 1 2 3 4 5 6 finns det om vi förbjuder tre på varandra följande siffror att vara i växande ordning?

Exempel: 3 5 1 4 2 6 är tillåtet, men 5 1 4 6 2 3 är förbjudet på grund av att 1 4 6 är växande. (Tips: Låt A_i vara mängden av permutationer som är förbjudna för att siffrorna på positionerna $i, i+1, i+2$ är i växande ordning. Börja med att räkna ut $|A_i|$ och använd det i inklusion-exklusion.)

Lösning: För $1 \leq i \leq 4$, är $|A_i| = \binom{6}{3} \cdot 3!$ eftersom man kan först välja de tre tal som skall stå på platserna $i, i+1, i+2$. De måste skrivas i växande ordning och sedan kan de resterande 3 talen skrivas in på 3! sätt. För $1 \leq i \leq 3$, är $|A_i \cap A_{i+1}| = \binom{6}{4} \cdot 2!$ eftersom du skall välja 4 tal som skall stå i växande ordning på platserna $i, i+1, i+2, i+3$. På liknande sätt fås $|A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_4| = \binom{6}{5} \cdot 1!$ och $|A_1 \cap A_4| = \binom{6}{3} \cdot 1$.

Sen tar vi mängderna tre i taget och får $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3 \cap A_4| = \binom{6}{5} \cdot 1!$, medans $|A_1 \cap A_2 \cap A_4| = |A_1 \cap A_3 \cap A_4| = |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 1$ för det är bara 1 2 3 4 5 6 som finns i alla de mängderna. Med inklusion-exklusion får vi nu att antalet permutationer som inte har någon förbjuden växande svit, dvs inte ligger i någon mängd A_i blir

$$6! - 4 \cdot \binom{6}{3} \cdot 3! + (3 \cdot \binom{6}{4} \cdot 2! + 2 \cdot \binom{6}{5} + \binom{6}{3}) - (2 \cdot \binom{6}{5} + 2 \cdot 1) + 1 = 720 - 480 + (90 + 12 + 20) - 14 + 1 = 349$$

Svar: 349

Lösingsförslag till tentamen 2017-12-19

DEL I

1. Beräkna följande (med motivering som vanligt).

- a) (2p) Bestäm inversen till 53 i $\mathbb{Z}_{2017}$.
- b) (1p) Hur många sätt finns det att ge 5 (olika) julklappar till 3 barn?
- c) (1p) Hur många ord av längd 8 kan man skriva med bokstäverna G O T T G O T T?

Lösning: a) Vi skall bestämma $0 \leq x \leq 2016$ så att $53x + 2017y = 1$ för något heltal y .
Först Euklides algoritmen

$$2017 = 38 \cdot 53 + 3$$

$$53 = 17 \cdot 3 + 2$$

$3 = 1 \cdot 2 + 1$. Så det finns en entydig lösning. Euklides baklänges ger:

$$1 = 3 - 1 \cdot 2 = 3 - (53 - 17 \cdot 3) = -53 + 18 \cdot 3 = 53 + 18(2017 - 38 \cdot 53) = 18 \cdot 2017 - 685 \cdot 53.$$
$$-685 \equiv 1332 \pmod{2017}. \text{ Svar: } 1332$$

b) Barnen är olika och julklapparna är olika så för varje julklapp kan vi välja vilket av barnen som skall ha den och de valen är oberoende. Alltså finns det 3^5 sätt.

c) Vi skall använda alla bokstäver en gång vardera, och det vinns fyra T, två G och två O. Antalet ges av multinomialkoefficienten $\binom{8}{4,2,2} = \frac{8!}{4!2!2!} = 2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 420$.

2. (4p) Lös

$$6 \cos^2 x + 7 \sin x - 1 = 0.$$

Lösning: Med trigonometriska ettan får vi $0 = 6 \cos^2 x + 7 \sin x - 1 = 6(1 - \sin^2 x) + 7 \sin x - 1 = -6 \sin^2 x + 7 \sin x + 5$. Vi sätter $t = \sin x$ och får ekvationen $0 = 6t^2 - 7t - 5$ som vi (med någon av flera möjliga metoder) kan faktorisera till $0 = (3t - 5)(2t + 1)$. Av de två lösningar $t = 5/3, -1/2$ är den första inte ett möjligt värde för $\sin x$. Den enda möjligheten är därför $\sin x = -1/2$ som har lösningarna $x = -\pi/6 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ och $x = -5\pi/6 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Svar: $x = -\pi/6 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ och $x = -5\pi/6 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

3. På denna uppgift krävs bara svar (ingen motivering).

- a) (1p) Sätt $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{1, 3, 5\}$. Ange alla element i $A \times B$.
Svar: $A \times B = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 1), (4, 3), (4, 5)\}$
- b) (1p) Vad betyder det att funktionen $f : A \rightarrow B$ är injektiv?
Svar: Att $\forall x, y \in A, x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$.

c) (1p) Vad betyder det att en relation $\mathcal{R}$ på A är transitiv?

Svar: Att för alla $x, y, z \in A$, $x\mathcal{R}y$ och $y\mathcal{R}z$ medför $x\mathcal{R}z$.

d) (1p) Formulera Fermats lilla sats.

Svar: För varje primtal p gäller $a^p \equiv a \pmod{p}$ för alla $a \in \mathbb{Z}$.

4. (4p) Lös ekvationen

$$\ln(2x+1) + 2\ln(x-1) = \ln(11x-5).$$

Lösning: För att ekvationen skall vara definierad för de tre logaritmerna så måste $x > -1/2$, $x > 1$ respektive $x > 5/11$. Alla tre är uppfyllda om $x > 1$.

Med logaritmlagarna skriver vi om ekvationen till $\ln(2x+1)(x-1)^2 = \ln(11x-5)$, vilket är ekvivalent så länge $x-1 > 0$. Eftersom $\ln$ är strikt växande så är det ekvivalent med

$$(2x+1)(x-1)^2 = (11x-5)$$

$\iff 2x^3 - 3x^2 + 1 = 11x - 5 \iff 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 = 0$. Med satsen om rationella rötter kan vi gissa en av rötterna, t.ex. $x = -2$, och sedan räkna ut de andra två ur den återstående kvadratiske ekvationen $0 = (x+2)(2x^2 - 7x + 3) = (x+2)(2x-1)(x-3)$. Av de tre rötterna till denna ekvation $x = -2, 1/2, 3$ är det bara $x = 3$ som uppfyller $x > 1$ och således inte är en falsk rot.

Svar: $x = 3$.

5. (4p) Bestäm högstgradstermen i $(x^2 - 2)^{18} - (x^3 - 3x)^{12}$.

Lösning: Vi använder binomialsatsen och får

$$(x^2 - 2)^{18} = x^{36} - \binom{18}{1}2x^{34} + \binom{18}{2}2^2x^{32} + \text{termer av lägre grad}$$

$$(x^3 - 3x)^{12} = x^{36} - \binom{12}{1}(3x)x^{33} + \binom{12}{2}(3x)^2x^{30} + \text{termer av lägre grad}$$

$$\text{Så } (x^2 - 2)^{18} - (x^3 - 3x)^{12} = (-18 \cdot 2 + 12 \cdot 3)x^{34} + \left(\frac{18 \cdot 17}{2}4 - \frac{12 \cdot 11}{2}9\right)x^{32} + \text{termer av lägre grad}$$

$$= (612 - 594)x^{32} + \text{termer av lägre grad}.$$

Svar: $18x^{32}$.

6. (4p) Hur många ord av längd 5 kan man bilda med bokstäverna i A A B B B B C C C C C ?

Lösning: Vi delar in i fall efter hur många A som är med i ordet.

Fall med 2 A: De två A:na kan placeras på $\binom{5}{2}$ sätt i ordet och de övriga tre platserna kan ha B eller C oberoende, vilket ger totalt $\binom{5}{2} \cdot 2^3 = 80$ ord.

Fall med 1 A: Det enda A:et kan placeras på $\binom{5}{1}$ sätt i ordet och de övriga fyra platserna kan ha B eller C oberoende av varandra, vilket ger totalt $\binom{5}{1} \cdot 2^4 = 80$ ord.

Fall med inga A: Antalet 5-bokstavsord av B och C är 2^5 , vi måste dock dra bort ordet med 5 B som inte är möjligt, vilket ger totalt $2^5 - 1 = 31$ ord.

Fallen är disjunkta och täcker alla möjligheter så totalt är det $80 + 80 + 31 = 191$ ord.

Svar: 191

Alternativ lösning: Totala antalet ord av längd 5 med 3 möjliga bokstäver är $3^5 = 243$.

Vi måste då räkna bort icke-godkända fall:

5 B, finns ett ord

5 A, finns ett ord

4 A, finns $\binom{5}{4} \cdot 2 = 10$ sådana ord

3 A, finns $\binom{5}{3} \cdot 2^2 = 40$ sådana ord. Antalet godkända ord blir således $243 - 1 - 1 - 10 - 40 = 191$.

DEL III

7. (4p) Funktionen $f(x)$ definieras på följande sätt (x reellt)

$$f(x) = \begin{cases} \ln x, & \text{för } 0 < x < 1 \\ (x-1)^2, & \text{för } 1 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

a) (3p) Bestäm inversen f^{-1} och dess definitionsmängd och värdemängd.

b) (1p) Lös ekvationen $f^{-1}(x) = 4$.

Lösning: a) Inversens värdemängd är funktionens definitionsmängd så $V_{f^{-1}} = (0, 6]$. Inversens definitionsmängd är funktionens värdemängd, dvs $D_{f^{-1}} = (-\infty, 25]$. Inversen får vi för $0 < x < 1$ genom att sätta $y = \ln x$ och lösa ut $x = e^y$. Och för $1 \leq x \leq 6$, sätta $y = (x-1)^2$ vilket ger $x = 1 + \sqrt{y}$. Observera plustecknet framför roten eftersom vi vet att y är positivt. Vi får

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} e^x, & \text{för } x < 0 \\ 1 + \sqrt{x}, & \text{för } 0 \leq x \leq 25. \end{cases}$$

b) $4 = f^{-1}(x) \iff f(4) = x$ och enligt definitionen i uppgiften är $f(4) = (4-1)^2 = 9$.

8. (4p) Visa med induktion att för alla $n \geq 2$ gäller

$$4^n < \frac{(2n)!(n+1)}{n!^2}.$$

Lösning: Induktion även n .

Basfall, $n = 2$: $VL_2 = 16$, $HL_2 = 4!(2+1)/2!^2 = 18$, så ok.

induktionssteget: Antag att påståendet är sant för ett fixt $k \geq 2$, dvs $VL_k < HL_k$. Vi får $VL_{k+1} = 4^{k+1} = 4VL_k < 4HL_k = \frac{4 \cdot (2k)!(k+1)}{k!^2}$, enligt induktionsantagandet.

$$HL_{k+1} = \frac{(2k+2)!(k+2)}{(k+1)!^2} = \frac{(2k+2)(2k+1)(2k)!(k+2)}{k!^2(k+1)^2}.$$

Vi får därför att $VL_{k+1} < HL_{k+1} \iff 4(k+1) < \frac{(2k+2)(2k+1)(k+2)}{(k+1)^2}$

$$\iff 2(k+1) < \frac{(2k+1)(k+2)}{(k+1)} \iff 2(k+1)^2 < (2k+1)(k+2)$$

$\iff 2k^2 + 4k + 2 < 2k^2 + 5k + 2 \iff 0 < k$. Eftersom vi antagit att $k \geq 2$ så följer $VL_{k+1} < HL_{k+1}$ och enligt induktionsprincipen är olikheten sann för alla $n \geq 2$.

9. (4p) Ett palindrom är ett ord som blir likadant om man läser det baklänges. Antag att man väljer en registreringsskylt för en bil (tre bokstäver följt av tre siffror) helt slumpmässigt

likformigt, dvs varje tecken är oberoende av vilka de andra tecknen är. Vad är då sannolikheten att bokstavsföljden är ett palindrom eller sifferföljden är ett palindrom (eller både och)? Vi utgår från ett alfabet med 28 bokstäver. Svara med ett reducerat bråk.

Lösning: Sifferföljden är ett palindrom om den är på formen aba , där a, b är siffror. Det finns 10 val för a och 10 val för b , ty de får vara samma. Sannolikheten att de tre siffrorna utgör ett palindrom är därför $\frac{10 \cdot 10}{10^3} = \frac{1}{10}$. På samma sätt är sannolikheten för att de tre bokstäverna formar ett palindrom $\frac{28 \cdot 28}{28^3} = \frac{1}{28}$. Eftersom det är oberoende händelser så är sannolikheten för att båda är palindrom produkten $\frac{1}{10 \cdot 28}$. Sannolikheten för att sifferföljden eller bokstavsföljden är ett palindrom blir med inklusion-exklusion

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{28} - \frac{1}{10 \cdot 28} = \frac{28 + 10 - 1}{10 \cdot 28} = \frac{37}{280}.$$

Lösingsförslag till tentamen 2018-10-19
SF1671 Baskurs med Diskret matematik version 1.1

DEL I

1. a) (2p) Bestäm inversen till 335 i $\mathbb{Z}_{2018}$.
b) (2p) Skriv 2018 i bas 6 (sex). (Talet 2018 antas här vara skrivet i bas tio.)

Lösning: a) Vi använder Euklides algoritm.

$$2018 = 6 \cdot 335 + 8$$

$$335 = 41 \cdot 8 + 7$$

$$8 = 1 \cdot 7 + 1$$

Så $\text{sgd}(2018, 335) = 1$ och 335 är inverterbart i $\mathbb{Z}_{2018}$. Euklides algoritm baklänges ger
 $1 = 8 - 1 \cdot 7 =$

$$= 8 - (335 - 41 \cdot 8) = -1 \cdot 335 + 42 \cdot 8 =$$

$$= -1 \cdot 335 + 42 \cdot (2018 - 6 \cdot 335) = 42 \cdot 2018 - 253 \cdot 335.$$

Alltså är $42 \cdot 2018 - 253 \cdot 335 = 1$, $-253 \equiv_{2018} 1765$ får vi att $335^{-1} = 1765$ i $\mathbb{Z}_{2018}$.

b)

$$2018 = 6 \cdot 336 + 2$$

$$336 = 6 \cdot 56 + 0$$

$$56 = 6 \cdot 9 + 2$$

$$96 = 6 \cdot 1 + 3$$

$$1 = 6 \cdot 0 + 1$$

Vi kan avläsa från resterna att $(2018)_{\text{tio}} = (13202)_{\text{sex}}$

Svar: a) $335^{-1} = 1765$ i $\mathbb{Z}_{2018}$, b) $(2018)_{\text{tio}} = (13202)_{\text{sex}}$.

2. (4p) Lös ekvationen $\tan(x) + \frac{3}{2} \tan(2x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \cos(2x)$.

Lösning: Vi börjar med att notera att $x \neq \pi/2 + \pi n$ och $x \neq \pi/4 + 2\pi n$ för alla $n \in \mathbb{Z}$ för att de ingående termerna skall vara definierade.

Då $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ för alla $x \neq \pi/2 + \pi n$ och $\tan(2x) = \sin(2x)/\cos(2x)$, så förenklas uttrycket till

$\frac{3}{2} \tan(2x) = \cos(2x) \iff \frac{3}{2} \sin(2x) = \cos^2(2x) = 1 - \sin^2(2x)$. Sätt $y = \sin(2x)$ och konstatera att ekvationen $y^2 + \frac{3}{2}y - 1 = 0$ har lösningarna $y = \frac{1}{2}$ och $y = -2$.

$-2 = \sin(2x)$ saknar lösningar, och $\frac{1}{2} = \sin(2x)$ har lösningarna $2x = \frac{1}{6}\pi + 2\pi n$ och $2x = \frac{5}{6}\pi + 2\pi n$, för alla värden på $n \in \mathbb{Z}$. Alltså är $x = \frac{1}{12}\pi + \pi n$ och $x = \frac{5}{12}\pi + \pi n$ för alla värden på $n \in \mathbb{Z}$ och dessa värden undviker de värden som vi ovan såg att ekvationen inte var definierad för.

Svar: Lösningarna utgörs av $x = \frac{1}{12}\pi + \pi n$ och $x = \frac{5}{12}\pi + \pi n$ för alla värden på $n \in \mathbb{Z}$.

3. På denna uppgift krävs bara svar (ingen motivering).

a) (1p) Vad är $\log_3(\frac{1}{6}) + \log_3(2)$?

b) (1p) Skriv upp sanningstabellen för $p \wedge q \leftrightarrow q \vee r$.

c) (1p) Ge exempel på en udda surjektiv funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ som inte är injektiv.

d) (1p) Bestäm $3! \cdot S(5, 3)$.

Svar: a) -1,

p	q	r	$p \wedge q$	$q \vee r$	$p \wedge q \leftrightarrow q \vee r$
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	0
b) 0	1	1	0	1	0
1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

c) T.ex. $f(x) = x^3 - x$. Inte injektiv ty $f(1) = f(0)$

d) 150

DEL II

4. (4p) Talföljden $\{a_n\}_{n \geq 0}$ definieras genom rekursionen

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} - 2.$$

där $a_0 = 2$, $a_1 = 4$.

Gissa en formel för a_n och visa den med induktion.

Lösning: Vi sätter in några värden och får $a_2 = 6, a_3 = 8, a_4 = 10, a_5 = 12$, och gissar att $a_n = 2n + 2$. Vi gör induktionsbevis över n .

Bassteg: Vi behöver två basfall och testar $a_0 = 2 \cdot 0 + 2$ och $a_1 = 2 \cdot 1 + 2 = 4$, så basfallen uppfyller formeln.

Induktionssteg: Antag att påståendet $a_n = 2n + 2$ är sant för alla värden på n , $0 \leq n \leq k$ för ett visst k . Vi vill visa att påståendet då också är sant för $k + 1$.

$$a_{k+1} = 3a_k - 2a_{k-1} - 2 = [\text{induktionsantagandet}] = 3(2k + 2) - 2(2(k - 1) + 2) - 2 = (6 - 4)k + 6 - 4 + 4 - 2 = 2(k + 1) + 2. \text{ Vilket är påståendet för } k + 1.$$

Enligt induktionsprincipen är $a_n = 2n + 2$ därför sant för alla $n \geq 0$.

5. Vi har de reella funktionerna $g(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = x^2 + x - 6$

a) (1p) Bestäm $g \circ f(2)$.

b) (2p) Bestäm definitionsmängd och värdemängd för $g \circ f(x)$.

c) (1p) Om man begränsar $g \circ f(x)$ till $x \geq 10$, vad blir då inversen?

Lösning: a) $g \circ f(2) = g(f(2)) = \sqrt{2^2 + 2} - 6 = \sqrt{0} = 0$.

b) $g \circ f(x) = \sqrt{x^2 + x} - 6$, och för att det skall vara definierat måste $x^2 + x - 6 \geq 0$, dvs $(x - 2)(x + 3) \geq 0$. De båda faktorerna måste ha samma tecken (eller vara 0) och definitionsmängden blir därför $D_{g \circ f} = (-\infty, -3] \cup [2, \infty)$. För godtyckligt stor x blir $\sqrt{x^2 + x} - 6$ godtyckligt stort, dvs det finns ingen övre begränsning utan värdemängden blir $V_{g \circ f} = [0, \infty)$.

c) Sätt $y = \sqrt{x^2 + x} - 6$, då vi utgår från att $y \geq 0$ är detta ekvivalent med $y^2 = x^2 + x - 6$, eller $x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{4y^2 + 25}}{2}$. I uppgiften skall vi anta att $x \geq 10$ så det måste vara plustecknet.

Vi får därför $(g \circ f)^{-1}(y) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{4y^2 + 25}}{2}$ för $x \geq 10$.

Svar: $(g \circ f)^{-1}(y) = \frac{-1 + \sqrt{4y^2 + 25}}{2}$ (för $x \geq 10$).

6. Låt $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ och låt $\sim$ vara en relation på icke-tomma delmängder till S , sådan att

$$A \sim B \iff |A| = |B| \text{ och } \min(A) - \min(B) \equiv 0 \pmod{2}$$

där $\min(A)$ betecknar minsta elementet i A .

a) (1p) Skriv upp villkoren som krävs för att $\sim$ skall vara en ekvivalensrelation.

b) (1p) Visa att $\sim$ är en ekvivalensrelation.

c) (2p) Hur många delmängder av S är i samma ekvivalensklass som $\{3, 5, 6, 8\}$?

Lösning: En ekvivalensrelation måste uppfylla reflexivitet ($A \sim A$), symmetri ($A \sim B \iff B \sim A$) och transitivitet ($A \sim B, B \sim C \implies A \sim C$).

b) $A \sim A$, ty $|A| = |A|$ och $\min(A) - \min(A) = 0$;

symmetrisk, ty $|A| = |B| \iff |B| = |A|$ och $\min(A) - \min(B) = \min(B) - \min(A)$;

transitiv, ty $|A| = |B|, |B| = |C| \implies |A| = |C|$ och $\min(A) - \min(C) = \min(A) - \min(B) + (\min(B) - \min(C))$.

c) De delmängder som är i samma ekvivalensklass som $\{3, 5, 6, 8\}$ måste ha ett udda tal som minsta tal och kardinalitet 4. Vi delar in efter vilket det minsta talet är.

Om minsta talet är 1 så finns det $\binom{7}{3} = 35$ sätt att välja de andra 3 elementen i mängden.

Om minsta talet är 3 finns det $\binom{5}{3} = 10$ sätt att välja de andra 3 elementen i mängden. Om

minsta talet är 5 finns det $\binom{3}{3} = 1$ sätt att välja de andra 3 elementen i mängden. 7 kan inte vara det minsta talet. Totalt finns det $35 + 10 + 1 = 46$ delmängder i den ekvivalensklassen.

Svar: 46 delmängder.

DEL III

7. (4p) Bestäm ett positivt heltal x , sådant att $2^x \equiv 1 \pmod{23}$ och $3^x \equiv 9 \pmod{31}$.

(Tips: använd Fermats lilla sats för att skriva upp en mängd lösningar till var och en av ekvationerna.)

Lösning: Enligt Fermats lilla sats vet vi, ty 23 är ett primtal, att $x = 22$ är en lösning till första ekvationen och därför också $x = 22k$ för alla positiva heltal k . Den andra ekvationen är samma som $3^{x-2} \equiv 1 \pmod{31}$ och då 31 är ett primtal så ger Fermats lilla sats att $x - 2 = 30$ är en lösning och därmed $x - 2 = 30m$ för alla positiva heltal m . Alltså vill vi

hitta en lösning till $22k = 30m + 2$ eller $11k - 15m = 1$. Med Euklides algoritm hittar vi att $(k, m) = (-4, -3)$ är en lösning och

$$(k, m) = (-4 + 15s, -3 + 11s), s \in \mathbb{Z}$$

alla uppfyller $22k = 30m + 2$. Vi behöver en lösning som ger ett positivt x . För $s = 1$ får vi $m = 8$ och $x = 30 \times 8 + 2 = 242$ är en möjlig lösning.

Svar: $x = 30 \times 8 + 2 = 242$ är en lösning

8) (4p) 5 olika färgade kulor och 6 (identiska) svarta kulor skall fördelas mellan 4 barn. På hur många sätt kan det göras så att varje barn får minst en kula (svart eller färgad)?

Lösning: Först räknar vi utan begränsningen om minst en kula till varje barn. Att dela ut de 6 svarta kulorna är val med repetition tillåten där ordning inte är viktig, dvs vi kan "välja" ett av de 4 barnen 6 gånger. Formeln för antalet sätt det kan göras på är $\binom{6+4-1}{6}$. De färgade kulorna är olika och barnen är olika och vi gör 5 oberoende val, dvs 4^5 . Det är också oberoende av de svarta kulorna och multiplikationsprincipen ger totala antalet $\binom{6+4-1}{6} 4^5$.

Nu skall vi med inklusion-exklusion dra bort de fall där inte alla barn får någon kula. Låt A_j , $1 \leq j \leq 4$ vara fördelningarna av kulor då barn j inte får någon kula. Antalet fördelningar i A_j räknar man ut på precis samma sätt som ovan fast nu är det 3 barn som skall få kulorna, dvs $|A_j| = \binom{6+3-1}{6} 3^5$. Fördelningar av kulorna där två barn $1 \leq i < j \leq 4$ inte får någon kula alls ger på samma sätt $|A_i \cap A_j| = \binom{6+2-1}{6} 2^5$. Om tre barn inte får någon kula så måste alla kulor gå till det fjärde barnet så $|A_i \cap A_j \cap A_k| = \binom{6+1-1}{6} 1^5 = 1$. Alla fyra barnen kan inte bli utan kulor. Inklusion-exklusion ger nu att antalet fördelningar där inget barn blir utan kulor är

$$\binom{6+4-1}{6} 4^5 - \sum_{1 \leq j \leq 4} |A_j| + \sum_{1 \leq i < j \leq 4} |A_i \cap A_j| - \sum_{1 \leq i < j < k \leq 4} |A_i \cap A_j \cap A_k| = \binom{9}{6} 4^5 - 4 \cdot \binom{8}{6} 3^5 + \binom{4}{2} \cdot \binom{7}{6} 2^5 - 4 \cdot 1$$

$$\text{Svar: } \binom{9}{6} 4^5 - 4 \cdot \binom{8}{6} 3^5 + \binom{4}{2} \cdot \binom{7}{6} 2^5 - 4 \cdot 1 (= 60140).$$

9. (4p) Bevisa att det finns oändligt många primtal.

Lösning: Finns många sätt att visa detta, se t.ex. Eriksson-Gavel Sats 3.3.

Lösningar tenta SF1671 Basmatte med diskret matematik D1
18 december 2018

DEL I

1. (Motivera noga!)

- a) (1p) Är relationen $\mathcal{R}$ på $\mathbb{Z}$ som definieras genom $a\mathcal{R}b$ om $a^2 - b^2 \leq 7$ en ekvivalensrelation?
b) (1p) Är relationen $\mathcal{R}$ på $\mathbb{Z}$ som definieras genom $a\mathcal{R}b$ om $a + b \equiv 0 \pmod{7}$ en ekvivalensrelation?
c) (1p) Är funktionen $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = 2x$ en surjektion?
d) (1p) Är funktionen $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ en injektion? (Här är $\mathbb{R}_{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$)

Lösning:

- a) Nej, den är inte symmetrisk, exempel: $1^2 - 4^2 \leq 7$, men $4^2 - 1^2 \not\leq 7$ (och inte transitiv heller)
b) Nej, den är inte reflexiv, exempel: $1 + 1 = 2 \not\equiv 0 \pmod{7}$ (och inte transitiv heller)
c) Nej, endast jämna tal är med i bilden, exempel: finns inget $x \in \mathbb{Z}$ sådant att $f(x) = 1$.
d) Ja, ty för $x, y \geq 0$ så är $x^2 = y^2$ endast om $x = y$.

2. (4p) Lös ekvationen

$$x^2 + |6x - 5| = 12.$$

Lösning:

Vi betraktar två fall beroende på tecknet av $(6x - 5)$.

Fall $x \geq \frac{5}{6}$.

$x^2 + 6x - 5 = 12 \iff x^2 + 6x - 17 = 0$, vilket är sant omm $x = -3 \pm \sqrt{26}$.
 $-3 - \sqrt{26} < \frac{5}{6}$, alltså ingen lösning. Däremot är $\sqrt{26} > 4$, vilket ger $-3 + \sqrt{26} > 1 \geq \frac{5}{6}$, så $-3 + \sqrt{26}$ ligger i intervallet och är en lösning.

Fall $x < \frac{5}{6}$.

$x^2 - (6x - 5) = 12 \iff x^2 - 6x - 7 = 0$, vilket är sant omm $x = -1$ eller $x = 7$. Då $-1 < \frac{5}{6} < 7$, är den första en lösning men inte den andra.

Svar: Lösningar är $x = -1$ och $x = -3 + \sqrt{26}$.

3. På denna uppgift krävs bara svar (ingen motivering).

- a) (1p) Vad är definitionen av att en funktion $f : A \rightarrow B$, $A \subseteq \mathbb{R}$ är en jämn funktion?
b) (1p) Hur många möjliga utfall finns det när man rullar 3 likadana (6-sidiga) tärningar?
(Svaret får innehålla heltal, potenser, faktulteter, binomialkoefficienter, Stirlingtal och de fyra enkla räknesätten.)
c) (1p) Uttryck $|A \cup B \cup C|$ med formeln för inklusion-exklusion.
d) (1p) Låt $A = \{4, 5, 6\}$ och $B = \{1, 3, 5\}$. Skriv upp alla element i $A \times B$.

Lösning:

- a) Att $f(-x) = f(x)$ för alla x i definitionsmängden.
b) $\binom{8}{3}$ (oordnat val, repetition tillåten)
c) $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$
d) $A \times B = \{(4, 1), (4, 3), (4, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 1), (6, 3), (6, 5)\}$
-

DEL II

4. (4p) Beräkna största gemensamma delaren $\text{sgd}(m(x), n(x))$ till polynomen $m(x) = x^4 + 5x^3 + 10x^2 + 16x + 16$ och $n(x) = x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 19x + 22$. Bestäm sedan polynom $u(x), v(x)$ sådana att $m(x) \cdot u(x) + n(x) \cdot v(x) = \text{sgd}(m(x), n(x))$

Lösning:

$$\begin{aligned}x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 19x + 22 &= (x^4 + 5x^3 + 10x^2 + 16x + 16) \cdot 1 + x^3 + 2x^2 + 3x + 6 \\x^4 + 5x^3 + 10x^2 + 16x + 16 &= (x^3 + 2x^2 + 3x + 6) \cdot (x + 3) + (x^2 + x - 2) \\x^3 + 2x^2 + 3x + 6 &= (x^2 + x - 2) \cdot (x + 1) + 4x + 8 \\x^2 + x - 2 &= (4x + 8) \cdot (x - 1) \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Den sista icke-försvinnande resten är $4x + 8$ och därför blir $\text{sgd}(m(x), n(x)) = x + 2$. (Kom ihåg att koefficienten för den högsta termen skall vara 1 enligt kursens definitionen för sgd.)

(Här bör var och en genom polynomdivision kontrollera att hen har räknat rätt.) Nu gör vi Euklides baklänges och får:

$$\begin{aligned}4(x + 2) &= x^3 + 2x^2 + 3x + 6 - (x^2 + x - 2) \cdot (x + 1) = \\&= x^3 + 2x^2 + 3x + 6 - (x + 1)(m(x) - (x^3 + 2x^2 + 3x + 6) \cdot (x + 3)) = \\&= -(x + 1)m(x) + (x^2 + 4x + 4)(x^3 + 2x^2 + 3x + 6) \\&= -(x + 1)m(x) + (x^2 + 4x + 4)(n(x) - m(x)) = (x^2 + 4x + 4)n(x) - (x^2 + 5x + 5)m(x)\end{aligned}$$

Vi får därför att $m(x)u(x) + n(x)v(x) = x + 2$ där $u(x) = \frac{1}{4}(x^2 + 5x + 5)$, $v(x) = \frac{1}{4}(x^2 + 4x + 4)$.

Svar: $\text{sgd}(m(x), n(x)) = x + 2$, $u(x) = \frac{1}{4}(x^2 + 5x + 5)$, $v(x) = \frac{1}{4}(x^2 + 4x + 4)$.

5. (4p) En kortlek (vanlig standardkortlek med 52 kort) är helt slumpässigt blandad (så varje ordning är lika sannolik). Vad är sannolikheten att klöver kung inte ligger direkt ovanpå klöver ess och att ruter kung inte ligger direkt ovanpå ruter ess?

Lösning:

Det finns totalt $52!$ blandningar av kortleken. Antalet blandningar som uppfyller de två villkoren kan räknas ut genom inklusion-exklusion. Antalet blandningar av kortleken där klöver kung ligger på klöver ess är $51!$ (ty vi kan tänka på de två korten som hopklistrade och motsvarande ett kort). På samma sätt är antalet blandningar där ruter kung ligger på ruter ess $51!$. Antalet blandningar som bryter mot båda är $50!$. Totala antalet blandningar som uppfyller båda villkoren är därför $52! - 51! - 51! + 50! = 50!(52 \cdot 51 - 2 \cdot 51 + 1) = 50!(50 \cdot 51 + 1)$. Sannolikheten att en blandning uppfyller båda blir därför

$$\frac{50!(50 \cdot 51 + 1)}{52!} = \frac{50 \cdot 51 + 1}{52 \cdot 51} = \frac{2551}{2652}$$

Svar: Sannolikheten är $\frac{2551}{2652}$.

6. (4p) Beräkna $13^{15^{17}} \pmod{17}$.

Lösning:

Enligt Fermats lilla sats är $13^{16} \equiv 1 \pmod{17}$ eftersom 17 är ett primtal som inte delar 13. Vi vill därför räkna ut $15^{17} \pmod{16}$. Vi får $15^{17} \equiv_{16} (-1)^{17} = -1 \equiv_{16} 15$. Det medför att $15^{17} = 16n + 15$ för något $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Därmed blir $13^{15^{17}} = 13^{16n+15} \equiv_{17} 13^{15} \equiv_{17} (-4)^{15} = 16^7 \cdot (-4) \equiv_{17} (-1)^7 \cdot (-4) = 4$

Svar: 4

DEL III

7. (4p) Antag $x > 0$, förenkla

$$\sin(2 \arctan(\frac{1}{\sqrt{x}}))$$

till en funktion som inte innehåller trigonometriska funktioner.

Lösning:

Låt oss kalla $\alpha = \arctan \frac{1}{\sqrt{x}}$, då är $0 < \alpha < \pi/2$ så vi kan rita en figur med en rätvinklig triangel där kateten närmast α har längd $\sqrt{x}$ och den andra kateten längd 1. Hypotenusan har då längd $\sqrt{1+x}$ och definitionen av cosinus och sinus ger att $\cos \alpha = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}$ och $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$. Formeln för dubbla vinkeln ger

$$\sin\left(2 \arctan \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 2 \sin\left(\arctan \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \cos\left(\arctan \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}} = \frac{2\sqrt{x}}{1+x}.$$

Svar: $\frac{2\sqrt{x}}{1+x}$.

8. (4p) Använd induktion för att visa att för alla $n \geq 1$ gäller

$$\sum_{j=1}^n j^3 = \binom{n+1}{2}^2$$

Lösning:

Induktion över n .

Bassteg: För $n = 1$ får vi $VL_1 = 1^3 = 1$ och $HL_1 = \binom{3}{2}^2 = 1$. ok.

Induktionssteg: Antag att identiteten är sann för $n = p$ för något heltal $p \geq 1$, dvs $VL_p = HL_p$. Vi skall visa att den då är sanna även för $p + 1$.

$$HL_{p+1} = \binom{p+2}{2}^2 = \frac{(p+1)^2(p+2)^2}{4} = \frac{(p+1)^2(p^2+4p+4)}{4} = \frac{(p+1)^2p^2 + (p+1)^2(4p+4)}{4} =$$

$$\binom{p+1}{2}^2 + (p+1)^3 = HL_p + (p+1)^3 = [\text{Induktionsantagandet}] =$$

$$\sum_{j=1}^p j^3 + (p+1)^3 = \sum_{j=1}^{p+1} j^3 = VL_{p+1}.$$

Enligt induktionsprincipen är identiten sanna för alla $n \geq 1$.

9. (4p) Låt A, B, X vara mängder, med $A \cap B = \emptyset$, $|A| = a$, $|B| = b$ och $|X| = n$, där $a + b \geq n$, $n \geq a$ och $n \geq b$.

Hur många surjektioner $f : A \cup B \rightarrow X$, finns det där f :s begränsning (eng. restriction) till A och f :s begränsning till B båda är injektioner?

(Svaret får innehålla heltal, potenser, faktulteter, Stirlingtal och de fyra enkla räknesätten.)

Lösning:

Antalet möjliga injektioner från A till X är $n!/(n-a)!$. Varje element i $x \in X$ som inte är bilden av något element i A måste då vara bilden av något element i B . Eftersom begränsningen till B också skall vara en injektion så är det exakt ett element $b \in B$ som uppfyller $f(b) = x$. För de $n - a$ element $x \in X$ som inte är bilden av något element i A väljer vi nu i tur och ordning $b \in B$ så att $f(b) = x$. Detta kan göras på $b(b-1) \cdots (b-(n-a)+1) = b!/(b+a-n)!$ sätt. För övriga $(b-(n-a))$ element i B väljer vi bild injektivt bland $f(A) \subseteq X$ vilket kan göras på $a!/(a-(a+b-n))! = a!/(n-b)!$ sätt. Totalt blir det

$$\frac{n!}{(n-a)!} \frac{b!}{(a+b-n)!} \frac{a!}{(n-b)!}.$$

**Tentamen SF1671 Baskurs med Diskret matematik,
2019-10-24**

Skrivtid: 08:00–13:00

Tillåtna hjälpmedel: Inga utom penna, suddgummi och linjal.

Examinator: Petter Brändén

Maximal poäng på tentamen är 36 poäng. Tentan är indelad i tre delar I, II och III om max 12 poäng vardera. Eventuella bonuspoäng läggs till poängen på del I, det kan dock aldrig överstiga 12 poäng. Bonuspoängen framgår om ni loggar in på kurshemsidan och läggs till automatiskt.

Betygsgränserna vid denna tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	F _x
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del III	6	3	-	-	-	-

För full päng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som alvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I

- (2p) Hur många inverterbara element finns i $\mathbb{Z}_{99}$?
 - (2p) Hitta alla lösningar till ekvationen $105x = 3$ i $\mathbb{Z}_{342}$.
- (4p) Finn alla lösningar till ekvationen $5 \sin x + \cos 2x + 2 = 0$.
- På denna uppgift krävs bara svar (ingen motivering).
 - (1p) Förenkla $2 \cdot \log_4(3) - 3 \cdot \log_4(12) + \log_4(\frac{3}{2})$ så långt som möjligt?
 - (1p) Relationen $\mathcal{R}$ på mängden $\{1, 2, 3, 4\}$ ges av $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3), (4, 4), (4, 3), (4, 1)\}$. Vilka av egenskaperna reflexiv, symmetrisk, anti-symmetrisk och/eller transitiv har $\mathcal{R}$?
 - (1p) Hur många injektiva funktioner $f : \{7, 0, 3\} \rightarrow \{1, 0, 9, 3, -1\}$ finns det?
 - (1p) Hur många surjektiva funktioner $g : \{1, 0, 9, 3, -1\} \rightarrow \{7, 0, 3\}$ finns det?

DEL II

4. Låt $\mathcal{M}$ vara mängden av alla ord som kan bildas genom att kasta om bokstäverna i ordet RAGGARGRANEN. (Orden AAAEGGGRRRRNN och RAGGGRENARNA ligger i $\mathcal{M}$, men inte RAGGRENARNA).

a) (1p) Bestäm $|\mathcal{M}|$.

b) (1p) Hur många ord i $\mathcal{M}$ innehåller ordet GRE~~N~~AR? (T.ex. RAG~~G~~RENAR~~N~~AG).

c) (2p) Hur många ord i $\mathcal{M}$ innehåller varken ordet GRE~~N~~AR eller ordet NARRA?

(Svaren får innehålla heltal, potenser, faktorer och de fyra enkla räknesätten.)

5. (4p) Skriv polynomet $2x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ som en produkt av irreducibla polynom. (Obs! Polynomet har ett rationellt nollställe).

6. (4p) En talföljd $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ definieras rekursivt genom

$$a_n = \begin{cases} 2 & \text{om } n = 0, \\ 5 & \text{om } n = 1, \\ 5a_{n-1} - 6a_{n-2} & \text{om } n \geq 2. \end{cases}$$

Bevisa med induktion (eller stark induktion) att $a_n = 2^n + 3^n$ för alla heltal $n \geq 0$.

DEL III

7. Kom ihåg att om A och B är mängder så definieras $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Definera en relation $\mathcal{R}$ på $X = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ genom

$A \mathcal{R} B$ om och endast om $A \Delta B$ är ändlig eller uppräknelig.

(Kom ihåg att en mängd är uppräknelig om den har samma kardinalitet som $\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, \dots\}$.)

a) (3p) Visa att $\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation på X . (Även om du inte kan visa alla egenskaper som en ekvivalensrelation ska ha, visa så många du kan!)

b) (1p) Ge enkla beskrivningar av ekvivalensklasserna $[\emptyset]$ och $[\mathbb{R}]$.

8. (4p) Milena vill ge sina 4 kompisar godis. Hon har 10 identiska chokladbitar, 7 identiska geléhallon, 6 identiska lakritsbåtar och 3 identiska klubbor. På hur många olika sätt kan hon fördela dessa bland sina 4 kompisar så att alla får minst en godis var? (Svaret får innehålla heltal, potenser, faktorer, binomialtal och de fyra enkla räknesätten.)

9. (4p) Bestäm alla reella tal x för vilka $-1 \leq x \leq 1$ och

$$\cos(\arcsin x) + |2x - 1| \leq 1.$$

1) a) $99 = 11 \cdot 9$, Ett element $x \in \mathbb{Z}_{99}$ är

inverterbart om.m. $\gcd(x, 99) = 1$ dvs

om.m. $x \in \{0, 1, \dots, 98\}$ o $11 \nmid x$ o $3 \nmid x$.

$$A_3 = \{x \in \mathbb{Z}_{99} : 3 \mid x\}, \quad |A_3| = 99/3 = 33$$

$$A_{11} = \{x \in \mathbb{Z}_{99} : 11 \mid x\}, \quad |A_{11}| = 99/11 = 9$$

$$A_3 \cap A_{11} = A_{33}, \quad |A_{33}| = 99/33 = 3$$

Nu fås att antalet inverterbara är

$$99 - |A_3 \cup A_{11}| = 99 - (|A_3| + |A_{11}| - |A_3 \cap A_{11}|)$$

$$= 99 - (33 + 9 - 3) = 60$$

b). $105x = 3$ i $\mathbb{Z}_{342}$ om.m. $342 \mid (3 - 105x)$

om.m. finns $y \in \mathbb{Z}$ s.g. $105x + 342y = 3$ (*)

(*) löses med Euklides alg.

$$342 = 3 \cdot 105 + 27$$

$$105 = 3 \cdot 27 + 24$$

$$27 = 1 \cdot 24 + 3$$

$$24 = 8 \cdot 3 + 0$$

$$3 = 27 - 24 = 27 - (105 - 3 \cdot 27)$$

$$= 4 \cdot 27 - 105 = 4 \cdot (342 - 3 \cdot 105) - 105$$

$$= 4 \cdot 342 + (-13) \cdot 105$$

Den allmänna lösningen till (*) är då

$$x = -13 + n \frac{342}{3} = -13 + 114n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

n	1	2	3	4	5	...
$x \pmod{342}$	101	215	329	101	215	...

Svar: 101, 215, 329

2) $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$

Så $\sin x + \cos 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\sin x + 1 - 2 \sin^2 x + 2 = 0$$

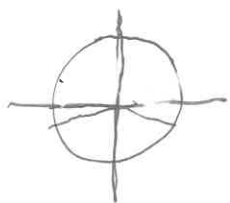
Låt $y = \sin x$; $2y^2 - 5y - 3 = 0 \Leftrightarrow$

$$y^2 - \frac{5}{2}y - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} + \frac{24}{16}} = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{49}{16}} = \frac{5}{4} \pm \frac{7}{4} = 3, -\frac{1}{2}$$

Så $\sin x = 3$ eller $\sin x = -\frac{1}{2}$

$\sin x = 3$ har inga lösningar, så $\sin x = -\frac{1}{2}$



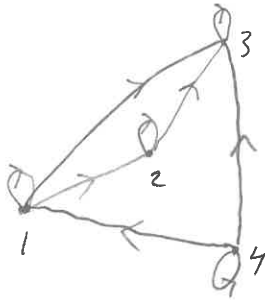
Svar: $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$ eller

$$x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned}
 3 \text{ a)} \quad & 2 \log_4(3) - 3 \log_4(3 \cdot 4) + \log_4(3) - \log_4(2) \\
 &= 2 \log_4(3) - 3 \log_4(3) - 3 \log_4(4) - \log_4(2) + \log_4(3) \\
 &= -6 \log_4(2) - \log_4(2) = -7 \log_4(2) = -7 \log_4(4^{\frac{1}{2}}) = -7 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{7}{2}
 \end{aligned}$$

Svar: $-\frac{7}{2}$

b)



reflexiv

anti-symmetrisk

c)

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

d)

$$3! \cdot 5! = 6 \cdot 120 = 720$$

4 a)

$$A^3 E^1 G^3 R^3 N^2$$

Antalet ord är $\binom{12}{3, 1, 3, 3, 2} = \frac{12!}{3! 3! 3! 2!}$

b)

Ordet GRENÄK kan börja på 7 platser
Sedan väljs ett ord med bokstäverna

AA GGNR på $\binom{6}{2, 2, 1, 1} = \frac{6!}{4}$ sätt

Svar: $7 \cdot \frac{6!}{4} = \frac{7!}{4}$

c). Låt $S = \{\text{ord som innehåller GRENAR}\}$
 $T = \{\text{---11--- NARRA}\}$

Vi söker $|M| - |S \cup T| = |M| - |S| - |T| + |S \cap T|$

$$|S| = \frac{7!}{4}$$

$$|T| = 8 \cdot \binom{7}{1,1,1,1,3} = \frac{8 \cdot 7!}{3!} = \frac{8!}{3!}$$

ty vi väljer starten av NARRA på 8 sätt
 och sedan $\binom{7}{1,1,1,1,3}$ att kasta om bokstäverna
 i A E G G R N.

$$|S \cap T| = 5 \cdot \binom{4}{2,1,1} = \frac{5!}{2}$$

eftersom det enda sättet som både
 GRENAR o NARRA kan förekomma är som
 GRENARRA

∴ Svar: $\frac{12!}{6^3 \cdot 2} - \frac{7!}{4} - \frac{8!}{3!} + \frac{5!}{2}$

5). Enligt sats om möjliga rationella
nollställen är möjliga kandidater
 $-1, -\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}$

Vi ser att $-\frac{1}{2}$ är ett nollställe.

Dividera polynomet med $2x+1$ och erhåll

$$2x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (2x+1)(x^2+x+1)$$

x^2+x+1 är irreducibelt eftersom det ej har
reella nollställen.

$$\therefore (2x+1)(x^2+x+1)$$

6). Eftersom $2^0 + 3^0 = 2 = a_0$ 0
 $2^1 + 3^1 = 5 = a_1$

Så är det sant för $n=0, 1$.

Vi visar nu med stark induktion att
det är sant för alla $n \geq 1$.

Start: $n=1$, sant enligt ovan
 $n=0$. — 1/—

Steg: Antag sant för $0, 1, 2, \dots, n$
där $n \geq 1$. Då är

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 5 \cdot a_n - 6 \cdot a_{n-1} = \{ \text{induktionsantagande} \} = \\ &= 5 \cdot (2^n + 3^n) - 6 \cdot (2^{n-1} + 3^{n-1}) = \\ &= (5-3)2^n + (5-2) \cdot 3^n = 2^{n+1} + 3^{n+1}. \end{aligned}$$

Så påståendet gäller för alla $n \geq 1$ (och $n=0$) enligt
ind. princip

7a) Reflexiv: $A \Delta A = \emptyset$ är ändlig så $A R A$ för alla A .

Symmetrisk: Eftersom $A \Delta B = B \Delta A$ för alla A, B , så är R symmetrisk.

Transitiv: Antag $A R B$ o $B R C$.

Då är

$$\begin{aligned} A \Delta C &= (A \cup C) \setminus (A \cap C) \subseteq (A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C) = \\ &= (A \Delta B) \cup (B \Delta C) \end{aligned}$$

Eftersom $A \Delta B$ o $B \Delta C$ är ändliga eller uppräknbara, så är också unionen det (enligt sats i kurs). Då är även $A \Delta C$ det.

b) $[\emptyset] = \{ B : \emptyset \Delta B = B \text{ är ändlig eller uppräknbar} \}$
så $[\emptyset]$ består av alla ändliga eller uppräknbara mängder.

$$[R] = \{ B : R \Delta B = B^c \text{ är ändlig eller uppräknbar} \}$$

så $[R]$ består av alla mängder vars komplement är uppräknbart eller ändligt.

8). Låt $\mathcal{U}$ vara alla möjliga fördelningar av godiset (dvs vi struntar i att alla får varsin godis). Låt vidare

$$A_i = \{ \text{fördelning} : i \text{ får ingen godis} \}, i=1,2,3,4$$

$$\text{Vi söker alltså } |\mathcal{U} \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)| = *$$

$$|\mathcal{U}| = \binom{10+3}{3} \binom{7+3}{3} \binom{6+3}{3} \binom{3+3}{3}$$

eftersom vi fördelar de olika sorterna oberoende av varandra. På samma sätt:

$$|A_i| = \binom{10+2}{2} \binom{7+2}{2} \binom{6+2}{2} \binom{3+2}{2}, \quad 4 \text{ st}$$

$$|A_i \cap A_j| = \binom{10+1}{1} \binom{7+1}{1} \binom{6+1}{1} \binom{3+1}{1}, \quad \binom{4}{2} = 6 \text{ st}$$

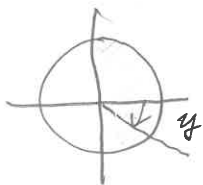
$$|A_i \cap A_j \cap A_k| = 1, \quad \binom{4}{3} = 4 \text{ st}$$

$$|A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l| = 0$$

Enligt principen för inklusion-exklusion:

$$\begin{aligned} * &= \binom{13}{3} \binom{10}{3} \binom{9}{3} \binom{6}{3} - 4 \cdot \binom{12}{2} \binom{9}{2} \binom{8}{2} \binom{5}{2} \\ &\quad + 6 \cdot 11 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 4 - 4 \end{aligned}$$

9).



Antag $y = \arcsin x$

Så $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$ och $\cos y \geq 0$

$$x = \sin y$$

Enligt trigonometrin är $\cos(\arcsin x) = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$
 $= \sqrt{1 - x^2}$ (ty $\cos y \geq 0$)

Vi ska alltså visa

$$\sqrt{1 - x^2} + |2x - 1| \leq 1$$

$0 \leq x \leq 1$
 (Om $x < 0$ så är
 $\sqrt{1 - x^2} > 1$)

Två fall

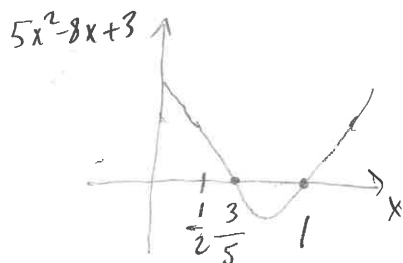
(I): $2x - 1 \geq 0$, dvs $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$

$$\sqrt{1 - x^2} + 2x - 1 \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{1 - x^2} \leq 2 - 2x$$

$$\Leftrightarrow 1 - x^2 \leq 4(1 - x)^2 = 4x^2 - 8x + 4$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 - 8x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{8}{5}x + \frac{3}{5} \geq 0$$

Vad är nollställena till ? $x = \frac{4}{5} \pm \sqrt{\frac{16}{25} - \frac{3 \cdot 5}{25}}$
 $= \frac{4}{5} \pm \frac{1}{5} = 1, \frac{3}{5}$



Vi ser att $5x^2 - 8x + 3 \geq 0$

och $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ om

$$\boxed{\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{5}} \text{ eller } \boxed{x = 1}$$

$$(II). \quad 2x-1 \leq 0, \text{ dvs } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{1-x^2} - (2x-1) \leq 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{1-x^2} \leq 2x \Leftrightarrow 1-x^2 \leq 4x^2 \Leftrightarrow x^2 \geq \frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Vi har } \frac{1}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}, \text{ eftersom } \frac{1}{5} < \frac{1}{4}$$

$$\text{Så er } \boxed{\frac{1}{\sqrt{5}} \leq x \leq \frac{1}{2}}$$

$$\text{Svar: } \left[\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{3}{5} \right] \cup \{1\}$$

$$\left(\text{eftersom } \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{5} \right] \cup \{1\} \cup \left[\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{2} \right] = \left[\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{3}{5} \right] \cup \{1\} \right)$$

**Tentamen SF1671 Baskurs med Diskret matematik,
2019-12-19**

Skrivtid: 08:00–13:00

Tillåtna hjälpmedel: Inga utom penna, suddgummi och linjal.

Examinator: Petter Brändén

Maximal poäng på tentamen är 36 poäng. Tentan är indelad i tre delar I, II och III om max 12 poäng vardera. Eventuella bonuspoäng läggs till poängen på del I, det kan dock aldrig överstiga 12 poäng. Bonuspoängen framgår om ni loggar in på kurshemsidan och läggs till automatiskt.

Betygsgränserna vid denna tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del III	6	3	-	-	-	-

För full päng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som alvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I

- (2p) Bestäm inversen till 11 i $\mathbb{Z}_{82}$.
 - (2p) Hur många inverterbara element finns i $\mathbb{Z}_{220}$?
- Funktionen $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definieras rekursivt av $f(0) = 2, f(1) = 1$ och
$$f(n) = f(n-1) + 6f(n-2), \quad \text{för alla heltal } n \geq 2.$$
Bevisa att $f(n) = 3^n + (-2)^n$, för alla $n \in \mathbb{N}$.
- På denna uppgift krävs bara svar (ingen motivering).
(Svaren får innehålla reella tal, potenser, fakulteter och de fyra enkla räknesätten.)
 - (1p) Hitta alla reella tal x sådana att $0 \leq x \leq 2\pi$ och $\sin x + 2^{-1/2} = 0$.
 - (1p) Det finns 11 olika rätter på Ho's Thai-restaurang. Ann-Britt ska beställa 14 rätter därifrån. På hur många olika sätt kan hon göra det?
 - (1p) Hur många bijektiva funktioner $f : \{7, 0, 3, 8, 2\} \rightarrow \{7, 0, 3, 8, 1\}$ finns det?
 - (1p) Hur många funktioner $g : \{1, 2, \dots, 11, 12\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 7\}$ sådana att $g(x) \neq g(y)$ för alla olika *udda* tal x och y finns det?

DEL II

4. (4p). Bestäm antalet heltalslösningar till ekvationen $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 120$, då $x_i \geq i$ för $i = 1, 2, \dots, 6$.
(Svaret får innehålla heltal, potenser, faktorer och de fyra enkla räknesätten.)

5. (4p) För vilka reella tal x gäller

$$\ln(x) - \ln(x - 10) + \ln(x - 3) + \ln(x + 2) \geq 0?$$

6. a) (2p) Hur många olika ekvivalensrelationer finns det på mängden $\{1, 2, 3, 4\}$?
c) (2p) Hur många olika transitiva relationer finns det på mängden $\{1, 2\}$?
-

DEL III

7. Hundra identiska kulor ska fördelas i fyra olika lådor så att ingen låda är tom och ingen låda innehåller fler än trettio kulor. På hur många olika sätt kan detta göras?
(Svaret får innehålla heltal, potenser, faktorer, binomialtal och de fyra enkla räknesätten.)

8. (4p) Låt $x_1, x_2, \dots, x_{n+2}$ vara godtyckliga heltal. Visa att (A) eller (B) nedan är sann:
(A) Det finns $1 \leq i < j \leq n + 2$ sådana att $2n$ delar $x_i - x_j$.
(B) Det finns $1 \leq i < j \leq n + 2$ sådana att $2n$ delar $x_i + x_j$.

9. (4p) Låt x vara ett reellt tal. En talföljd $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ definieras rekursivt genom $a_0 = 1$ och

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^n x^{n-k} a_k, \quad \text{för alla heltal } n \geq 0.$$

Bevisa att $a_n = (x + 1)^{n-1}$ för alla heltal $n \geq 1$.

1) a) Vi vill lösa $11x = 1$ i $\mathbb{Z}_{82}$. Vi utför
Euklides algoritmen med 82 och 11

$$82 = 7 \cdot 11 + 5$$

$$11 = 2 \cdot 5 + 1$$

$$\text{Så } 1 = 11 - 2 \cdot 5 = 11 - 2 \cdot (82 - 7 \cdot 11) \\ = 15 \cdot 11 - 2 \cdot 82$$

$$\text{Så } 15 \cdot 11 = 1 \text{ i } \mathbb{Z}_{82}, \text{ dvs } \underline{\underline{11^{-1} = 15}} \text{ i } \mathbb{Z}_{82}.$$

b) $220 = 11 \cdot 5 \cdot 2^2$

De inverterbara elementen är
de $x \in \{1, \dots, 220\}^{[220]}$ s.a. $\text{sgd}(x, 220) = 1$,
dvs de x s.a. $5 \nmid x$, $11 \nmid x$ och $2 \nmid x$

$$\text{Låt } A_d = \{x \in [220] \mid d \mid x\}$$

Med inklusion-exklusion fås att antalet
inverterbara element är

$$220 - |A_2| - |A_5| - |A_{11}| + |A_{10}| + |A_{22}| + |A_{55}|$$

$$- |A_{110}| = 220 - 110 - 44 - 20 \\ + 22 + 10 + 4 - 2 = \underline{\underline{80}}$$

2). Vi bevisar med stark induktion

$$\text{Låt } g(n) = 3^n + (-2)^n.$$

$g(0) = 2$ och $g(1) = 1$, så påståendet är sant för $n = 0, 1$.

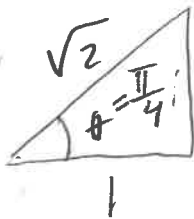
Nu antar vi att $n \geq 2$ och att påståendet är sant för alla $k < n$.

$$\begin{aligned} f(n) &= f(n-1) + 6f(n-2) \\ &= 3^{n-1} + (-2)^{n-1} + 6 \cdot 3^{n-2} + 6 \cdot (-2)^{n-2} \quad \begin{array}{l} \text{(enligt} \\ \text{ind. ant.)} \end{array} \\ &= 3^{n-1} (1+2) + (-2)^{n-1} (1-3) \\ &= 3^n + (-2)^n = g(n) \end{aligned}$$

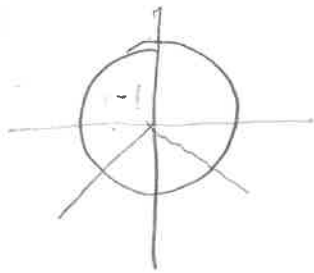
Påståendet följer nu för alla n med stark induktion.

$$3a) \quad \sin x + 2^{-1/2} = 0, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

$$\text{Så} \quad \sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$



$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{Så} \quad \sin(-\theta) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$



$$\text{Så} \quad x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

eller

$$x = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

Svar: $\frac{5\pi}{4}$ och $\frac{7\pi}{4}$

b). Vi ska välja 14 av 11 möjliga med upprepning tillåten:

$$\binom{11+14-1}{11-1} = \binom{24}{10} = \frac{24!}{10! \cdot 14!}$$

c). $5!$

d). Vi kan välja värdena för de udda och jämna talen oberoende av varandra. Så enligt multiplikationsprincipen

$$(7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2) \cdot 7^6 = 7! \cdot 7^6$$

4). Vi kan skriva $x_i = (i-1) + y_i$

Då är $x_1 + \dots + x_6 = 120$, $x_i \geq i$

ekvivalent med $y_1 + \dots + y_6 = 120 - 0 - 1 - 2 - 3 - 4 - 5$
 $= 105$, $x_i \geq 1$

Så vi får $\binom{104}{5} = \frac{104!}{5! \cdot 99!}$

5). Notera först att $x > 10$.

Eftersom funktionen e^x är växande
så gäller olikheten om.m.

$$e^{(\ln x - \ln(x-10) + \ln(x-3) + \ln(x+2))} \geq e^0$$

dvs

$$\frac{x(x-3)(x+2)}{x-10} \geq 1$$

Kom ihåg $x > 10$ så

$$\frac{x}{x-10} > 1, \quad x-3 > 1, \quad x+2 > 1$$

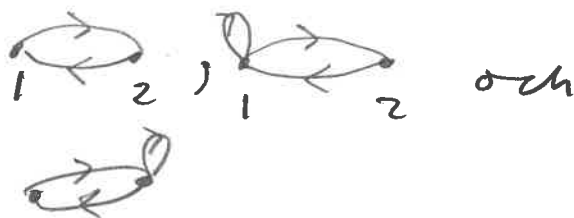
$$\text{så därför är } \frac{x}{x-10} \cdot (x-3)(x+2) > 1$$

$\therefore$ Olikheten gäller för alla $x \geq 10$.

6). a) Antalet ekvivalensrelationer är samma som antalet mängdpartitioner:
 $\{1, 2, 3, 4\}$, dvs

$$S(4,1) + S(4,2) + S(4,3) + S(4,4) = \\ = 1 + 7 + 6 + 1 = \underline{\underline{15}}$$

b). De relationer som ej är transitiva är



Det finns totalt 2^4 olika relationer på $\{1, 2\}$.

$$\therefore \underline{\underline{16 - 3 = 13}}$$

7). Betrakta $\mathcal{U}$ vilket består av alla olika fördelningar av de 100 kulorna så att ingen låda är tom. Låt

$$A_i = \{ \text{fördelningar s.a. låda } i \text{ för fler än 30 kulor} \}$$

Vi söker alltså

$$\begin{aligned} |A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c| &= (\text{inklusion-exklusion}) \\ &= |\mathcal{U}| - |A_1| - |A_2| - |A_3| - |A_4| \\ &\quad + |A_1 \cap A_2| + \dots \\ &\quad - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| - \dots \\ &\quad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| \end{aligned}$$

Genom att placera ut 30 kulor i låda i ser vi att $|A_i|$ är antalet sätt att lägga 70 kulor i 4 lådor så att ingen är tom, dvs $\binom{69}{3}$

På samma sätt fås att

$$|A_i \cap A_j| = \binom{100 - 2 \cdot 30 - 1}{3} = \binom{39}{3}$$

$$|A_i \cap A_j \cap A_k| = \binom{100 - 3 \cdot 30 - 1}{3} = \binom{9}{3}$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0$$

Svar: $\binom{99}{3} - 4 \cdot \binom{69}{3} + 6 \binom{39}{3} - 4 \binom{9}{3}$

8) Vi kan antaga att $x_i \not\equiv x_j \pmod{2n}$
 för alla $i < j$ för annars är (A)
 sann. Så problemet reduceras till:

(*) Om $x_1, \dots, x_{n+2}$ är $n+2$ olika element
 i $\mathbb{Z}_{2n}$, så är $x_i = -x_j$ för
 något $i \neq j$.

$$\begin{aligned} \text{Låt } S &= \{ \{a, b\} \mid a, b \in \mathbb{Z}_{2n} \text{ och } a = -b \} \\ &= \{ \{0, 0\}, \{1, 2n-1\}, \{2, 2n-2\}, \dots, \{n-1, n+1\}, \\ &\quad \{n, n\} \} \\ |S| &= n+1 \end{aligned}$$

Definiera en funktion

$$f: \{x_1, \dots, x_{n+2}\} \rightarrow S$$

genom $f(x_i) = \{x_i, 2n - x_i\}$

Enligt pÅdprincipen finns $i < j$

så $f(x_i) = f(x_j)$ dvs $x_i = -x_j$.

9). Vi bevisar påståendet med stark induktion över $n \geq 1$.

$$\underline{n=1} \quad q_1 = q_{0+1} = \sum_{k=0}^0 x^{0-k} q_k = q_0 = 1 \\ = (x+1)^{1-1}$$

Så sant för $n=1$.

Antag sant för alla $m \leq n$ där $n \geq 1$. Bevisa för $n+1$.

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^n x^{n-k} a_k = x^n + \sum_{k=1}^n x^{n-k} a_k$$

$$= x^n + \sum_{k=0}^{n-1} x^{(n-k-1)} a_{k+1}$$

$$= \{ \text{ind. antagande} \}$$

$$= x^n + \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k-1} (x+1)^k$$

$$= x^n + x^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{x+1}{x} \right)^k$$

$$= \{ \text{geometrisk summa} \} = x^n + x^{n-1} \frac{\frac{(x+1)^n}{x^n} - 1}{\frac{x+1}{x} - 1}$$

$$= x^n + x^n \frac{(x+1)^n - 1}{x^n - x^n}$$

$$= x^n + (x+1)^n - x^n = (x+1)^n$$

vilket skulle visas.

Påståendet följer med stark
induktion

**Tentamen SF1671 Baskurs med Diskret matematik,
2020-10-21**

Skrivtid: 08:00–13:00

Tillåtna hjälpmedel: Inga utom penna, suddgummi och linjal.

Examinator: Petter Brändén

Obs: Om du har frågor om uppgifter på tentan, så ska du formulera de på ett blad och ge till tentavakten.

Maximal poäng på tentamen är 36 poäng. Tentan är indelad i tre delar I, II och III om max 12 poäng vardera. Eventuella bonuspoäng läggs till poängen på del I, det kan dock aldrig överstiga 12 poäng. Bonuspoängen framgår om ni loggar in på kurshemsidan och läggs till automatiskt.

Betygsgränserna vid denna tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del III	6	3	-	-	-	-

För full päng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som alvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I

1. (4p) Finn alla lösningar till ekvationen $165x = 21$ i $\mathbb{Z}_{192}$.

(Svaret ska ges som en lista av tal i $\{0, 1, 2, \dots, 191\}$.)

För x i $\{0, 1, 2, \dots, 191\}$ gäller att $165x = 21$ i $\mathbb{Z}_{192}$ om och endast om $192 \mid (21 - 165x)$, dvs om det finns heltal y s.a. $165x + 192y = 21$. Vi börjar med att lösa den diofantiska ekvationen:

Euklides alg:

$$192 = 1 \cdot 165 + 27$$

$$165 = 6 \cdot 27 + 3$$

$$27 = 9 \cdot 3 + 0$$

Euklides baklänges:

$$3 = 165 - 6 \cdot 27 =$$

$$= 165 - 6 \cdot (192 - 165) =$$

$$= 7 \cdot 165 + (-6) \cdot 192$$

$$\therefore 21 = 3 \cdot 7 = 165 \cdot (7 \cdot 7) + 192 \cdot (-6 \cdot 7)$$

En lösning är alltså $x_0 = 7 \cdot 7 = 49$.

Den allmänna lösningen är enligt föreläsningen:

$$x = 49 + n \cdot \frac{192}{3} = 49 + n \cdot 64, \text{ där } n \in \mathbb{Z}.$$

Skriv $n = 3k + r$, där $r = 0, 1, 2$

$$i \mathbb{Z}_{192} \text{ är då } x = 49 + (3k + r)64 =$$

$$= 49 + 192k + 64r = 49 + 64r, \quad r = 0, 1, 2.$$

Lösningarna är alltså: $49, 49 + 64 = 113$ och $49 + 2 \cdot 64 = 177$

Svar: $49, 113, 177$

2. (4p) Finn alla lösningar till ekvationen $\tan(x) = \tan(-2x)$.

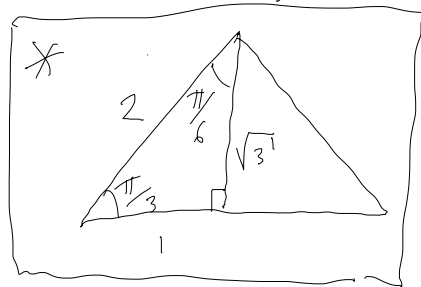
$\tan(x)$ är udda så $\tan(-2x) = -\tan(2x)$

Formler för dubbla vinklar:

$$\sin(2x) = 2 \cos x \cdot \sin x$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

Notera att $\tan(x)$ ej är definierad för $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, så $\tan(2x)$ är ej definierad då $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ där $k \in \mathbb{Z}$. Så antag att x ej är på den formen.



Vi har enligt dubbla vinklar:

$$\begin{aligned} \tan(2x) &= \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} = 2 \frac{\cos x \cdot \sin x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \\ &= 2 \frac{\tan x}{1 - \tan^2 x} \quad (\text{delat med } \cos^2 x) \end{aligned}$$

Vi vill alltså lösa $\tan(x) = -\frac{2 \tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$

Låt $y = \tan(x)$. Ekvationen blir

$$y = \frac{-2y}{1 - y^2} \quad \text{Tre fall: (1) } y=0, (2) y \neq 0$$

(1). $y=0$, dvs $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. (2). $y \neq 0$. $1 - y^2 = -2$,

dvs $y^2 = 3$. Då är $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, *

Svar: $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ och $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

3. På denna uppgift krävs bara svar (ingen motivering). Svaren på c och d får innehålla heltal, potenser, faktulteter och de fyra enkla räknesätten.

a) (1p) Skriv talet 2020 i bas 6.

$$\begin{aligned}2020 &= 336 \cdot 6 + 4 \\&= 56 \cdot 6^2 + 4 \\&= (9 \cdot 6 + 2) \cdot 6^2 + 4 \\&= ((6+3) \cdot 6 + 2) 6^2 + 4 \\&= 6^4 + 3 \cdot 6^3 + 2 \cdot 6^2 + 4\end{aligned}$$

Svar: $2020 = (13204)_6$

b) (1p) Relationen $\mathcal{R}$ på mängden $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ges av
 $\mathcal{R} = \{(1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3), (5, 5)\}$. Vilka av egenskaperna reflexiv, symmetrisk, anti-symmetrisk och/eller transitiv har $\mathcal{R}$?

- Ej reflexiv, eftersom $1\mathcal{R}1$ gäller ej.
- Symmetrisk eftersom $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$
gäller för alla $x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- Ej anti-symmetrisk, eftersom
 $1\mathcal{R}2 \subseteq 2\mathcal{R}1$, men $1 \neq 2$
- Ej transitiv, ty $1\mathcal{R}2 \subseteq 2\mathcal{R}1$
men inte $1\mathcal{R}1$

Svar: Endast symmetrisk

- c) (1p) Hur många olika ord kan bildas av ordet PAPPERSPAPPAS genom att kasta om (blanda) bokstäverna? (T.ex. PAPPASPEPPARS och SPRPEPAAPAPSP.)

$$P^6 A^3 E^1 R^1 S^2$$

Enligt Bhaskara:

$$\binom{13}{6, 3, 1, 1, 2} = \frac{13!}{6! \cdot 3! \cdot 2}$$

$$\underline{\text{Svar:}} \quad \frac{13!}{6! \cdot 3! \cdot 2}$$

d) (1p) Hur många olika injektioner $f : \{-3, 2, 5, 7, 9, -9, 6\} \rightarrow \{5, -4, 4, 3\}$ finns det?

Svar: 0 eftersom

$$7 = |\{-3, 2, 5, 7, 9, -9, 6\}|$$

$$> |\{5, -4, 4, 3\}| = 4$$

DEL II

4. (4p) 150 identiska kulor ska fördelas bland 5 olika lådor L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 , så att inga låda blir tom. Hur många olika sådana fördelningar finns där L_1 får högst 24 kulor och låda L_2 får högst 29 kulor? ~~minst 5 kulor~~ ²⁵

(Svaret får innehålla heltal, potenser, faktorer, binomialtal, Stirlingtal och de fyra enkla räknesätten.)

Genom att först placera ut 4 kulor i L_2 , söker vi antalet sätt att fördela 146 kulor i $L_1, \dots, L_5$ s.a. ingen blir tom & L_1 får högst 25 kulor. Detta är lika med

$$\begin{aligned}
 & \# \text{ fördelningar utan sista kravet} \\
 & - \# \text{ fördelningar där } L_1 \text{ får fler än 25 kulor} \\
 & = \left\{ \begin{array}{l} \text{enligt} \\ \text{föreläsningsant.} \end{array} \right\} = \binom{146-1}{5-1} - \binom{146-25-1}{5-1} \\
 & = \binom{145}{4} - \binom{120}{4}
 \end{aligned}$$

Ty vi lägger ut 25 kulor i L_1 .

Svar: $\binom{145}{4} - \binom{120}{4}$

5. (4p) Skriv polynomet $8x^3 + 10x^2 + 7x + 3$ som en produkt av irreducibla polynom.
(Obs! Polynomet har ett rationellt nollställe).

Vi börjar med att gissa rationellt nollställe.
Satsen om sådana säger att de måste vara $\frac{p}{q}$ i formen $\pm \frac{r}{s}$ där $r \mid 3$ o $s \mid 8$. Test ger att $-\frac{3}{4}$ är ett nollställe. Dela med $4x+3$

$$\begin{array}{r}
 2x^2 + x + 1 \\
 \hline
 8x^3 + 10x^2 + 7x + 3 \quad \boxed{4x+3} \\
 -(8x^3 + 6x^2) \\
 \hline
 4x^2 + 7x + 3 \\
 -(4x^2 + 3x) \\
 \hline
 4x + 3 \\
 -(4x + 3) \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Polynomet $2x^2 + x + 1$ har inga reella nollställen enligt t.ex. p-q-formeln, så $2x^2 + x + 1$ är irreducibelt.

$$\begin{array}{l}
 1 \\
 \sim \sim
 \end{array}
 \quad 8x^3 + 10x^2 + 7x + 3 = (4x+3)(2x^2+x+1)$$

6. (4p) En talföljd $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ uppfyller $a_{n+1}^2 \cdot a_{n-2} = a_n^3$ för alla heltal $n \geq 2$. Dessutom är $a_0 = 1, a_1 = 3$ och $a_2 = 9$. Bevisa med induktion (eller stark induktion) att $a_n = 3^n$ för alla heltal $n \geq 0$.

Vi bevisar med stark induktion.

Stämmer för $n = 0, 1, 2$ enligt lydelsen.

Antag $a_k = 3^k$ för $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ($n \geq 2$)

Då är $a_{n+1} = \sqrt{\frac{a_n^3}{a_{n-2}}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{induktions-} \\ \text{antagande} \end{array} \right\}$

$$= \sqrt{\frac{3^{3n}}{3^{n-2}}} = \sqrt{3^{3n-n+2}} = \sqrt{3^{2(n+1)}} = 3^{n+1}$$

Presterandet följer nu med stark induktion.

DEL III

7. Två relationer $\mathcal{R}_1$ och $\mathcal{R}_2$ på en mängd X är lika om det för alla $x, y \in X$ gäller att $x\mathcal{R}_1y$ om och endast om $x\mathcal{R}_2y$.

a) Hur många olika relationer finns det på mängden $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, som både är reflexiva och symmetriska?

b) Hur många olika ekvivalensrelationer som har exakt 3 ekvivalensklasser finns det på mängden $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

(Svaren ska ges som heltal skrivna i decimalbasen.)

a) En relation är detsamma som en delmängd till $X \times X$. Vi söker antalet reflexiva och symmetriska relationer, så en sådan relation är entydigt bestämd av en delmängd av $\{\{x, y\} : x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5\}, x \neq y\} = E$.

Antalet delmängder till E är $2^{|E|} = 2^{\binom{5}{2}}$

$\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$, så Svar: $2^{10} = 1024$

b) Enligt föreläsningarna finns ett 1-1 korrespondens mellan ekvivalensrelationer och partitioner. Ekvivalensklasser och paritioner. Vi söker alltså motvaran där blocken. Vi söker alltså $S(6, 3)$. Stirlings triangel:

Svar: 90

	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	1	1				
3	1	3	1			
4	1	7	6	1		
5	1	15	25	10	1	
6	1	31	90	150	31	1

8. (4p) 15 flickor och 15 pojkar ska fördelas i 4 icke-tomma grupper (onummerade). På hur många sätt kan detta göras om vi förbjuder alla grupper av formen $\{x, y\}$, där x är en pojke och y är en flicka?

(Svaret får innehålla heltal, potenser, faktorialer, binomialtal, Stirlingtal och de fyra enkla räknesätten.)

Vi löser först varianten där grupperna är numrerade: (dvs olika).

Låt $\mathcal{U}$ vara alla möjliga fördelningar i icke-tomma grupper och låt

$A_i = \{ \text{fördelningar s.a. grupp } i \text{ är förbjuden} \}$

Vi söker $|\mathcal{U} \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)| = *$

$$|\mathcal{U}| = 4! \cdot S(30, 4) \quad (\text{fy surjektion } f: \{1, \dots, 30\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\})$$

$$|A_i| = 15 \cdot 15 \cdot 3! \cdot S(28, 3)$$

$\nearrow$ förbjuden pojke $\nearrow$ förbjuden flicka $\nwarrow$ välj resten av grupperna.

$$|A_i \cap A_j| = 15 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 14 \cdot 2! \cdot S(26, 2), \quad i < j$$

$$|A_i \cap A_j \cap A_k| = 15 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 13, \quad i < j < k$$

$$|A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l| = 0 \quad \text{Alla grupper kan inte vara förbjudna.}$$

$$\begin{aligned} \text{Så} \quad * &= 4! \cdot S(30, 4) - 4 \cdot 15^2 \cdot 3! \cdot S(28, 3) + \binom{4}{2} \cdot 15^2 \cdot 14^2 \cdot 2! \cdot S(26, 2) \\ &\quad - \binom{4}{3} \cdot 15^2 \cdot 14^2 \cdot 13^2 \quad (\text{Med inklusion-exklusion}) \end{aligned}$$

Slutligen för att få onummerade så delar vi med $4!$

$$\text{Svar!} \quad S(30, 4) - 15^2 \cdot S(28, 3) + \frac{1}{2} \cdot 15^2 \cdot 14^2 \cdot S(26, 2) - \frac{1}{6} \cdot 15^2 \cdot 14^2 \cdot 13^2$$

9. För vilka reella tal x gäller

$$2x + 2 \leq \log_3(4 \cdot 3^x - 7) + 2 \cdot \log_3(2 \cdot 3^x - 5)? \quad (*)$$

(Svaret får innehålla heltal, potenser, logaritmer och de fyra enkla räknesätten.)

För att logaritman ska vara definierade, så måste $x \geq \log_3(\frac{5}{2})$.
Antag därför $x \geq \log_3(\frac{5}{2})$

Notera att $\log_3(y) = 2 \log_9(y)$, så (*) är ekvivalent
med

$$2x + 2 \leq 2 \log_9(4 \cdot 3^x - 7) + 2 \log_9(2 \cdot 3^x - 5)$$

Förkorta med 2 och upphöj med 9, så får vi den
ekvivalenta olikheten:

$$9^{x+1} \leq (4 \cdot 3^x - 7) \cdot (2 \cdot 3^x - 5) \quad (**)$$

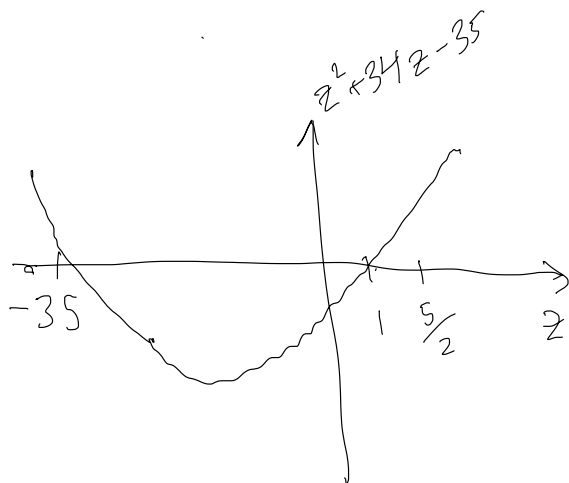
Låt $z = 3^x$. Då blir (**) (Se nästa sida för alternativ lösning)

$$9z^2 \leq (4z - 7)(2z - 5) = 8z^2 - 34z + 35$$

$$\text{dvs} \quad z^2 + 34z - 35 \leq 0$$

V.L. har nollställen

$$z = -17 \pm \sqrt{17^2 + 35} = -17 \pm \sqrt{324} \\ = -17 \pm 18 = 1, -35$$



$$\text{Så} \quad -35 \leq z \leq 1.$$

Eftersom $x \geq \log_3(\frac{5}{2})$ så
är $z = 3^x \geq \frac{5}{2} > 1$

Vi har alltså inga
lösningar!

Svar: För inga reella tal.

forts.

$$q^{x+1} \geq (4 \cdot 3^x - 7)(2 \cdot 3^x - 5), \quad x \geq \log_3\left(\frac{5}{2}\right)$$

Eftersom båda parenteserna är ≥ 0 gäller

$$\begin{aligned} (2 \cdot 3^x - 5)(4 \cdot 3^x - 7) &< (2 \cdot 3^x) \cdot (4 \cdot 3^x) \\ &= 8 \cdot 9^x < 9 \cdot 9^x = 9^{x+1} \end{aligned}$$

Så vi har ingen lösning.

**Tentamen SF1671 Baskurs med Diskret matematik,
2021-10-27**

Skrivtid: 08:00–13:00

Tillåtna hjälpmedel: Inga utom penna, suddgummi och linjal.

Examinator: Petter Brändén, 08-790 65 41

Maximal poäng på tentamen är 36 poäng. Tentan är indelad i tre delar I, II och III om max 12 poäng vardera. Eventuella bonuspoäng läggs till poängen på del I, det kan dock aldrig överstiga 12 poäng. Bonuspoängen framgår om ni loggar in på kurshemsidan och läggs till automatiskt.

Betygsgränserna vid denna tentamen kommer att ges enligt

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del III	6	3	-	-	-	-

För full päng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar som inte är standard i kursen definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som har allvarliga brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I

1. (4p) Finn alla heltalslösningar till den Diofantiska ekvationen $384x + 330y = 42$.

2. (4p) Finn alla lösningar till ekvationen $\sin(2x - 3) + \cos(2 - 3x) = 0$.

3. På denna uppgift krävs bara svar (ingen motivering). Svaren på c) och d) får innehålla heltal, potenser, fakulteter och de fyra enkla räknesätten.

a) (1p) Hitta alla lösningar till ekvationen $\ln(2) + \ln(3 - x) = \ln(x) + \ln(x - 1)$.

b) (1p) Relationen $\mathcal{R}$ på mängden $\mathbb{Z}_7$ ges av

$$\mathcal{R} = \{(i, j) : j - i \in \{0, 1, 6\}\}.$$

Vilka av egenskaperna reflexiv, symmetrisk, anti-symmetrisk och/eller transitiv har $\mathcal{R}$?

c) (1p) Hur många surjektioner $f : \{1, 3, 5, 7, 9\} \rightarrow \{2, 4, 6\}$ finns det?

d) (1p) Hur många olika injektioner $f : \{-3, 2, 5, 7\} \rightarrow \{5, -4, 4, 3, 9, -2, 8\}$ finns det?

DEL II

4. (4p) Skriv polynomet $2x^3 + 7x^2 + 10x + 35$ som en produkt av irreducibla polynom.

5. Betrakta olikheten

$$\frac{1}{|x|} \geq \frac{1}{|x + \frac{1}{2}|} - \frac{1}{|x + 1|} \quad (\star)$$

a) (1p) Visa att x uppfyller $(\star)$ om och endast om $-1 - x$ uppfyller $(\star)$.

b) (3p) Bestäm alla reella tal x som uppfyller olikheten $(\star)$.

6. (4p) Bestäm antalet inverterbara element i $\mathbb{Z}_{468}$.

(Svaret får innehålla heltal, potenser, faktorer, binomialtal, Stirlingtal och de fyra enkla räknesätten.)

DEL III

7. (4p) Lilla Gunvor ska ge 100 olika idolkort till hennes 25 klasskompisar (Gunvor själv ska inte ha något kort). På hur många olika sätt kan hon göra detta om hennes 4 bästa vänner måste få minst ett kort var.

(Svaret får innehålla heltal, potenser, faktorer, binomialtal, Stirlingtal och de fyra enkla räknesätten.)

8. (4p) Bevisa, med induktion eller stark induktion, att för alla positiva heltal n ,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2}.$$

9. (4p) Ge ett exempel på en surjektion $f : \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}$ och en injektion $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{Z})$. Förklara varför funktionerna är surjektioner och injektioner.

(Kom ihåg att $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ är potensmängden till $\mathbb{Z}$.)

Lösningsföreläsning

- 1) Börja med att dividera HL o VL med 2.
 $192x + 165y = 21$. (Lös detta istället)
Använd Euklides alg. för att hitta partikulärlösning.
 $192 = 1 \cdot 165 + 27$ så $\text{sgd}(192, 165) = 3$ och $3 \mid 21$, så
 $165 = 6 \cdot 27 + 3$ lösning finns.
 $27 = 9 \cdot 3$

Gå baklänges i Euklides alg.

$$3 = 165 - 6 \cdot 27 = 165 - 6 \cdot (192 - 165) = 192 \cdot (-6) + 165 \cdot 7$$

$$\text{Så } 21 = 3 \cdot 7 = 192 \cdot (-6 \cdot 7) + 165 \cdot (7 \cdot 7)$$

$\parallel x_0$ $\parallel y_0$

Allmänna lösningen ges av formel från föreläsningen

Svar: $x = x_0 - n \cdot \frac{165}{3} = -42 - n \cdot 55$ där $n \in \mathbb{Z}$
 $y = y_0 + n \cdot \frac{192}{3} = 49 + n \cdot 64$

2)

skriv
som

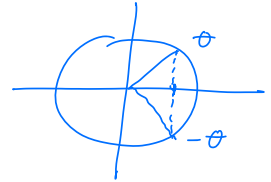
$$\cos(2-3x) = -\sin(2x-3) = \left\{ \begin{array}{l} \text{sinus} \\ \text{udda} \end{array} \right\} = \sin(3-2x)$$

Kom ihjg, $\sin t = \cos(\frac{\pi}{2} - t)$ så vi får

$$\cos(2-3x) = \cos(\frac{\pi}{2} - 3 + 2x)$$

Vi har att $\cos(x) = \cos(y)$ om

$$x = \pm y + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$$



Så vi får två fall:

$$(+)\quad 2-3x = \frac{\pi}{2} - 3 + 2x + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$-5x = -5 + \frac{\pi}{2} + 2n\pi$$

$$x = 1 - \frac{\pi}{10} - \frac{2n\pi}{5}, n \in \mathbb{Z}$$

$$(-)\quad 2-3x = -\frac{\pi}{2} + 3 - 2x + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$-x = 1 - \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

$$x = -1 + \frac{\pi}{2} - 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Svar!

$$x = 1 - \frac{\pi}{10} + \frac{2n\pi}{5}, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = -1 + \frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

3)

a). Notera först att $1 < x < 3$. $H_L = V_L$ om $e^{H_L} = e^{V_L}$, så
vi får $2 \cdot (3-x) = x(x-1)$, dvs $x^2 + x - 6 = 0$

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{6 \cdot 4}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} = 2, -3. \text{ Men } -3 \text{ ligger ej i intervallet, så falsk}$$

Svar: $x = 2$

b). Reflexiv? Ja ty $i-i=0 \in \{0,1,6\}$
Symmetrisk? Ja ty $i-j \in \{0,1,6\} \Rightarrow -(i-j) = j-i \in \{0,1,6\}$
($-1=6$)
Antisymmetrisk? Nej: $0R1$ och $1R0$, men $1 \neq 0$
Transitiv? Nej: $0R1$ och $1R2$, men inte $0R2$

c). $3! S(5,3) = 6 \cdot 25$

d). $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$

4)

Gissa rationell rot $\frac{a}{b}$ $a|35$, $b|2$

Eftersom alla koefficienter är positiva, så är $\frac{a}{b} < 0$. Gissning ger $\frac{a}{b} = -\frac{7}{2}$

Delar med $2x+7$

$$\begin{array}{r}
 x^2 + 5 \\
 \hline
 2x^3 + 7x^2 + 10x + 35 \quad | \quad 2x + 7 \\
 -(2x^3 + 7x^2) \\
 \hline
 10x + 35 \\
 -(10x - 35) \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Så $f(x) = (2x+7)(x^2+5)$

↑
irreducibel
eftersom grad 1

↑ irreducibel eftersom
saknar rot och
grad 2

5) a) Skriv olikheten som $\frac{1}{|x+\frac{1}{2}|} \leq \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|x+1|}$

Låt $g(x) = -x-1$. Vi ser att $g(g(x)) = x$ och

$$|g(x) + \frac{1}{2}| = |x + \frac{1}{2}|, \quad |g(x)| = |x+1|, \quad |g(x)+1| = |x|$$

från vilket påståendet följer

b). Olikheten är välddefinierad för

$$(-\infty, -1) \cup (-1, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \infty)$$

Enligt symmetrin i a) så räcker det att kolla $(-\frac{1}{2}, 0)$ och $(0, \infty)$.

Multiplikera olikheten med $|x| \cdot |x+\frac{1}{2}| \cdot |x+1|$. Vi får:

$$|x| \cdot |x+1| \leq |x+1| \cdot |x+\frac{1}{2}| + |x| \cdot |x+\frac{1}{2}| \quad (\star\star)$$

$$\underline{(0, \infty)} : (\star\star) \text{ blir } x^2 + x \leq x^2 + \frac{1}{2}x + x + \frac{1}{2} + x^2 + \frac{1}{2}x$$

dvs $x^2 + x + \frac{1}{2} \geq 0$, vilket alltid gäller eftersom $x^2 + x + \frac{1}{2} = 0$ inte har någon reell rot.

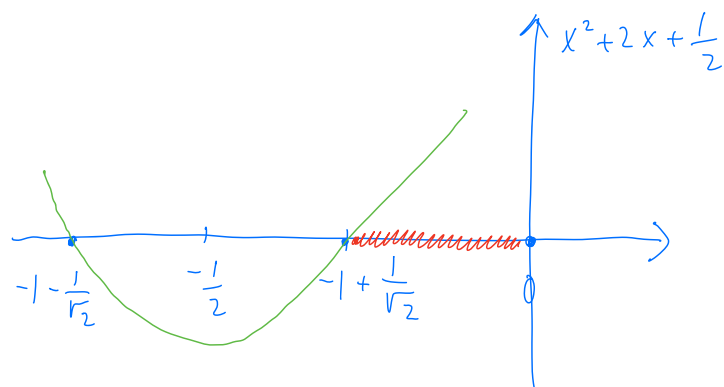
$$\underline{(-\frac{1}{2}, 0)} : (\star\star) \text{ blir } -x(x+1) \leq (x+1)(x+\frac{1}{2}) - x(x+\frac{1}{2})$$

$$\text{dvs } -x^2 - x \leq x^2 + \frac{1}{2}x + x + \frac{1}{2} - x^2 - \frac{1}{2}x$$

$$\text{dvs } x^2 + 2x + \frac{1}{2} \geq 0$$

5b (forts).

VL har nollställena $x = -1 \pm \sqrt{1 - 1/2} = -1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$



Vi ser att olikheten gäller då

$$x \in [-1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$$

Av symmetrin i a) får vi också

$$(-\infty, -1) \text{ och } [-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}]$$

Svar: $x \in (0, \infty) \cup [-1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \cup (-\infty, -1) \cup [-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}]$

6).

$$468 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 13$$

En element x i $\mathbb{Z}_{468}$ är inverterbart om

$\text{sgcd}(x, 468) = 1$, dvs om x inte är delbart med 2, 3 eller 13.

Vi söker alltså antalet tal i $[468] = \{1, 2, \dots, 468\}$ som ej är delbara med något av 2, 3, eller 13.

Låt $A_i = \{x \in [468] \mid i \mid x\}$. Vi söker

$$|[468] \setminus (A_2 \cup A_3 \cup A_{13})| = *$$

$$|A_2| = 468/2 = 234, \quad |A_3| = 468/3 = 156, \quad |A_{13}| = 468/13 = 36$$

$$|A_2 \cap A_3| = |A_6| = 468/6 = 78, \quad |A_2 \cap A_{13}| = |A_{26}| = 468/26 = 18$$

$$|A_3 \cap A_{13}| = 468/39 = 12, \quad |A_2 \cap A_3 \cap A_{13}| = 468/78 = 6$$

Enligt PIE för v_i :

$$\begin{aligned} * &= 468 - |A_2| - |A_3| - |A_{13}| + (|A_2 \cap A_3| + \dots) - |A_2 \cap A_3 \cap A_{13}| \\ &= 468 - 234 - 156 - 36 + 78 + 18 + 12 - 6 = 144 \end{aligned}$$

Svar: 144

7)

Låt $\mathcal{U}$ vara alla fördelningarna utan restriktionerna. Dvs $\mathcal{U} = \{ f : [100] \rightarrow [25] \}$
 Så $|\mathcal{U}| = 25^{100}$ ($[n] = \{1, 2, \dots, n\}$)

Vi har restriktionerna. Namnge vinnarna 1, 2, 3, 4.

$$A_i = \{ f \in \mathcal{U} \mid i \text{ får inget} \}$$

$$\text{Vi söker } |\mathcal{U} \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)|$$

Enligt PIE är detta

$$|\mathcal{U}| - (|A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4|) + (|A_1 \cap A_2| + \dots) - (|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \dots) + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|$$

$$|A_i| = 24^{100} \text{ eftersom } i \text{ får inget kort.}$$

$$|A_i \cap A_j| = 23^{100}. \text{ Finns } \binom{4}{2} \text{ sådana termer}$$

$$|A_i \cap A_j \cap A_k| = 22^{100} \text{ Finns } \binom{4}{3} \text{ sådana termer}$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 21^{100}$$

$$\text{Svar: } 25^{100} - 4 \cdot 24^{100} + 6 \cdot 23^{100} - 4 \cdot 22^{100} + 21^{100}$$

8)

Induktionsbevis.

bas: $n=1$ $VL=1$, $HL = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$ ✓

Antag sant för $n \geq 1$ och visa för $n+1$.

$$VL_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^3} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} + \frac{1}{(n+1)^3} \leq \left\{ \text{ind. ant.} \right\} \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^3}$$

Det återstår att visa att $\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^3} \leq HL_{n+1} =$
 $= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{(n+1)^2}$

det $\frac{1}{(n+1)^3} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{(n+1)^2 - n^2}{(n+1)^2 n^2} = \frac{1}{2} \frac{2n+1}{(n+1)^2 n^2}$

multiplicera med $(n+1)^3$. Olikheten är ekvivalent med

$$1 \leq \frac{1}{2} \frac{(2n+1)(n+1)^3}{(n+1)^2 n^2} = \frac{1}{2} \frac{(2n+1)(n+1)}{n^2} = \left(1 + \frac{1}{2n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

vilket är uppenbart sant.

Uppgiften följer nu med induktion.

9).

(f) Om $A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$, lät $h_1(A) = 0, x_1 x_2 x_3 \dots$
vara den binära utvecklingen av det tal där

$$x_i = \begin{cases} 0 & \text{om } i \notin A \\ 1 & \text{om } i \in A \end{cases}$$

h_1 är en surjektion $h_1: \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \rightarrow [0, 1]$.

Lät vidare $h_2: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ vara definierad av

$$h_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } x = 0 \text{ eller } 1 \\ \frac{2x-1}{x(1-x)} & \text{om } x \in (0, 1) \end{cases}$$

Då är $h_2: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ en surjektion

Därför är $f = h_2 \circ h_1: \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}$
en surjektion.

(g) Funktionen $r_1: \mathbb{R} \rightarrow (0, 1)$, $r_1(x) = \frac{1}{1+e^x}$ är
en bijektion.

Funktionen $r_2: (0, 1) \times (0, 1) \rightarrow (0, 1)$, vara definierad

av $r_2(x, y) = z$, där $z = 0, x_1 y_1 x_2 y_2 x_3 y_3 \dots$

där $x = 0, x_1 x_2 x_3 \dots$ och $y = 0, y_1 y_2 y_3 \dots$ är
binära utvecklingen av $x \leq y$ (undvik oändliga
följder av 1'or)

Då är r_2 injektiv.

Lät $r_3: (0, 1) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ vara definierad av

$$r_3(0, x_1 x_2 x_3 \dots) = \{i : x_i = 1\}.$$

r_3 är injektiv.

9 (forts).

Låt nu $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ vara
definierad av $g(x, y) = r_3(r_2(r_1(x), r_1(y)))$

Av konstruktionen följer att

g är surjektiv

**Tentamen SF1671 Baskurs med Diskret matematik,
2021-12-22**

Skrivtid: 08:00–13:00

Tillåtna hjälpmedel: Inga utom penna, suddgummi och linjal.

Examinator: Petter Brändén, 08-790 65 41

Maximal poäng på tentamen är 36 poäng. Tentan är indelad i tre delar I, II och III om max 12 poäng vardera. Eventuella bonuspoäng läggs till poängen på del I, det kan dock aldrig överstiga 12 poäng. Bonuspoängen framgår om ni loggar in på kurshemsidan och läggs till automatiskt.

Betygsgränserna vid denna tentamen kommer att ges enligt

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del III	6	3	-	-	-	-

För full päng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar som inte är standard i kursen definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som har allvarliga brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I

1. (4p) Finn alla heltalslösningar till den Diofantiska ekvationen $495x + 576y = 63$.

2. (4p) Finn alla lösningar till ekvationen $\sin(5x + 2) + \cos(|2 - 3x|) = 0$.

3. På denna uppgift krävs bara svar (ingen motivering). Svaren på c) och d) får innehålla heltal, potenser, fakulteter och de fyra enkla räknesätten.

a) (1p) Skriv upp sanningstabellen för $(q \vee \neg p) \rightarrow (p \wedge q)$.

b) (1p) Relationen $\mathcal{R}$ på mängden $\mathbb{Z}$ ges av $\mathcal{R} = \{(i, j) : |j - i| \leq 4\}$. Vilka av egenskaperna reflexiv, symmetrisk, anti-symmetrisk och/eller transitiv har $\mathcal{R}$?

c) (1p) På hur många olika sätt kan 15 olika bollar fördelas i 4 olika lådor?

d) (1p) Fem kort ska dras slumpvis från en vanlig (perfekt blandad) kortlek. Vad är sannolikheten att du endast får damer, knektar och/eller kungar?

Kom ihåg att en kortlek består av 52 kort:

$\heartsuit 1, \heartsuit 2, \dots, \heartsuit 10, \heartsuit$ -knekt, $\heartsuit$ -dam, $\heartsuit$ -kung, $\diamondsuit 1, \diamondsuit 2, \dots, \diamondsuit 10, \diamondsuit$ -knekt, $\diamondsuit$ -dam, $\diamondsuit$ -kung,
 $\clubsuit 1, \clubsuit 2, \dots, \clubsuit 10, \clubsuit$ -knekt, $\clubsuit$ -dam, $\clubsuit$ -kung, $\spadesuit 1, \spadesuit 2, \dots, \spadesuit 10, \spadesuit$ -knekt, $\spadesuit$ -dam, $\spadesuit$ -kung.

DEL II

4. (4p) Skriv polynomet $3x^3 + 7x^2 + 13x + 12$ som en produkt av irreducibla polynom.
5. (4p) Bestäm högstgradstermen i polynomet $(x^3 + 3x)^{20} - (x^5 - 2x^2)^{12}$.
Obs! Högstgradstermen i $-3x^7 + 5x^4 + 2x^3 - 4x + 1$ är $-3x^7$.
6. (4p) Bestäm antalet inverterbara element i $\mathbb{Z}_{396}$.
(Svaret får innehålla heltal, potenser, faktorer, binomialtal, Stirlingtal och de fyra enkla räknesätten.)
-

DEL III

7. (4p) Tio personer ska ställa sig i en kö. Alla är olika långa och alla ska ställa sig i kön. På hur många olika sätt kan de göra det om högst en av dem får vara kortare än den som står på platsen framför?
(Svaret får innehålla heltal, potenser, faktorer, binomialtal, Stirlingtal och de fyra enkla räknesätten.)
8. (4p) Bevisa, med induktion eller stark induktion, att för alla naturliga tal n ,

$$\sum_{k=0}^n k^5 \leq \frac{(n+1)^6 - 1}{6}.$$

9. (4p) Låt $\mathcal{M} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, \dots\}$ vara mängden av alla positiva heltal vars enda primtalsdelare är 2 och 3. Bevisa att $\mathcal{M}$ har samma kardinalitet som $\mathbb{Z}$ genom att beskriva en explicit bijektion $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{Z}$.

1). Beräkna först $\text{sgd}(576, 495)$ med Euklides alg.

$$576 = 1 \cdot 495 + 81$$

$$495 = 6 \cdot 81 + 9$$

$$81 = 9 \cdot 9 + 0$$

så $\text{sgd} = 9$, som delar 63.

Alltså finns lösningar.

hitta partikulärlösning genom att gå baklänges i Euklides:

$$9 = 495 - 6 \cdot 81$$

$$= 495 - 6 \cdot (576 - 495)$$

$$= 495 \cdot 7 + (-6) \cdot 576$$

Multiplikera med 7: $495 \cdot (49) + (-42) \cdot 576 = 63$

$x_0 = 49$ o $y_0 = -42$ är en partikulärlösning.

Den allmänna lösningen ges nu enligt formel från föreläsning:

$$x = 49 - \frac{576}{9} n$$

$$y = -42 + \frac{495}{9} n$$

, $n \in \mathbb{Z}$

dvs

$$x = 49 - 64 n$$

$$y = -42 + 55 n$$

, $n \in \mathbb{Z}$

2). Notera först att $\cos(x)$ är en jämn funktion,
så $\cos(|2-3x|) = \cos(2-3x)$.

Nu gäller $\sin(5x+2) + \cos(2-3x) = 0$ om m
 $\cos(2-3x) = -\sin(5x+2) = \sin(-2-5x)$
 $= \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2 + 5x\right)$

eftersom $\sin(x)$ är udda och trigon. formel.

— Kom ihåg att $\cos(y) = \cos(z)$ om m

$$z = \pm y + 2\pi \cdot n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

— Således har vi två fall:

(+). $2-3x = \frac{\pi}{2} + 2 + 5x + 2\pi \cdot n$ där
 $8x = -\frac{\pi}{2} - 2\pi \cdot n$ där $x = -\frac{\pi}{16} - \frac{\pi}{4}n$
(här är $n \in \mathbb{Z}$ godtyckligt).

(-). $2-3x = -\frac{\pi}{2} - 2 - 5x + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$
 $2x = -\frac{\pi}{2} - 4 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$
 $x = -\frac{\pi}{4} - 2 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

Svar,

$$x = -\frac{\pi}{16} - \frac{\pi}{4}n \text{ eller } x = -\frac{\pi}{4} - 2 + \pi n$$

där $n \in \mathbb{Z}$.

Låt $A = (q \vee \neg p)$; $B = p \wedge q$

3) a)

p	q	A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

vi får alltså tabellen:

p	q	$A \rightarrow B$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

b) reflexiv, symmetrisk

c). 4^{15}

d). $\frac{\binom{12}{5}}{\binom{52}{5}} = \frac{12! \cdot 47!}{7! \cdot 52!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}$

↑
godkända svar.

4). Gissa rationell rot m ha sats från kursen.

Potentiell rot är $r = \frac{a}{b}$, där

$$a = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 12$$

$$b = \pm 1, \pm 3$$

Test ger att $-\frac{4}{3}$ är en rot. Faktorsatsen
säger nu att $3x+4$ är en faktor. Dela med
 $3x+4$:

$$\begin{array}{r} x^2 + x + 3 \\ 3x^3 + 7x^2 + 13x + 12 \quad \boxed{3x+4} \\ -(3x^3 + 4x^2) \\ \hline 3x^2 + 13x + 12 \\ -(3x^2 + 4x) \\ \hline 9x + 12 \\ -(9x + 12) \\ \hline 0 \end{array}$$

$x^2 + x + 3$ är irreducibelt
eftersom saknar reella
rötter enligt p-q-formeln.

$$\text{Så } 3x^3 + 7x^2 + 13x + 12 = (3x+4) \cdot (x^2 + x + 3)$$

5). Enligt Binomialsatsen är

$$(x^3 + 3x)^{20} = (x^3)^{20} + \binom{20}{1}(x^3)^{19} \cdot (3x) + \text{lågare termer}$$

$$= x^{60} + 60x^{58} + \text{lågare termer}$$

$$(x^5 - 2x^2)^{12} = (x^5)^{12} + \binom{12}{1}(x^5)^{11} \cdot (-2x^2) + \text{lågare termer}$$

$$= x^{60} - 24x^{57} + \text{lågare termer}$$

Så $(x^3 + 3x)^{20} - (x^5 - 2x^2)^{12} = 60 \cdot x^{58} + \text{lågare termer}$

Svar: $60x^{58}$

6). Notera att $396 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11 = \mathcal{U}$.
 Ett element $x \in \{1, 2, \dots, 396\}$ är inverterbart
 i $\mathbb{Z}_{396}$ om och endast om $\text{sgd}(x, 396) = 1$, dvs om
 varken 2, 3 eller 11 delar x .

Låt $A_k = \{x \in \mathcal{U} : k \text{ delar } x\}$ PIE ger

Vi söker $\# = |\mathcal{U} \setminus (A_2 \cup A_3 \cup A_{11})| = |\mathcal{U}| - |A_2| - |A_3| - |A_{11}| + |A_2 \cap A_3|$
 $+ |A_2 \cap A_{11}| + |A_3 \cap A_{11}| - |A_2 \cap A_3 \cap A_{11}|$

Vi har
 $|A_2| = |\mathcal{U}|/2 = 198$, $|A_3| = |\mathcal{U}|/3 = 132$, $|A_{11}| = 36$

$|A_2 \cap A_3| = |A_6| = 66$, $|A_2 \cap A_{11}| = |A_{22}| = 18$, $|A_3 \cap A_{11}| = 12$

$|A_2 \cap A_3 \cap A_{11}| = |A_{66}| = 6$

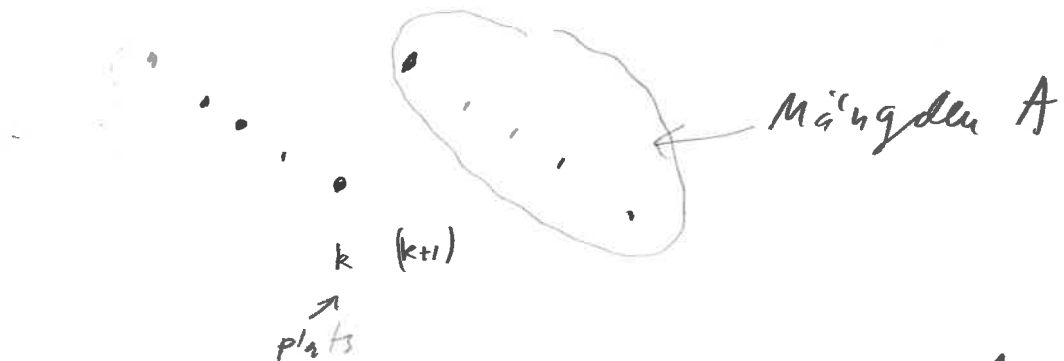
Så $\# = 120$

Svar: 120

7)

Det finns exakt en kö där ingen är kortare än den som står framför.

Om personen på plats k är kortare än den på plats $k+1$, så ser kön ut som:



Kön är då bestämd av mängden A .

Det finns exakt $\binom{10}{k} - 1$ sådana A
(eftersom vi får inte ha $A = \{1, 2, \dots, 10-k\}$)

Vi får alltså att antalet sådana köer är

$$1 + \sum_{k=1}^9 \left(\binom{10}{k} - 1 \right) = 1 + \sum_{k=0}^9 \left(\binom{10}{k} - 1 \right)$$

$$= 1 + \sum_{k=0}^9 \binom{10}{k} - 11 = 2^{10} - 10$$

Svar: $2^{10} - 10$

8). Beris med induktion.

Bas: $n=0$

$$VL = 0$$

$$HL = (1-1)/6 = 0$$

✓

Induktionssteg: Antag sant för något $n \geq 0$ och visa att då är det även sant för $n+1$

$$VL_{n+1} = VL_n + \overset{\text{induktionsantagande}}{(n+1)^5} \leq HL_n + (n+1)^5 = \frac{(n+1)^6 - 1}{6} + 6 \cdot (n+1)^5$$

Det återstår alltså att visa att

$$\frac{(n+1)^6 - 1}{6} + 6(n+1)^5 \leq HL_{n+1} = \frac{(n+2)^6 - 1}{6}$$

vilket är ekvivalent med

$$(n+1)^6 + 6(n+1)^5 \leq (n+2)^6$$

Binomialsatsen ger $(n+2)^6 = ((n+1)+1)^6 = (n+1)^6 + 6(n+1)^5 + \dots$

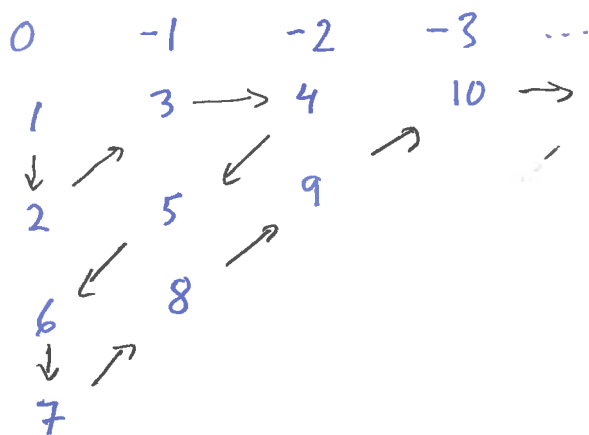
Så $(n+2)^6 \geq (n+1)^6 + 6(n+1)^5$.

Påståendet följer nu av induktionsaxiomet.

9). $M = \{2^k 3^l : k, l \in \mathbb{N}\}$. Vi kan skapa en bijektion genom följande variant av diagonalargumentet:

$$\begin{array}{cccc}
 2^0 3^0 & 2^0 3^1 & 2^0 3^2 & 2^0 3^3 & \dots \\
 2^1 3^0 & 2^1 3^1 & 2^1 3^2 & 2^1 3^3 & \dots \\
 2^2 3^0 & 2^2 3^1 & 2^2 3^2 & 2^2 3^3 & \dots \\
 2^3 3^0 & 2^3 3^1 & 2^3 3^2 & 2^3 3^3 & \dots \\
 2^4 3^0 & 2^4 3^1 & 2^4 3^2 & 2^4 3^3 & \dots
 \end{array}$$

↓ f



Tentamen SF1671 Baskurs med Diskret matematik,
2022-10-26

Skrivtid: 08:00–13:00

Tillåtna hjälpmedel: Inga utom penna, suddgummi och linjal.

Examinator: Petter Brändén, 08-790 65 41

Maximal poäng på tentamen är 36 poäng. Tentan är indelad i tre delar I, II och III om max 12 poäng vardera. Eventuella bonuspoäng läggs till poängen på del I, det kan dock aldrig överstiga 12 poäng. Bonuspoängen framgår om ni loggar in på kurshemsidan och läggs till automatiskt.

Betygsgränserna vid denna tentamen kommer att ges enligt

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del III	6	3	-	-	-	-

För full päng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar som inte är standard i kursen definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som har allvarliga brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I

1. (4p) För vilka x gäller $\arctan(\sinh(x)) = \pi/3$?

2. (4p) Finn alla lösningar till ekvationen $330x + 342 = 0$ i $\mathbb{Z}_{384}$.

3. På denna uppgift krävs bara svar (ingen motivering). Svaren på c) och d) får innehålla heltal, potenser, faktorer och de fyra enkla räknesätten.

a) (1p) Skriv upp sanningstabellen för $(q \rightarrow p) \rightarrow (p \wedge q)$.

b) (1p) Relationen $\mathcal{R}$ på mängden $\mathbb{R}$ ges av $\mathcal{R} = \{(x, y) : y > 4x\}$. Vilka av egenskaperna reflexiv, symmetrisk, anti-symmetrisk och/eller transitiv har $\mathcal{R}$?

c) (1p) På hur många olika sätt kan 15 identiska bollar fördelas i 5 olika (numrerade) lådor?

d) (1p) Fem kort ska dras slumpvis från en vanlig (perfekt blandad) kortlek. Vad är sannolikheten för att du får minst en dam?

Kom ihåg att en kortlek består av 52 kort:

$\heartsuit 1, \heartsuit 2, \dots, \heartsuit 10, \heartsuit\text{-knekt}, \heartsuit\text{-dam}, \heartsuit\text{-kung},$ $\diamondsuit 1, \diamondsuit 2, \dots, \diamondsuit 10, \diamondsuit\text{-knekt}, \diamondsuit\text{-dam}, \diamondsuit\text{-kung},$
 $\clubsuit 1, \clubsuit 2, \dots, \clubsuit 10, \clubsuit\text{-knekt}, \clubsuit\text{-dam}, \clubsuit\text{-kung},$ $\spadesuit 1, \spadesuit 2, \dots, \spadesuit 10, \spadesuit\text{-knekt}, \spadesuit\text{-dam}, \spadesuit\text{-kung}.$

DEL II

4. (4p) Bestäm alla $x \in \mathbb{R}$ sådana att $5x^3 + 7x^2 - 3x > 2$.

5. (4p) Talföljden $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ definieras av $a_0 = 0$, $a_1 = 2$, $a_2 = 8$ och

$$a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-3} + 2^{n-2}(n+1), \quad \text{för alla } n \geq 3.$$

Visa med induktion eller stark induktion att $a_n = n2^n$ för alla $n \in \mathbb{N}$.

6. (4p) Bestäm resten av 1222^{2403} vid division med 601.

Tips. 601 är ett primtal.

DEL III

7. (4p) 50 olika personer ska delas upp i fyra olika (numrerade) grupper. På hur många olika sätt kan detta göras om vi kräver att varje grupp innehåller minst två personer.

(Svaret får innehålla heltal, potenser, faktorer, binomialtal, Stirlingtal och de fyra enkla räknesätten.)

8. (4p) Hur många lösningar till

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{17} = 3400, \quad x_i \in \mathbb{N}$$

satisfierar $x_i \equiv i \pmod{17}$ för alla $1 \leq i \leq 17$?

(Svaret får innehålla heltal, potenser, faktorer, binomialtal, Stirlingtal och de fyra enkla räknesätten.)

9. (4p) Bestäm kardinaliteten för $\mathbb{R} \times \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Svaret ska vara $|\mathbb{R}|$, $|\mathcal{P}(\mathbb{R})|$ eller $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))|$.

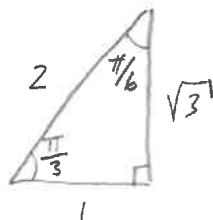
1) Eftersom $\arctan(x)$

är inversen till

$\tan(x): (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$, så

är $\arctan(\sinh(x)) = \frac{\pi}{3}$

om $\sinh(x) = \sqrt{3}$. Vi ska alltså lösa



$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sqrt{3}$$

Låt $y = e^x$. Vi får då $y - y^{-1} = 2\sqrt{3}$ ($y > 0$).

Multiplikera med y : $y^2 - 2\sqrt{3}y - 1 = 0$

$$y = \sqrt{3} \pm \sqrt{3+1} = \sqrt{3} \pm 2. \text{ Men } y > 0, \text{ så}$$

$$e^x = y = \sqrt{3} + 2, \text{ dvs } x = \ln(\sqrt{3} + 2)$$

Svar: $x = \ln(\sqrt{3} + 2)$

2). För $x \in \mathbb{Z}$ gäller att $330x + 342 \equiv 0 \pmod{384}$
 om $330x \equiv 384 - 342 \equiv 42 \pmod{384}$ om

$384 \mid (42 - 330x)$ om m. finns $y \in \mathbb{Z}$ s.a.

$42 - 330x = 384y$. Vi löser den Diofantiska
 ekvationen $330x + 384y = 42$

Partikulärlösning: Euklides alg. Dividera först med 6:

$$55x + 64y = 7$$

$$64 = 1 \cdot 55 + 9$$

$$55 = 6 \cdot 9 + 1$$

gå baklänges:

$$1 = 55 - 6 \cdot 9 = 55 - 6 \cdot (64 - 55) =$$

$$= 7 \cdot 55 - 6 \cdot 64 = 55 \cdot 7 + 64 \cdot (-6)$$

Så $55 \cdot 49 + 64 \cdot (-42) = 7$

Den allmänna lösningen (för x) är då

$$x = 49 + 64k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Vi är intresserade av lösningarna i 384

k	0	1	2	3	4	5
x	49	113	177	241	305	369

Svar: 49, 113, 177, 241, 305, 369

3a)

p	q	$(q \rightarrow p) \rightarrow (p \wedge q)$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

3b). Ingen av egenskaperna

Reflex. $0R0$

Symmetr. $0R1$ men $1R0$

anti-sym. $(-1)R(-2) \not\subseteq (-2)R(-1)$

trans. $(-1)R(-2) \not\subseteq (-2)R(-1)$ men $(-1)R(-1)$

3c). $\begin{pmatrix} 19 \\ 4 \end{pmatrix}$

3d). $1 - \frac{48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}$

4/ $5x^3 + 7x^2 - 3x - 2 > 0$

Gissa rot: $-\frac{2}{5}$ $\swarrow f(x)$

Delat med $5x+2$

$$\begin{array}{r}
 x^2 + x - 1 \\
 \hline
 5x^3 + 7x^2 - 3x - 2 \quad 5x+2 \\
 - (5x^3 + 2x^2) \\
 \hline
 5x^2 - 3x - 2 \\
 - (5x^2 + 2x) \\
 \hline
 -5x - 2 \\
 - (-5x - 2) \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

$x^2 + x - 1$ har rötter $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$

Så $f(x)$ har rötterna

$$\underbrace{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}}_{\alpha} < \underbrace{-\frac{2}{5}}_{\beta} < \underbrace{\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}}_{\gamma}$$

$f(x) = 5(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$, Teckenbord:

	$(-\infty, \alpha)$	(α, β)	(β, γ)	(γ, ∞)
$x-\alpha$	-	+	+	+
$x-\beta$	-	-	-	+
$x-\gamma$	-	-	-	+
$f(x)$	-	+	-	+

Vi ser att $f(x) > 0$ precis då $\alpha < x < \beta$ eller $x > \gamma$

Svar: $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} < x < -\frac{2}{5}$ eller $x > \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}$

5). Vi använder stark induktion

Basfall: $a_0 = 0 = 0 \cdot 2^0$ ✓
 $a_1 = 2 = 1 \cdot 2^1$ ✓
 $a_2 = 8 = 2 \cdot 2^2$

Induktionssteg: Antag sant för $0, 1, 2, \dots, n-1$
där $n \geq 3$. Visa för n .

$$\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1} - 2a_{n-3} + 2^{n-2}(n+1) = \{ \text{ind. antagande} \} \\ &= 2(n-1)2^{n-1} - 2(n-3)2^{n-3} + (n+1)2^{n-2} \\ &= (n-1)2^n - (n-3)2^{n-2} + (n+1)2^{n-2} \\ &= 2^{n-2} [4n-4 - n+3 + n+1] \\ &= 2^n \cdot n \end{aligned}$$

Påståendet följer nu enligt (starka)
induktionsprincipen.

6). Vi förenklar 1222^{2403} i $\mathbb{Z}_{601}$.

- $1222 = 2 \cdot 601 + 20 = 20$ i $\mathbb{Z}_{601}$
- $2403 = 4 \cdot 600 + 3$

(Enligt Fermats lilla
är $20^{600} = 1$ i $\mathbb{Z}_{601}$)

$$1222^{2403} = 20^{2403} = 20^{4 \cdot 600 + 3} = (20^{600})^4 \cdot 20^3$$

$$= 20^3 = 8000 = 13 \cdot 601 + 187 = 187$$

i $\mathbb{Z}_{601}$. Så resten är 187

Svar: 187

7). Låt $\mathcal{U}$ vara mängden av alla fördelningarna i 4 olika icke-tomma grupper. Så $|\mathcal{U}| = 4! S(50, 4)$

Låt A_i vara alla fördelningarna s.a. grupp i består av en person. Vi är inte efter

$$|\mathcal{U} \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)| = *$$

$$|A_i| = 50 \cdot \underbrace{3! S(49, 3)}_{\substack{\uparrow \\ \text{välj person som ska vara i grupp } i,}} \quad (4 \text{ st.})$$

fördela resten.

$$|A_i \cap A_j| = 50 \cdot 49 \cdot \underbrace{2! S(48, 2)}_{\left(\binom{4}{2} \text{ st.}\right)}$$

$$|A_i \cap A_j \cap A_k| = 50 \cdot 49 \cdot 48 \quad \left(\binom{4}{3} \text{ st.}\right)$$

Enligt PIE är

$$\begin{aligned} * &= |\mathcal{U}| - (|A_1| + |A_2| + \dots) + (|A_1 \cap A_2| + \dots) - (|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \dots) \\ &= 4! S(50, 4) - 4 \cdot 50 \cdot 3! S(49, 3) + \binom{4}{2} 50 \cdot 49 \cdot 2! S(48, 2) \\ &\quad - 4 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \end{aligned}$$

8/. Vi kan omformulera som antalet lösningar till

$$x_0 + x_1 + \dots + x_{16} = 3400, \quad x_i \in \mathbb{N}$$

där $x_i \equiv i \pmod{17}$ för all i .

Enligt sats om division kan vi skriva x_i unikt

som $x_i = 17 \cdot q_i + i$, där $q_i \geq 0$. Vi får ekvationen

$$17q_0 + 0 + 17q_1 + 1 + 17q_2 + 2 + \dots + 17q_{16} + 16 = 3400$$

$$\text{dvs} \quad 17(q_0 + \dots + q_{16}) + \frac{17 \cdot 16}{2} = 3400 = 17 \cdot 200$$

↑
aritmetisk summa.

Detta förenklas till

$$q_0 + q_1 + \dots + q_{16} = 192, \quad q_i \geq 0$$

Antalet lösningar är alltså $\binom{192+17-1}{17-1} = \binom{208}{16}$

9). Vi använder Schröder-Bernstein för
att visa att $|\mathbb{R} \times \mathcal{P}(\mathbb{R})| = |\mathcal{P}(\mathbb{R})|$

Vi har en injektion $f: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \times \mathcal{P}(\mathbb{R})$

$$f(S) = (0, S)$$

Konstruera en injektion $g: \mathbb{R} \times \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$

$$g(x, S) = \{-e^x\} \cup \{e^y : y \in S\}$$

Detta är en injektion eftersom $-e^x$ är det
enda negativa talet i $g(x, S)$ och e^y
är injektiva.

Eftersom både f & g är injektioner
ger Schröder-Bernstein att $|\mathbb{R} \times \mathcal{P}(\mathbb{R})| = |\mathcal{P}(\mathbb{R})|$
 $\square$

**Tentamen SF1671 Baskurs med Diskret matematik,
2022-12-21**

Skrivtid: 08:00–13:00

Tillåtna hjälpmedel: Inga utom penna, suddgummi och linjal.

Examinator: Petter Brändén, 08-790 65 41

Maximal poäng på tentamen är 36 poäng. Tentan är indelad i tre delar I, II och III om max 12 poäng vardera. Eventuella bonuspoäng läggs till poängen på del I, det kan dock aldrig överstiga 12 poäng.

Betygsgränserna vid denna tentamen kommer att ges enligt

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del III	6	3	-	-	-	-

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar som inte är standard i kursen definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som har allvarliga brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I

1. (4p) Lös ekvationen $x^2 + |x + 1/2| = 3$, $x \in \mathbb{R}$.

2. (4p) Finn alla heltalslösningar till den diofantiska ekvationen $267x + 99y = 216$.

3. På denna uppgift krävs bara svar (ingen motivering). Svaren på c) och d) får innehålla heltal, potenser, faktorer och de fyra enkla räknesätten.

a) (1p) Skriv upp sanningstabellen för $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q)$.

b) (1p) Relationen $\mathcal{R}$ på $X = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ ges av $A\mathcal{R}B$ om och endast om det finns en injektion $f : A \rightarrow B$. Vilka av egenskaperna reflexiv, symmetrisk, anti-symmetrisk och/eller transitiv har $\mathcal{R}$? (Kom ihåg att $\mathcal{P}(\mathbb{R}) = \{S \mid S \subseteq \mathbb{R}\}$).

c) (1p) Hur många följder $a_1, a_2, \dots, a_9$ av positiva heltal sådana att

$$1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_9 \leq 19$$

finns det?

d) (1p) Hur många olika ord kan man bilda genom att kasta om bokstäverna i ordet RAGGARGRANNAR?

DEL II

4. (4p) Lös olikheten $3x^3 - x^2 + 5x \leq 12$, $x \in \mathbb{R}$.

5. (4p) Bestäm resten av $35^{(35^{35})}$ vid division med 19.

Tips. Använd Fermats lilla sats.

6. (4p) 8 olika gåvor ska lottas ut slumpvis till 10 olika personer. Vad är sannolikheten att ingen person får fler än en gåva?

(Svaret får innehålla heltal, potenser, fakulteter, binomialtal, Stirlingtal och de fyra enkla räknesätten.)

DEL III

7. (4p) Talföljden $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ definieras av $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ och

$$a_n = (n-1)(a_{n-1} + a_{n-2}), \quad \text{för alla } n \geq 2.$$

Visa med induktion eller stark induktion att $a_n \geq n!/3$ för alla $n \geq 2$.

8. (4p) Låt $1 \leq k \leq n$ vara positiva heltal. Hur många följder av heltal $a_1, a_2, \dots, a_k$ sådana att

$$0 < a_1 < a_2 < \dots < a_k \leq n$$

och

$$a_i \equiv i \pmod{2}, \quad \text{för alla } 1 \leq i \leq n$$

finns det?

(Svaret får innehålla heltal, potenser, fakulteter, binomialtal, Stirlingtal och de fyra enkla räknesätten.)

9. (4p) 60 olika saker ska fördelas till 9 olika personer (Person 1, Person 2, ..., Person 9). På hur många olika sätt kan detta göras om vi kräver att

- alla saker ska delas ut, och
- varje person ska få minst en sak, och
- Person 1 ska få minst tre saker, och
- Person 2, Person 3 och Person 4 ska få minst två saker vardera?

(Svaret får innehålla heltal, potenser, fakulteter, binomialtal, Stirlingtal och de fyra enkla räknesätten.)

Lösningsförslag Overtentamen SF1671
2022-12-21

1). Vi delar upp i två fall

a) $x \geq -1/2$

b) $x < -1/2$

a). Ekvationen blir $x^2 + x + \frac{1}{2} = 3$ dvs

$x^2 + x - \frac{5}{2} = 0$. Den har lösningar

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{10}{4}}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{11}}{2}$$

Endast $x = \frac{\sqrt{11} - 1}{2}$ ligger i intervallet

a).

b). Ekvationen blir $x^2 - x - \frac{1}{2} = 3$ dvs

$x^2 - x - \frac{7}{2} = 0$. Den har lösningar

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{14}{4}}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{15}}{2}$$

Endast $\frac{1 - \sqrt{15}}{2}$ ligger i intervallet b).

Svar: $x = \frac{\sqrt{11} - 1}{2}$ och $x = \frac{1 - \sqrt{15}}{2}$

2). Börja med att hitta partikulärlösning
med Euklides algoritmen.

$$267 = 2 \cdot 99 + 69$$

$$99 = 1 \cdot 69 + 30$$

$$69 = 2 \cdot 30 + 9$$

$$30 = 3 \cdot 9 + 3$$

$$9 = 3 \cdot 3$$

Gå baklänges i Euklides alg.

$$3 = 30 - 3 \cdot 9 =$$

$$= 30 - 3 \cdot (69 - 2 \cdot 30) = 7 \cdot 30 - 3 \cdot 69$$

$$= 7 \cdot (99 - 2 \cdot 69) - 3 \cdot 69 = 7 \cdot 99 - 10 \cdot 69$$

$$= 7 \cdot 99 - 10 \cdot (267 - 2 \cdot 99)$$

$$= 27 \cdot 99 - 10 \cdot 267$$

Så $\text{sgd}(267, 99) = 3$ och

$3 \mid 216$. Alltså finns lösning.

$$216 = 72 \cdot 3 =$$

$$= 72 \cdot (267 \cdot (-10) + 99 \cdot 27)$$

$$= 267 \cdot (-10 \cdot 72) + 99 \cdot (27 \cdot 72)$$

Så en partikulärlösning är $x_0 = -10 \cdot 72$,

$$y_0 = 27 \cdot 72.$$

Den allmänna lösningen ges av (från föreläsningen)

$$x = -10 \cdot 72 - n \frac{99}{3} = -720 - 33n$$

$$y = 27 \cdot 72 + n \frac{267}{3} = 1944 + 89n$$

där $n \in \mathbb{Z}$.

3 a)

p	q	$(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q)$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

b) reflexiv, transitiv

$$c) \quad \binom{27}{9} = \frac{27!}{9!18!}$$

$$d). \quad \binom{13}{4,4,3,2} = \frac{13!}{4!4!3!2!}$$

4). Lös först $3x^3 - x^2 + 5x - 12 = 0$

Gissa rot $x = r/s$, $r|12$ & $s|3$

Insättning ger $x = 4/3$. Dela med $3x - 4$

$$\begin{array}{r} x^2 + x + 3 \\ \hline 3x^3 - x^2 + 5x - 12 \quad \boxed{3x - 4} \\ - (3x^3 - 4x^2) \\ \hline 3x^2 + 5x - 12 \\ - (3x^2 - 4x) \\ \hline 9x - 12 \\ - (9x - 12) \\ \hline 0 \end{array}$$

Så

$$f(x) := 3x^3 - x^2 + 5x - 12 = (3x - 4)(x^2 + x + 3)$$

Kolla om $x^2 + x + 3$ har reella rötter.

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 3}$$

Nej, ty $\frac{1}{4} - 3 < 0$.

Så $x^2 + x + 3 > 0$ för alla x .

Därför gäller $f(x) \leq 0$ om $3x - 4 \leq 0$
om $x \leq \frac{4}{3}$

Svar: $x \leq \frac{4}{3}$

5). Notera att 19 är ett primtal så
 $a^{18} = 1$ i $\mathbb{Z}_{19}$, om $a \neq 0$ i $\mathbb{Z}_{19}$. (Fermats lilla)

Bestäm resten av 35^{35} vid division med 18.

Räkna i $\mathbb{Z}_{18}$: $35^{35} = (-1)^{35} = -1$ i $\mathbb{Z}_{18}$.

Så $35^{35} = n \cdot 18 - 1$, för ett positivt heltal n .

I $\mathbb{Z}_{19}$ har vi:

$$35^{(35^{35})} = 35^{n \cdot 18 - 1} = (35^{18})^n \cdot 35^{-1} = 35^{-1} = (-3)^{-1}$$

enligt Fermats lilla sats. Bestäm nu $(-3)^{-1}$ i $\mathbb{Z}_{19}$:

Notera att i $\mathbb{Z}_{19}$ gäller $(-3) \cdot 6 = -18 = -19 + 1 = 1$

$$\text{Så } (-3)^{-1} = 6$$

Svar: Resten är 6.

6). Låt Ω beteckna alla möjliga utfall, dvs alla fördelningar av 8 olika gåvor till 10 olika personer.

$$\begin{aligned} |\Omega| &= \text{antalet funktioner från } \{1, 2, \dots, 8\} \\ &\quad \text{till } \{1, 2, \dots, 10\} \\ &= 10^8 \end{aligned}$$

Vi är intresserade av händelsen, A , att ingen får fler än en gåva, dvs att funktionen är injektiv. Så

$$\begin{aligned} |A| &= \text{antalet injektioner från } \{1, 2, \dots, 8\} \\ &\quad \text{till } \{1, 2, \dots, 10\} \\ &= 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \end{aligned}$$

Så sannolikheten för A är

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{10^8}$$

$$\text{Svar: } \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{10^8}$$

7). Vi visar med stark induktion att

$$a_n \geq \frac{n!}{3} \quad \text{för alla } n \geq 2.$$

$$a_2 = 1 \cdot (1+0) = 1 \geq \frac{2!}{3} = \frac{2!}{3} \quad \checkmark$$

$$a_3 = 2 \cdot (1+0) = 2 = \frac{3!}{3} \quad \checkmark$$

Låt nu $n \geq 4$ och att $a_k \geq \frac{k!}{3}$ för alla
 $2 \leq k \leq n-1$ och bevisa med stark induktion

att $a_n \geq \frac{n!}{3}$;

$$a_n = (n-1)(a_{n-1} + a_{n-2}) \geq (n-1) \frac{(n-1)!}{3} + (n-1) \frac{(n-2)!}{3}$$

← induktionsantagande

$$= \frac{(n-1)!}{3} (n-1+1) = \frac{n(n-1)!}{3} = \frac{n!}{3}$$

Påståendet följer nu enligt induktionsprincipen.

8). Vi kan uttrycka a_i unikt på formen

$$a_i = 2x_i + i, \quad 1 \leq i \leq k, \quad x_i \in \mathbb{Z}.$$

- Villkoret $a_i < a_{i+1}$ säger då att

$$2x_i + i < 2x_{i+1} + i + 1 \quad \text{dvs} \quad 2(x_{i+1} - x_i) > -1$$

$$\text{dvs} \quad x_{i+1} - x_i > -\frac{1}{2} \quad \text{dvs} \quad x_{i+1} \geq x_i.$$

- Villkoret $0 < a_1$ säger att $0 < 2x_1 + 1$
dvs $x_1 > -\frac{1}{2}$ dvs $x_1 \geq 0$.

- Villkoret $a_k \leq n$ säger att $2x_k + k \leq n$
dvs $x_k \leq \frac{n-k}{2}$.

Låt m vara det största heltalet sådant att $m \leq \frac{n-k}{2}$ (Dvs $m = \lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor$).

Av ovan får vi att antalet a_i som uppfyller olikheterna är lika många som antalet heltal s.a.

$$0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_k \leq m$$

dvs

Svar: $\binom{m+k}{k}$ där $m = \lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor$

9). Vi räknar först ut antalet fördelningar
då vi inte bryr oss om det tredje
villkoret. Kalla detta tal B .

Låt $\mathcal{U}$ vara mängden av alla
surjektioner $f: \{1, 2, \dots, 60\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 9\}$.

Låt $A_i = \{f \in \mathcal{U} \mid \nexists x \mid f(x) = i \text{ för exakt ett } x\}$.

Då är $B = |\mathcal{U} \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)|$.

Använd principen för inklusion/exklusion (PIE)

$$\begin{aligned} |A_i| &= 60 \cdot \text{antalet surjektioner } f: \{1, \dots, 59\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 8\} \\ &= 60 \cdot 8! S(59, 8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |A_i \cap A_j| &= 60 \cdot 59 \cdot \text{antal surjektioner } f: \{1, \dots, 58\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 7\} \\ &= 60 \cdot 59 \cdot 7! S(58, 7) \end{aligned}$$

$$|A_i \cap A_j \cap A_k| = 60 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 6! S(57, 6)$$

$$|A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l| = 60 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 57 \cdot 5! S(56, 5)$$

Av PIE följer nu att

$$\begin{aligned} B &= 9! S(60, 9) - 4 \cdot 60 \cdot 8! S(59, 8) + \binom{4}{2} 60 \cdot 59 \cdot 7! S(58, 7) \\ &\quad - \binom{4}{3} 60 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 6! S(57, 6) + \binom{4}{4} 60 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 57 \cdot 5! S(56, 5) \end{aligned}$$

För att få det sökta antalet måste vi subtrahera från B antalet fördelningar där person 1 får exakt 2 saker. Låt detta tal vara C .

Det finns $\binom{60}{2}$ val av de saker som person 1 ska få. Så $C = \binom{60}{2} \cdot D$, där D

är antalet fördelningar av 58 saker till 8 personer sådana att person 1, person 2, person 3 får minst två saker vardera. Detta räknas ut på samma sätt.

$$D = 8! S(58, 8) - 3 \cdot 58 \cdot 7! S(57, 7) + \binom{3}{2} 58 \cdot 57 \cdot 6! S(56, 6) - \binom{3}{3} 58 \cdot 57 \cdot 56 \cdot 5! S(55, 5).$$

Svar: $B - \binom{60}{2} \cdot D$

Tentamen SF1671 Baskurs med Diskret matematik,
2023-10-25

Skrivtid: 08:00–13:00

Tillåtna hjälpmedel: Inga utom penna, suddgummi och linjal.

Examinator: Petter Brändén, 08–790 65 41

Maximal poäng på tentamen är 36 poäng. Tentan är indelad i tre delar I, II och III om max 12 poäng vardera. Eventuella bonuspoäng läggs till poängen på del I, det kan dock aldrig överstiga 12 poäng. Bonuspoängen framgår om ni loggar in på kurshemsidan och läggs till automatiskt.

Betygsgränserna vid denna tentamen kommer att ges enligt

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del III	6	3	-	-	-	-

För full päng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar som inte är standard i kursen definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som har allvarliga brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I

1. (4p) För vilka x gäller $\arctan(2 \sin(x)/3) = \pi/6$?

2. (4p) Finn alla heltalslösningar till den Diofantiska ekvationen $511x + 342y = 12$.

3. Till denna uppgift krävs bara svar (ingen motivering). Svaret på b) får innehålla heltal, potenser, fakulteter och de fyra enkla räknesätten.

a) (2p) Relationen $\mathcal{R}$ på mängden $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ges av

$$\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 4), (5, 5)\}.$$

Vilka av egenskaperna reflexiv, symmetrisk, anti-symmetrisk och/eller transitiv har $\mathcal{R}$?

b) (2p) Fem kort ska dras slumpvis från en vanlig (perfekt blandad) kortlek. Vad är sannolikheten för att du inte får någon dam och samtidigt inte får färg? Färg betyder att alla fem korten är av samma typ ($\heartsuit$, $\diamondsuit$, $\clubsuit$ eller $\spadesuit$).

En kortlek består av följande 52 kort:

$\heartsuit 1, \heartsuit 2, \dots, \heartsuit 10$, $\heartsuit$ -knekt, $\heartsuit$ -dam, $\heartsuit$ -kung, $\diamondsuit 1, \diamondsuit 2, \dots, \diamondsuit 10$, $\diamondsuit$ -knekt, $\diamondsuit$ -dam, $\diamondsuit$ -kung,
 $\clubsuit 1, \clubsuit 2, \dots, \clubsuit 10$, $\clubsuit$ -knekt, $\clubsuit$ -dam, $\clubsuit$ -kung, $\spadesuit 1, \spadesuit 2, \dots, \spadesuit 10$, $\spadesuit$ -knekt, $\spadesuit$ -dam, $\spadesuit$ -kung.

DEL II

4. (4p) Lös olikheten

$$(2x - x^2)^{1/3} + |1 - x| \leq 1.$$

5. (4p) Visa att

$$\sum_{k=3}^n \binom{k}{3} = \binom{n+1}{4},$$

för all heltal $n \geq 3$.

6. (4p) Bestäm resten av 1412^{2804} vid division med 701.

Tips. 701 är ett primtal.

DEL III

7. (4p) 60 olika katter, 60 olika hundar och 60 olika kaniner ska delas upp i 3 numrerade burar med 60 djur i varje bur. På hur många olika sätt kan detta göras om vi kräver att ingen bur får innehålla djur av endast en art?

(Svaret får innehålla heltal, potenser, faktulteter, binomialtal, Stirlingtal och de fyra enkla räknesätten.)

8. (4p) Låt n vara ett positivt heltal.

- (a) Visa att antalet sätt att fördela $\{1, 2, \dots, n\}$ i tre numrerade lådor så att ingen låda blir tom är

$$3^n - 3 \cdot 2^n + 3.$$

- (b) Visa att

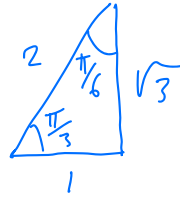
$$k!S(n, k) = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n,$$

där $S(n, k)$ är ett Stirlingtal.

9. (4p) Visa att $|\mathcal{P}(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}(\mathbb{R})| = |\mathcal{P}(\mathbb{R})|$.

Lösningsförslag

1).



Enligt figur är $\arctan(y) = \pi/6$ om $y = \frac{1}{\sqrt{3}}$,
så vi ska lösa $2 \sin(x)/3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ dvs

$$\sin(x) = \frac{3}{\sqrt{3} \cdot 2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Enligt figur är $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Samtliga lösningar
ges då (enligt föreläsningen) av

Svar:

$$x = \begin{cases} \frac{\pi}{3} + k2\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ \pi - \frac{\pi}{3} + k2\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

($= \frac{2\pi}{3}$)

$$2) \quad 511x + 342y = 12$$

Beräkna först $\text{sgd}(511, 342)$
mha Euklides alg.

$$511 = 1 \cdot 342 + 169$$

$$342 = 2 \cdot 169 + 4$$

$$169 = 42 \cdot 4 + 1 \leftarrow \text{sgd}$$

Hitta partikulärlösning genom att gå
baklänges i Euklides:

$$\begin{aligned} 1 &= 169 - 42 \cdot 4 = 169 - 42 \cdot (342 - 2 \cdot 169) = \\ &= 85 \cdot 169 - 42 \cdot 342 = 85 \cdot (511 - 342) - 42 \cdot 342 = \\ &= -127 \cdot 342 + 85 \cdot 511 \\ &= 511 \cdot 85 + 342 \cdot (-127) \end{aligned}$$

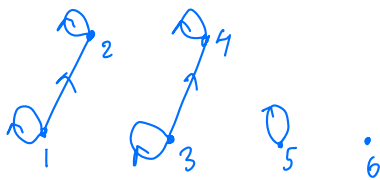
multiplitera med 12:

$$x_0 = 85 \cdot 12 = 1020, \quad y_0 = -127 \cdot 12 = -1524$$

Den allmänna lösningen ges (enligt föreläsning)

$$\begin{cases} x = 1020 - 342n \\ y = -1524 + 511n \end{cases}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

3). a) Den riktade grafen till R är



- Ej reflexiv, eftersom ej 6K6
- Ej symmetrisk ty 1K2 men 2K1
- Anti-symmetrisk, eftersom ingen 
- Transitiv

Svar: Anti-symmetrisk och transitiv.

b). D = händelsen att t₂ en dam
F = händelsen att t₂ färg

→ $A = \Omega \setminus (D \cup F)$
 $|A| = |\Omega \setminus D| - |(\Omega \setminus D) \cap F| = \binom{48}{5} - 4 \binom{12}{5}$
 $|\Omega| = \binom{52}{5}$

Sökt
händelse

Sannolikhet är $P = \frac{\binom{48}{5} - 4 \binom{12}{5}}{\binom{52}{5}} =$

$$= \frac{48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 - 4 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}$$

$$4) \quad (2x - x^2)^{\frac{1}{3}} + |1-x| \leq 1$$

Dela upp i två fall 1) $x \geq 1$, 2) $x < 1$

$$1). \quad (2x - x^2)^{\frac{1}{3}} - 1 + x \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$(2x - x^2)^{\frac{1}{3}} \leq 2 - x \quad \left(\begin{array}{l} \text{Funktioner } y^3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ är} \\ \text{strikt växande} \end{array} \right)$$

$$\Leftrightarrow 2x - x^2 \leq (2-x)^3$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq (2-x)((2-x)^2 - x)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq (2-x)(x^2 - 5x + 4) = -(x-2)(x^2 - 5x + 4)$$

Rötter till $x^2 - 5x + 4$: $x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{16}{4}} = \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2} = 4, 1$

Faktorisatören ger

$$0 \leq -(x-1)(x-2)(x-4) \quad \text{dvs} \quad (x-1)(x-2)(x-4) \leq 0$$

	$(-\infty, 1)$	$(1, 2)$	$(2, 4)$	$(4, \infty)$
$x-1$	-	+	+	+
$x-2$	-	-	+	+
$x-4$	-	-	-	+
Prod	-	+	-	+

ej i 1)

$$\therefore x \in [2, 4], \quad x=1$$

Some over

$$2). \quad (2x - x^2)^{\frac{1}{3}} + 1 - x \leq 1 \Leftrightarrow (2x - x^2)^{\frac{1}{3}} \leq x \Leftrightarrow 2x - x^2 \leq x^3$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 + x - 2) \geq 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+2) \geq 0$$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$\in]1, 2[$
x	$-$	$-$	$+$	
$x-1$	$-$	$-$	$-$	
Prod	$-$	$+$	$-$	
		0	0	0

$\therefore x \in [-2, 0]$

Soln: $x \in [-2, 0] \cup \{1\} \cup [2, 4]$

$$5). \sum_{k=3}^n \binom{k}{3} = \binom{n+1}{4}$$

HL = antalet delmängder $S \subseteq \{1, 2, \dots, n+1\}$

s.a. $|S| = 4$.

Låt $a(n, k) =$ antalet delmängder $S \subseteq \{1, 2, \dots, n+1\}$

s.a. det största talet i S är $k+1$.

Då gäller $\sum_{k=3}^n a(n, k) = \binom{n+1}{4}$ och

$a(n, k) = \binom{k}{3}$, eftersom vi ska

välja de övriga tre elementen ur

$\{1, 2, \dots, k\}$.

$$\therefore \sum_{k=3}^n \binom{k}{3} = \binom{n+1}{4}.$$

Kan också lösas med induktion
och Pascals triangel.

$$6). \quad 1412^{2804} \mod 701.$$

Räkna i $\mathbb{Z}_{701}$.

$$1412 = 2 \cdot 701 + 10$$

$$2804 = 4 \cdot 701 + 4$$

$$1412^{2804} = 10^{2804} = (10^{701})^4 \cdot 10^4$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Fermats} \\ \text{Lilla} \end{array} \right\} = 10^4 = 10\,000 =$$

$$= 14 \cdot 701 + 186 = 186$$

Svar : 186

7/. Låt U vara mängden av alla fördelningar, men utan restriktioner:

$$|U| = \binom{180}{60, 60, 60} = \frac{180!}{60! 60! 60!}$$

A_i = alla fördelningar s.a. bur i innehåller endast en art.

Vi söker $|U \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)|$. Använd PIE.

$$|A_i| = 3 \binom{120}{60}$$

↑
välj art i bur i

↑
fördela i övriga burar.

$$|A_i \cap A_j| = 3 \cdot 2 \cdot 1$$

↑
ingen val krav

↑
välj art i A_i

↑
välj art i A_j

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3 \cdot 2 \cdot 1$$

PIE ger:

Svar: $\frac{180!}{60! 60! 60!} - 3 \cdot 3 \binom{120}{60} + 3 \cdot 6 - 6$

8). a). Låt U vara mängden av alla fördelningar av $\{1, 2, \dots, n\}$ i tre lådor.

$$|U| = 3^n \quad (\text{funktioner } f: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, 3\})$$

Låt A_i vara fördelningarna där låda i är tom. Vi söker $|U \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)|$

$$|A_i| = 2^n \quad \text{eftersom låda } i \text{ är tom. (3 st)}$$

$$|A_i \cap A_j| = 1 \quad (3 \text{ st})$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$$

P/E ger nu att antalet sätt är

$$3^n - 3 \cdot 2^n + 3 \cdot 1 + 0$$

b). Samma upplägg som i a) fast U är antalet fördelningar av $\{1, \dots, n\}$ i k lådor.

$$k! S(n, k) = |U \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k)|$$

↑
antallet surjektioner

$$f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, k\} \quad (|U| = k^n)$$

$$|A_i| = (k-1)^n$$

antal termer är $\binom{k}{1}$

$$|A_i \cap A_j| = (k-2)^n$$

— || — $\binom{k}{2}$

$$\vdots$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_i| = (k-i)^n$$

— || — $\binom{k}{i}$

$$\therefore k! S(n, k) = k^n - \binom{k}{1} (k-1)^n + \binom{k}{2} (k-2)^n - \binom{k}{3} (k-3)^n + \dots$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n \quad \text{enligt P/E.}$$

9). Visa med hjälp av Schröder-Bernstein, att
hitta två injektioner:

$$f: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

och

$$g: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

• Vi kan välja f som $f(S) = (S, \emptyset)$.

• Vi kan välja g som

$$g(S, T) = \{e^x \mid x \in S\} \cup \{-e^y \mid y \in T\}$$

g är injektiv med värdemängd $\mathcal{P}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$.

Om $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ så är

$$g^{-1}(A) = (\{ \ln x \mid x \in A \text{ och } x > 0 \}, \{ \ln(-x) \mid x \in \mathbb{R} \text{ och } x < 0 \})$$

$\therefore$ Både f och g är injektioner, så
påståendet följer av S-B.

**Tentamen SF1671 Baskurs med Diskret matematik,
2023-12-20**

Skrivtid: 08:00–13:00

Tillåtna hjälpmedel: Inga utom penna, suddgummi och linjal.

Examinator: Petter Brändén, 08–790 65 41

Maximal poäng på tentamen är 36 poäng. Tentan är indelad i tre delar I, II och III om max 12 poäng vardera. Eventuella bonuspoäng läggs till poängen på del I, det kan dock aldrig överstiga 12 poäng. Bonuspoängen framgår om ni loggar in på kurshemsidan och läggs till automatiskt.

Betygsgränserna vid denna tentamen kommer att ges enligt

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del III	6	3	-	-	-	-

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar som inte är standard i kursen definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som har allvarliga brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I

1. (4p) Beräkna $\cos(\pi/12)$.

(Svaret får endast innehålla heltal, kvadratrötter och de fyra enkla räknesätten.)

2. (4p) Finn alla lösningar till ekvationen $165x = 21$ i $\mathbb{Z}_{192}$.

(Svaret ska ges som en lista av tal i $\{0, 1, 2, \dots, 191\}$.)

3. (4p) Till denna uppgift krävs bara svar (ingen motivering). Svaret på c) får endast innehålla heltal, potenser, fakulteter och de fyra enkla räknesätten.

a) Relationen $\mathcal{R}$ på mängden $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ges av

$$\mathcal{R} = \{(1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3), (4, 5), (5, 4)\}.$$

Vilka av egenskaperna reflexiv, symmetrisk, anti-symmetrisk och/eller transitiv har $\mathcal{R}$?

b) Talet 209 är skrivet på decimalform. Skriv talet i bas 4.

c) Hur många injektioner $f : \{2, -1, 0, 3\} \rightarrow \{1, 4, -8, 2, -1, 0, 3\}$ finns det?

d) Bestäm resten 36^{261} vid division med 11.

DEL II

4. (4p) Bestäm högstgradtermen i polynomet $(x^7 + 7x^2)^{10} - (x^5 + 5)^{14}$.
(Högstgradtermen i $-4x^8 + 2x^4 + 5x - 3$ är $-4x^8$.)

5. (4p) Lös olikheten $\sqrt{1-x^2} + |1-2x| \leq 1$.

6. Låt $\mathcal{M}$ vara mängden av alla ord som kan bildas genom att kasta om bokstäverna i ordet RAGGARGRANEN. (Orden AAAEGGGRRRRNN och RAGGGRENARNA ligger i $\mathcal{M}$, men inte RAGGRENARNA).

a) (1p) Bestäm $|\mathcal{M}|$.

b) (3p) Hur många av orden i $\mathcal{M}$ uppfyller alla tre villkoren nedan (samtidigt)?

- (1) första bokstaven är inte R,
- (2) andra bokstaven är inte A,
- (3) tredje bokstaven är inte G.

(Svaren får endast innehålla heltal, potenser, faktulteter, binomialtal, Stirlingtal och de fyra enkla räknesätten.)

DEL III

7. (4p) 160 identiska kulor ska fördelas i 3 olika lådor A, B, C så att ingen låda blir tom. På hur många sätt kan detta göras om vi kräver att

- ingen låda får innehålla fler än 60 kulor, och
- A och B får inte innehålla lika många kulor.

(Svaret får endast innehålla heltal, potenser, faktulteter, binomialtal, Stirlingtal och de fyra enkla räknesätten.)

8. (4p) En följd av polynom definieras rekursivt av $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = 1 + x$, $p_2(x) = 1 + x^2$ och

$$p_{n+1}(x) = p_{n-2}(x) \cdot p_n(x) + p_{n-1}(x), \quad \text{för } n \geq 2.$$

Bevisa med induktion eller stark induktion att $\text{sgd}(p_n(x), p_{n+1}(x)) = 1$, d.v.s. att $p_n(x)$ och $p_{n+1}(x)$ inte har några gemensamma delare förutom konstanter för alla $n \geq 0$.

(Kom ihåg att $\text{sgd}(f, g)$ betecknar största gemensamma delaren till f och g .)

9. (4p)

- a) Ge exempel på en injektion $f : \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}$.
- b) Ge exempel på en surjektion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Motivera noggrant varför funktionerna är surjektioner respektive injektioner.

(Kom ihåg att $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ är potensmängden till $\mathbb{Z}$.)

1). Vi har $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$.

Låt $x = \frac{\pi}{12}$ och $t = \cos(\frac{\pi}{12})$.

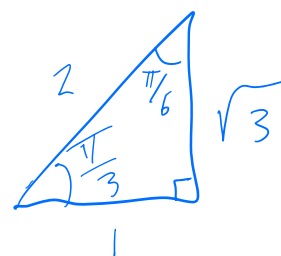
Ovan ger då

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{3}}{2} &= \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{12}\right) \\ &= 2 \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) - 1 = 2t^2 - 1\end{aligned}$$

89 $t^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)/2 = \frac{1}{4}(\sqrt{3} + 2)$ och således

$$t = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

Svar: $\frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{3}}$



$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2), Lös $165x = 21$ i $\mathbb{Z}_{192}$.

$$165x = 21 \text{ i } \mathbb{Z}_{192} \Leftrightarrow 192 \mid (21 - 165x)$$

$$\Leftrightarrow 21 - 165x = 192y \text{ för ngt } y \in \mathbb{Z}$$

Vi löser den Diofantiska ekvationen

$$165x + 192y = 21$$

Euklides alg:

$$192 = 165 + 27$$

$$165 = 6 \cdot 27 + 3$$

$$27 = 9 \cdot 3$$

Backåtgång:

$$3 = 165 - 6 \cdot 27$$

$$= 165 - 6 \cdot (192 - 165)$$

$$= 165 \cdot 7 + 192 \cdot (-6)$$

Multiplikera med 7:

$$165 \cdot (49) + 192 \cdot (-42) = 21$$

Den allmänna lösningen i $\mathbb{Z}$ är då (enligt föreläsning):

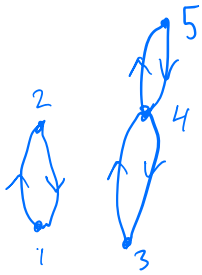
$$\begin{cases} x = 49 + 64n \\ y = -42 - 55n \end{cases}, n \in \mathbb{Z}$$

Vi är intresserade av $x \in \mathbb{Z}_{192}$, $x = 49 + 64n$

	n			
	0	1	2	3
x	49	113	177	241 = 49

Svar: 49, 113, 177

3). a)



Ej reflexiv

Ej anti-symmetrisk

Ej transitiv, men
symmetrisk

b). 209 i bas 4

$$\begin{aligned} 209 &= 4 \cdot 52 + 1 = 4 \cdot (4 \cdot 13) + 1 = 4^2 \cdot (4 \cdot 3 + 1) + 1 \\ &= 3 \cdot 4^3 + 1 \cdot 4^2 + 0 \cdot 4^1 + 1 \cdot 4^0 \\ &= (3101)_4 \end{aligned}$$

c). $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$

d). Räkna i $\mathbb{Z}_{11}$. Fermat's lilla säger

att $a^{10} = 1$ för $a \neq 0$.

$$36^{261} = 3^{261} = 3^{26 \cdot 10 + 1} = 3$$

4). Använd binomialsatsen:

$$\begin{aligned}(x^7 + 7x^2)^{10} &= x^{70} + \binom{10}{1}(x^7)^9(7x^2) + \binom{10}{2}(x^7)^8(7x^2)^2 + \dots \\ &= x^{70} + 70x^{65} + 45 \cdot 49 \cdot x^{60} + \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x^5 + 5)^{14} &= x^{70} + \binom{14}{1}5(x^5)^{13} + \binom{14}{2}5^2(x^5)^{12} + \dots \\ &= x^{70} + 70x^{65} + 7 \cdot 13 \cdot 25 \cdot x^{60} + \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Alltså är högsta termen } &(45 \cdot 49 - 7 \cdot 13 \cdot 25)x^{60} \\ &= -70x^{60}\end{aligned}$$

$$\underline{\text{Svar:}} \quad -70x^{60}$$

$$5). \quad \sqrt{1-x^2} + |1-2x| \leq 1 \quad \left\| \begin{array}{l} \text{Notera först att } -1 \leq x \leq 1 \\ \text{för att uttrycket innaför } \sqrt{} \\ \text{måste vara } \geq 0 \end{array} \right.$$

Dela upp i två fall.

$$a). \quad 1-2x > 0 \quad \text{dvs} \quad x < \frac{1}{2} \quad \text{Vi får}$$

$$\sqrt{1-x^2} + 1-2x \leq 1 \quad (\Leftrightarrow)$$

$$\sqrt{1-x^2} \leq 2x \quad (\text{Här ser vi att } x \geq 0)$$

$$\text{Kvadrera båda leden:} \quad 1-x^2 \leq 4x^2 \quad \text{dvs}$$

$$5x^2 \geq 1 \quad \text{dvs} \quad \frac{1}{\sqrt{5}} \leq x < \frac{1}{2}$$

$$(\text{Notera att } \frac{1}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2})$$

$$b). \quad 1-2x \leq 0 \quad \text{dvs} \quad x \geq \frac{1}{2}$$

Vi får

$$\sqrt{1-x^2} - 1 + 2x \leq 1 \quad (\Leftrightarrow) \quad \sqrt{1-x^2} \leq 2(1-x)$$

$$(\text{Här ser vi att } x \leq 1)$$

Kvadrera båda leden:

$$1-x^2 \leq 4(1-x)^2$$

$$\Leftrightarrow (1-x)(1+x) \leq 4(1-x)^2$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq (1-x)(4(1-x) - (1+x)) = (1-x)(-5x+3)$$

$$\text{Antingen är } x=1 \quad \text{eller} \quad -5x+3 \geq 0 \quad \text{dvs} \quad x \leq \frac{3}{5}$$

$$\text{så } x=1 \quad \text{eller} \quad x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{5}].$$

$$\underline{\text{Svar:}} \quad x \in [\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{3}{5}] \cup \{1\}$$

6) a) Vi ska blanda bokstäverna i $A^3 E^1 G^3 R^3 N^2$.

Antalet ord ges enligt föreläsningarna
av multinomialtalet

$$\binom{12}{3, 3, 3, 2, 1} = \frac{12!}{3! 3! 3! 2!}$$

b). Låt

A_1 vara mängden av alla ord i $\mathcal{M}$
som börjar på R

A_2 — || —
vars andra bokstav är A.

A_3 — || —
vars tredje bokstav är G

Vi söker $|\mathcal{M} \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)|$. Använd PIE.

$$|A_1| = \binom{11}{3, 3, 2, 2, 1} = |A_2| = |A_3|$$

$$|A_1 \cap A_2| = \binom{10}{3, 2, 2, 2, 1} = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3|$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \binom{9}{2, 2, 2, 2, 1}$$

Enligt PIE är svaret

$$\binom{12}{3, 3, 3, 2, 1} - 3 \binom{11}{3, 3, 2, 2, 1} + 3 \binom{10}{3, 2, 2, 2, 1} - \binom{9}{2, 2, 2, 2, 1}$$

$$= \frac{12!}{6^3 \cdot 2} - 3 \frac{11!}{6^2 \cdot 4} + 3 \frac{10!}{6 \cdot 8} - \frac{9!}{16}$$

7). Vi räknar först ut antalet fördelningar som uppfyller första villkoret:

- $U = \{\text{alla fördelningar utan villkoret}\}$

$$|U| = \binom{160-1}{3-1} = \binom{159}{2}$$

- Låt A vara mängden av alla fördelningar där A får fler än 60 kulor. Genom att lägga 60 kulor i A och fördela resten (100 kulor) får vi

$$|A| = \binom{100-1}{3-1} = \binom{99}{2}$$

På samma vis fås $|B| = |C| = \binom{99}{2}$

- Genom att gå tillväga som ovan fås
 $|A \cap B| = \binom{160-60-60-1}{3-1} = \binom{39}{2} = |A \cap C| = |B \cap C|$

- $|A \cap B \cap C| = 0$

PIE ger nu att antalet fördelningar som uppfyller det första villkoret är

$$\binom{159}{2} - 3 \binom{99}{2} + 3 \binom{39}{2}$$

Nu behöver vi bara subtrahera antalet fördelningar som dessutom har lika många kulor i A och i B .

Vi har då att $2a + c = 160$ där $a = \# \text{ kulor i } A$
 $c = \# \text{ kulor i } C$

$$1 \leq a \leq 60 \quad \text{och}$$

$$1 \leq c \leq 60 \Leftrightarrow 1 \leq 160 - 2a \leq 60 \Leftrightarrow 50 \leq a \leq 159/2$$

Så $a = 50, 51, \dots, 60$, dvs det finns 11 sådana fördelningar.

Svar! $\binom{159}{2} - 3 \binom{99}{2} + 3 \binom{39}{2} - 11$

8). Induktionsbevis:

Vi behöver kolla basfallen $\text{sgd}(P_k, P_{k+1})$ för $k=0,1$

$$\text{sgd}(P_0, P_1) = \text{sgd}(1, 1+x) = 1$$

$$\text{sgd}(P_1, P_2) = \text{sgd}(1+x, 1+x^2) = 1, \text{ eftersom } 1+x \text{ inte delar } 1+x^2.$$

Antag nu att påståendet gäller för alla $k = n-1$ där $n \geq 2$. Då har vi enligt rekursionen

$$\text{sgd}(P_{n+1}, P_n) = \text{sgd}(P_{n-2} \cdot P_n + P_{n-1}, P_n)$$

Om d är en gemensam delare till $P_{n+1} \text{ o } P_n$

så $d \mid P_n \text{ o } d \mid P_{n+1}$, då gäller att

$$P_n = q_1 d \text{ o } P_{n+1} = q_2 d \text{ för polynom } q_1 \text{ och } q_2.$$

$$\text{Då för är } P_{n-1} = P_{n+1} - P_{n-2}P_n = d(q_2 - P_{n-2}q_1), \text{ så}$$

d är en delare till P_{n-1} (och P_n). Alltså är d en konstant enligt induktionsantagandet, dvs

$$\text{sgd}(P_{n+1}, P_n) = 1.$$

Påståendet följer enligt induktionsprincipen.

9). a). Konstruerar en injektion $f: \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}$. Låt $S \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ och definiera $f(S)$ genom dess binära utveckling:

$$f(S) = 0, a_1 a_2 0 b_1 0 a_2 0 b_2 0 a_3 0 a_4 0 b_4 \dots$$

där

$$a_i = \begin{cases} 1 & \text{om } i \in S \\ 0 & \text{om } i \notin S \end{cases} \quad b_i = \begin{cases} 1 & \text{om } -i \in S \\ 0 & \text{om } -i \notin S \end{cases}$$

$$a_i = \begin{cases} 1 & \text{om } i \in S \\ 0 & \text{om } i \notin S \end{cases}$$

f är en injektion eftersom vi direkt kan återskapa S .

b). Konstruerar en surjektion $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Låt $x = \pm a_0 a_1 \dots a_n, b_0 b_1 b_2 b_3 \dots$ vara decimalutvecklingen för $x \in \mathbb{R}$. Definiera först $(u, w) \in [0, \infty) \times [0, \infty)$ genom

$$\begin{cases} u = a_0 a_2 \dots a_n, b_0 b_2 b_4 b_6 \dots & \text{om } n \text{ är jämt} \\ w = a_1 a_3 \dots a_{n-1}, b_1 b_3 b_5 \dots & \end{cases}$$

och

$$\begin{cases} u = a_0 a_2 \dots a_{n-1}, b_0 b_2 b_4 b_6 \dots & \text{om } n \text{ är udda} \\ w = a_1 a_3 \dots a_n, b_1 b_3 b_5 \dots & \end{cases}$$

Alla möjliga $(u, w) \in [0, \infty) \times [0, \infty)$ erhålls på detta sätt.

Låt nu $g(x) = (\ln(u), \ln(w))$, där vi definierar $\ln(0) = 1$ för att g ska bli väldefinierad. Eftersom

$\ln: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ är en bijektion så är

g en surjektion.



SF1671 Matematik, baskurs, med diskret matematik
Lösningsförslag till tentamen, 23 oktober 2024

DEL I

1. (a) Bestäm inversen till 659 i $\mathbb{Z}_{2024}$. **(2 p)**
(b) Skriv $2024 = (2024)_{10}$ i basen 8. **(2 p)**

Lösningsförslag.

- (a) Vi behöver lösa $659x + 2024y = 1$. Euklides algoritm ger

$$2024 = 659 \cdot 3 + 47$$

$$659 = 47 \cdot 14 + 1$$

och baklänges

$$\begin{aligned} 1 &= 659 - 47 \cdot 14 = 659 - (2024 - 659 \cdot 3) \cdot 14 \\ &= 659 \cdot 43 - 2024 \cdot 14. \end{aligned}$$

Alltså är $659^{-1} = 43$.

- (b) Vi beräknar resten av 2024 vid upprepad division med 8.

$$2024 = 8 \cdot 253 + 0$$

$$253 = 8 \cdot 31 + 5$$

$$31 = 8 \cdot 3 + 7$$

$$3 = 8 \cdot 0 + 3$$

Alltså är $2024 = (3750)_8$.

Svar. (a) $659^{-1} = 43$ och (b) $2024 = (3750)_8$.

2. Bestäm alla x för vilka olikheten

$$\ln(x+1) + \ln 3 \leq \ln(3-x) + \ln(x+2)$$

är uppfylld.

(4 p)

Lösningsförslag. Vi observerar först att eftersom $\ln y$ är definierad för $y > 0$ så är båda sidor definierade då $-1 < x < 3$. Eftersom e^x är en växande funktion så är VL $\leq$ HL precis då $e^{\text{VL}} \leq e^{\text{HL}}$, vilket genom log-lagar ger:

$$(x+1) \cdot 3 \leq (3-x) \cdot (x+2) \iff x^2 + 2x - 3 \leq 0.$$

Rötterna till $x^2 + 2x - 3$ är $x = -3$ och $x = 1$. För stora x och stora negativa x är $x^2 + 2x - 3 > 0$ så $x^2 + 2x - 3 \leq 0$ precis då $x \in [-3, 1]$. Eftersom den ursprungliga olikheten är definierad då $x \in (-1, 3)$ så får vi att olikheten är uppfylld för $x \in (-1, 1]$.

Svar. Olikheten är uppfylld för alla $x \in (-1, 1]$.

3. På denna uppgift krävs bara svar (ingen motivering).

(a) Hur många sexbokstavsord kan man skriva med bokstäverna PAPAYA?

(Svara med ett heltal.)

(1 p)

(b) Du kastar en röd och en blå sexsidig tärning och får r och b . Vad är sannolikheten att $r + b$ är udda om du vet att rb är jämn?

(1 p)

(c) Relationen $\mathcal{R}$ på $\mathbb{Z}_5$ definieras av att $x \mathcal{R} y$ om $x - y = 0$ eller $x - y = 1$. Vilka av egenskaperna: reflexiv, symmetrisk, antisymmetrisk och transitiv har $\mathcal{R}$?

(1 p)

(d) Bestäm antalet element i mängden $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) \setminus (\mathcal{P}(\{1, 2\}) \cup \mathcal{P}(\{1, 3\}))$.

(Svara med ett heltal.)

(1 p)

Lösningsförslag.

(a) $\binom{6}{3,2,1} = \frac{6!}{3!2!1!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{2} = 60.$

(b) Det är bara pariteten hos r och b som spelar roll och sannolikheten att en sexsidig tärning är udda/jämn är 50 %. Vi har lika stor chans för de fyra utfallen (u, u) , (u, j) , (j, u) , (j, j) . Av dessa så är produkten jämn i de tre sista fallen. Av dessa är summan udda i två fall. Vi har alltså sannolikheten $2/3$.

(c) Vi har att $x - x = 0$ för alla x så $\mathcal{R}$ är reflexiv. Den är inte symmetrisk då $1 \mathcal{R} 0$ medan $0 \not\mathcal{R} 1$. Den är antisymmetrisk ty om $x \mathcal{R} y$ och $y \mathcal{R} x$ så är antingen $x = y$ eller $x - y = 1$ och $y - x = 1$ och det senare är omöjligt då $1 \neq -1$ i $\mathbb{Z}_5$. Relationen är inte transitiv ty $2 \mathcal{R} 1$ och $1 \mathcal{R} 0$ men $2 \not\mathcal{R} 0$. Alltså är $\mathcal{R}$ enbart reflexiv och antisymmetrisk.

(d) Mängden är $\{\emptyset, \{2, 3\}\}$ vilken har två element. Eller med inklusion och exklusion: $|\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})| - |\mathcal{P}(\{1, 2\})| - |\mathcal{P}(\{1, 3\})| + |\mathcal{P}(\{1\})| = 8 - 4 - 4 + 2.$

Svar. (a) 60 (b) $2/3$ (c) reflexiv och antisymmetrisk (d) 2.

DEL II

4. Låt f_n vara det n te Fibonaccitalet, dvs, $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ och $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ för alla $n \geq 2$. Visa att

$$f_0^2 + f_1^2 + \cdots + f_n^2 = f_n f_{n+1}. \quad (4 \text{ p})$$

för alla heltal $n \geq 0$.

Lösningsförslag. Låt $P(n)$ vara påståendet att $f_0^2 + f_1^2 + \cdots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$. Vi visar att $P(n)$ gäller med hjälp av induktion. För $n = 0$ har vi att $f_0^2 = 0$ och $f_0 f_1 = 0 \cdot 1 = 0$ så $P(0)$ är sant. Antag nu att $P(k)$ är sant för något $k \in \mathbb{N}$. Då är:

$$(f_0^2 + f_1^2 + \cdots + f_k^2) + f_{k+1}^2 = f_k f_{k+1} + f_{k+1}^2 = (f_k + f_{k+1}) f_{k+1} = f_{k+2} f_{k+1}.$$

Alltså är $P(k+1)$ sant. Enligt induktionsprincipen är alltså $P(n)$ sant för alla $n \geq 0$.

5. 100 identiska kulor ska fördelas på 5 numrerade lådor så att varje låda har minst 10 kulor och max 40 kulor. På hur många sätt kan detta göras? (4 p)
(Svaret får innehålla heltal, potenser, faktorer, binomialtal, Stirlingtal och de fyra räknesätten.)

Lösningsförslag. Vi börjar med att dela ut 10 kulor till varje låda. Då har vi 50 kulor kvar att dela ut. Detta kan göras på

$$\binom{50 + 5 - 1}{5 - 1}$$

sätt (stars-and-bars med 50 kulor och 5 - 1 avskiljare som ska väljas bland 50 + (5 - 1) positioner).

Bara en låda kan ha fler än 40 kulor. Antalet fall där låda 1 har fler än 40 kulor kan vi beräkna genom att först dela ut 41 + 10 + 10 + 10 + 10 kulor och sedan fördela de resterande 19 kulorna vilket kan göras på

$$\binom{19 + 5 - 1}{5 - 1}$$

sätt. Totala antalet sätt blir nu

$$\binom{50 + 5 - 1}{5 - 1} - 5 \binom{19 + 5 - 1}{5 - 1} = \binom{54}{4} - 5 \binom{23}{4}.$$

Svar. $\binom{54}{4} - 5 \binom{23}{4}$. ($= \frac{54 \cdot 53 \cdot 52 \cdot 51 - 5 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20}{24} = 271976$)

6. Lös olikheten

$$2x^3 + 17x \geq 11x^2 + 6. \quad (4 \text{ p})$$

Lösningsförslag. Olikheten är ekvivalent med

$$2x^3 - 11x^2 + 17x - 6 \geq 0.$$

Vi söker rationella rötter. Möjliga rötter är enligt rotkriteriet $\pm \frac{p}{q}$ där $p \mid 6$ och $q \mid 2$ vilket ger $\pm\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1, 2, 3, 6\}$. Vi finner att

$$x = \frac{1}{2}, \quad x = 2, \quad x = 3$$

är rötter. Detta ger faktoriseringen

$$(2x - 1)(x - 2)(x - 3) \geq 0.$$

Vi har följande teckentabell (inga dubbelrötter så teckenbyte vid varje nollställe)

x	$1/2$	2	3
VL	-	0	+
	+	0	-
	-	0	+

så olikheten gäller då $x \in [\frac{1}{2}, 2] \cup [3, \infty)$.

Svar. Olikheten gäller då $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$ eller $3 \leq x$.

DEL III

7. Bestäm alla lösningar till ekvationen $\cos(\arcsin x) = \tan(\arcsin x)$. (4 p)

Lösningsförslag. Ekvationens sidor är definierade för $x \in [-1, 1]$. Vi har att $\sin(\arcsin x) = x$ för alla x . Vidare är

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1 - x^2}$$

och

$$\tan(\arcsin x) = \frac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Detta går också att se genom att rita upp en rätvinklig triangel med hypotenusa 1 och kateter x och $\sqrt{1 - x^2}$.

Detta ger ekvationen

$$\sqrt{1 - x^2} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Vilket i sin tur ger ekvationen

$$1 - x^2 = x \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + x - 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Vi noterar att $2 < \sqrt{5} < 3$ vilket ger

$$-2 < \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < -\frac{3}{2}$$

och

$$\frac{1}{2} < \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} < 1.$$

Alltså är ekvationen endast definierad för den andra lösningen.

Svar. Ekvationen har den unika lösningen $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

8. Bestäm alla naturliga tal n så att $10 \mid 3^n + 4^n + 5^n$. (4 p)

Lösningsförslag. Att $10 \mid 3^n + 4^n + 5^n$ är detsamma som att $3^n + 4^n + 5^n$ är delbart med 2 och 5, dvs

$$3^n + 4^n + 5^n \equiv 0 \pmod{2}$$

$$3^n + 4^n + 5^n \equiv 0 \pmod{5}.$$

Vi har att

$$3^n + 4^n + 5^n \equiv 1^n + 0^n + 1^n = 2 \equiv 0 \pmod{2}.$$

och att

$$3^n + 4^n + 5^n \equiv 3^n + (-1)^n + 0^n \pmod{5}.$$

Fermats lilla sats ger att $3^4 \equiv 1 \pmod{5}$. Vi delar nu in i följande fall:

(a) $n = 4k$. Då är $3^n = (3^4)^k \equiv 1 \pmod{5}$ och $(-1)^n = 1$ och

$$3^n + 4^n + 5^n \equiv 1 + 1 + 0 = 2 \pmod{5}.$$

(Om $n = k = 0$ så är $5^n = 1$ och vi får $1 + 1 + 1 = 3$ istället för 2.)

(b) $n = 4k + 1$. Då är $3^n = (3^4)^k \cdot 3 \equiv 3 \pmod{5}$ och $(-1)^n = -1$ och

$$3^n + 4^n + 5^n \equiv 3 - 1 + 0 = 2 \pmod{5}.$$

(c) $n = 4k + 2$. Då är $3^n = (3^4)^k \cdot 3^2 \equiv -1 \pmod{5}$ och $(-1)^n = 1$ och

$$3^n + 4^n + 5^n \equiv -1 + 1 + 0 = 0 \pmod{5}.$$

(d) $n = 4k + 3$. Då är $3^n = (3^4)^k \cdot 3^3 \equiv 2 \pmod{5}$ och $(-1)^n = -1$ och

$$3^n + 4^n + 5^n \equiv 2 - 1 + 0 = 1 \pmod{5}.$$

Alltså är $10 \mid 3^n + 4^n + 5^n$ precis när $n \equiv 2 \pmod{4}$.

Svar. $n \equiv 2 \pmod{4}$.

9. Bestäm antalet funktioner $f: \{1, 2, \dots, 10\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 7\}$ som är surjektiva och som uppfyller $f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 3$. **(4 p)**
(Svaret får innehålla heltal, potenser, faktulteter, binomialtal, Stirlingtal och de fyra räknesätten.)

Lösningförslag. Låt X vara mängden av alla funktioner som uppfyller $f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 3$ (alltså utan villkoret att f är surjektiv). Vi kan välja $f(4), \dots, f(10)$ på totalt 7^7 sätt så $|X| = 7^7$. Vi tar nu och räknar hur många som inte är surjektiva med inklusion/exklusion. För $i = 4, 5, 6, 7$, låt A_i vara mängden av funktioner där i inte är med i värdemängden. Detta innebär att $f(4), \dots, f(10)$ kan väljas på 6^7 sätt. På samma sätt är $A_i \cap A_j$ mängden av funktioner där varken i eller j är med i värdemängden och dessa utgör 5^7 stycken, osv. Detta ger

$$|X| - |A_4| - \dots - |A_7| + |A_4 \cap A_5| + \dots + |A_6 \cap A_7| - \dots + |A_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7| \\ = 7^7 - \binom{4}{1} \cdot 6^7 + \binom{4}{2} \cdot 5^7 - \binom{4}{3} \cdot 4^7 + \binom{4}{4} \cdot 3^7 \quad (= 109200.)$$

Lösning 2: Vi gör en fallindelning: låt a vara hur många av $4, 5, 6, \dots, 10$ som tar värden bland $1, 2, 3$. Då är $a = 0, 1, 2, 3$. Att välja de a stycken tal av $4, 5, \dots, 10$ som ska ta värden bland $1, 2, 3$ kan vi göra på $\binom{7}{a}$ sätt. Deras värden kan vi välja på 3^a sätt. Övriga element ska ge en funktion till $\{4, 5, 6, 7\}$ som är surjektiv vilket kan göras på $4! \cdot S(7 - a, 4)$ sätt. Detta ger

$$\binom{7}{0} \cdot 3^0 \cdot 4! \cdot S(7, 4) + \binom{7}{1} \cdot 3^1 \cdot 4! \cdot S(6, 4) + \binom{7}{2} \cdot 3^2 \cdot 4! \cdot S(5, 4) \\ + \binom{7}{3} \cdot 3^3 \cdot 4! \cdot S(4, 4) \quad (= 24(350 + 21 \cdot 65 + 189 \cdot 10 + 945) = 109200.)$$

Lösning 3: Vi gör en fallindelning: låt a_1, a_2, a_3 vara antalet element i definitionsmängden som f tar på $1, 2$ respektive 3 .

- $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, dvs det är enbart $1, 2, 3$ som går på $1, 2, 3$. Resterande värden kan då väljas på $4!S(7, 4)$ sätt.
- En av $a_i > 1$ övriga $a_i = 1$. Då kan resterande värden väljas på $5!S(7, 5)$ sätt.
- Två av $a_i > 1$ och den tredje $a_i = 1$. Då kan resterande värden väljas på $6!S(7, 6)$ sätt.
- Alla tre $a_i > 1$. Då kan resterande värden väljas på $7!S(7, 7)$ sätt.

Detta ger

$$4! \cdot S(7, 4) + \binom{3}{1} \cdot 5! \cdot S(7, 5) + \binom{3}{2} \cdot 6! \cdot S(7, 6) + 7! \cdot S(7, 7) \\ = 4!(S(7, 4) + 15 \cdot S(7, 5) + 90 \cdot S(7, 6) + 210) \\ (= 24(350 + 15 \cdot 140 + 90 \cdot 21 + 210) = 24 \cdot 4550 = 109200.)$$

Lösning 4: Om vi har en partition av $\{1, 2, \dots, 10\}$ i 7 delar där 1, 2 och 3 är i olika delar så kan vi kalla dessa delar 1, 2 och 3 och därefter numrera resterande 4 delar som 4, 5, 6, 7 på $4!$ olika sätt. Detta ger en surjektiv funktion som önskat.

Antalet sådana partitioner ges av inklusion-exklusion. Låt X vara mängden av alla partitioner av $\{1, 2, \dots, 10\}$ i 7 delar. Det finns $S(10, 7)$ sådana.

- Låt $A_{ij} \subset X$ vara partitionerna där i och j är i samma del. Det finns $S(9, 7)$ sådana partitioner (fås genom att betrakta i och j som en enhet).
- Låt $A_{ijk} \subset X$ vara partitionerna där i, j och k är i samma del. Det finns $S(8, 7)$ sådana partitioner.

Vi har då

$$\begin{aligned} |X \setminus (A_{12} \cup A_{13} \cup A_{23})| &= |X| - |A_{12}| - |A_{13}| - |A_{23}| + |A_{12} \cap A_{13}| \\ &\quad + |A_{12} \cap A_{23}| + |A_{13} \cap A_{23}| - |A_{12} \cap A_{13} \cap A_{23}| \\ &= |X| - |A_{12}| - |A_{13}| - |A_{23}| + 2|A_{123}| \\ &= S(10, 7) - 3S(9, 7) + 2S(8, 7) \end{aligned}$$

och det slutliga antalet surjektiva funktioner ges av

$$\begin{aligned} &4! \cdot (S(10, 7) - 3S(9, 7) + 2S(8, 7)). \\ &= 24 \cdot (5880 - 3 \cdot 462 + 2 \cdot 28) = 24 \cdot 4550 = 109200 \end{aligned}$$

Observera att $A_{12} \cap A_{13} = A_{12} \cap A_{23} = A_{13} \cap A_{23} = A_{12} \cap A_{13} \cap A_{23} = A_{123}$, därav blir det sammanlagt $2 = 3 - 1$ stycken A_{123} i inklusion/exklusionen.

Svar. $7^7 - \binom{4}{1} \cdot 6^7 + \binom{4}{2} \cdot 5^7 - \binom{4}{3} \cdot 4^7 + \binom{4}{4} \cdot 3^7$

$$\begin{aligned} &= 4! \left(\binom{7}{0} \cdot 3^0 \cdot S(7, 4) + \binom{7}{1} \cdot 3^1 \cdot S(6, 4) + \binom{7}{2} \cdot 3^2 \cdot S(5, 4) + \binom{7}{3} \cdot 3^3 \cdot S(4, 4) \right) \\ &= 4! (S(7, 4) + 15 \cdot S(7, 5) + 90 \cdot S(7, 6) + 210) \\ &= 4! (S(10, 7) - 3 \cdot S(9, 7) + 2 \cdot S(8, 7)) \\ &= 109200 \end{aligned}$$



SF1671 Matematik, baskurs, med diskret matematik
Lösningsförslag till tentamen, 18 december 2024

DEL I

1. Lös ekvationen

$$\cos(4x) = 2 \sin(2x) - \frac{1}{2} \quad (4 \text{ p})$$

Lösningsförslag. Vi använder cosinus för dubbla vinkeln:

$$\cos 4x = (\cos 2x)^2 - (\sin 2x)^2 = 1 - 2(\sin 2x)^2$$

vilket ger ekvationen

$$1 - 2(\sin 2x)^2 = 2 \sin 2x - \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad 2(\sin 2x)^2 + 2 \sin 2x - \frac{3}{2} = 0$$

och alltså

$$\sin 2x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = -\frac{1}{2} \pm 1.$$

Eftersom $\sin 2x \in [-1, 1]$ är endast $\sin 2x = \frac{1}{2}$ möjligt. Detta ger

$$2x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \quad \text{eller} \quad 2x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$$

för något heltal k , dvs:

$$x = \frac{\pi}{12} + \pi k \quad \text{eller} \quad x = \frac{5\pi}{12} + \pi k$$

för något heltal k .

Svar. $x = \frac{\pi}{12} + \pi k$ eller $x = \frac{5\pi}{12} + \pi k$ för något $k \in \mathbb{Z}$.

2. Bestäm alla lösningar till ekvationen $105x = 6$ i $\mathbb{Z}_{342}$. (4 p)

Lösningsförslag. Vi skriver om det som en diofantisk ekvation

$$105x + 342y = 6$$

Euklides algoritmen ger

$$342 = 105 \cdot 3 + 27$$

$$105 = 27 \cdot 3 + 24$$

$$27 = 24 \cdot 1 + 3$$

$$24 = 3 \cdot 8 + 0.$$

Alltså är $\text{sgd}(105, 342) = 3$. Eftersom $3 \mid 6$ finns lösningar. Euklides algoritmen ”baklänges” ger en lösning till $105a + 342b = 3$.

$$\begin{aligned} 3 &= 27 - 24 = 27 - (105 - 27 \cdot 3) \\ &= 105 \cdot (-1) + 27 \cdot 4 = 105 \cdot (-1) + (342 - 105 \cdot 3) \cdot 4 \\ &= 342 \cdot 4 + 105 \cdot (-13) \quad (= 1368 - 1365). \end{aligned}$$

Alltså är $a = -13$ och $b = 4$ en lösning. Alla lösningar till $105x + 342y = 3 \cdot 2$ ges nu enligt känd sats av

$$\begin{aligned} x &= 2a + \frac{342}{3}k = -26 + 114k \\ y &= 2b - \frac{105}{3}k = 8 - 35k \end{aligned}$$

där k är ett heltal. Till den ursprungliga ekvationen i $\mathbb{Z}_{342}$ räcker det att hitta alla lösningar med x i intervallet $0, 1, \dots, 341$. Dessa motsvarar $k = 1$, $k = 2$ och $k = 3$ vilka ger $x = 88$, $x = 202$, $x = 316$.

Svar. $x = 88$, $x = 202$ och $x = 316$.

3. På denna uppgift krävs bara svar (ingen motivering).

- (a) Gäller $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ för alla mängder A, B, C ? (1 p)
- (b) Beräkna 2^{100} i $\mathbb{Z}_{17}$. (1 p)
- (c) Skriv upp sanningstabellen för $p \vee q \rightarrow \neg q$. (1 p)
- (d) Bestäm antalet injektiva funktioner $\{a, b, c\} \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 10\}$. (1 p)

Lösningsförslag.

- (a) Nej, t ex $A = \{1, 2\}$, $B = \{1\}$, $C = \{2\}$. Då är $A \setminus (B \cap C) = \{1, 2\}$ medan $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = \emptyset$. (Däremot gäller $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ och $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.)
- (b) 17 är ett primtal så $2^{16} = 1$ enligt Fermats lilla sats. Alltså är $2^{100} = (2^{16})^6 \cdot 2^4 \equiv 1 \cdot 16 = 16$. Alternativt kan man utnyttja att $2^4 = 16 \equiv -1$ så $2^{100} = (2^4)^{25} \equiv (-1)^{25} = -1 \equiv 16$.

(c)

p	q	$p \vee q$	$\neg q$	$p \vee q \rightarrow \neg q$
0	0	0	1	1
0	1	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	1	0	0

(d) $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

DEL II

4. Talföljden $\{a_n\}_{n \geq 0}$ definieras genom rekursionen

$$a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} + 8, \quad n \geq 2$$

där $a_0 = 0$ och $a_1 = 4$. Visa med hjälp av induktion att

$$a_n = 2(3^n - 1)$$

gäller för alla $n \geq 0$.

(4 p)

Lösningsförslag. Låt $P(n)$ vara påståendet att $a_n = 2(3^n - 1)$. Vi har två basfall $n = 0$ och $n = 1$:

$$\text{VL} = a_0 = 0$$

$$\text{HL} = 2(3^0 - 1) = 0$$

$$\text{VL} = a_1 = 4$$

$$\text{HL} = 2(3^1 - 1) = 4.$$

Alltså gäller $P(0)$ och $P(1)$.Låt nu $n \geq 2$ och antag att $P(n-2)$ och $P(n-1)$ är sanna. Då gäller

$$\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1} + 3a_{n-2} + 8 \\ &= 4(3^{n-1} - 1) + 6(3^{n-2} - 1) + 8 \\ &= 12 \cdot 3^{n-2} - 4 + 6 \cdot 3^{n-2} - 6 + 8 \\ &= 18 \cdot 3^{n-2} - 2 = 2(9 \cdot 3^{n-2} - 1) \\ &= 2(3^n - 1). \end{aligned}$$

Alltså gäller $P(n)$.Enligt induktionsprincipen gäller därför $P(n)$ för alla $n \geq 0$.

5. En grupp med 6 (särskiljbara) vuxna och 5 (särskiljbara) barn ska bilda 3 (onummerade) lag med minst 1 vuxen och 1 barn i varje lag. På hur många sätt kan de göra det? För full poäng ska svaret ges som ett heltal. **(4 p)**

Lösningsförslag. Vi börjar med att dela in de vuxna i 3 onummerade lag och barnen i 3 onummerade lag. Detta kan göras på $S(6, 3) \cdot S(5, 3)$ sätt. Vi kan sedan para ihop lagen på $3!$ sätt. Sammanlagt får vi då:

$$S(6, 3) \cdot S(5, 3) \cdot 3!$$

sätt.

Stirlingtalen kan beräknas via rekursionsformeln

$$S(n, 1) = S(n, n) = 1$$

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k).$$

Detta ger

$$S(3, 2) = S(2, 1) + 2S(2, 2) = 1 + 2 \cdot 1 = 3$$

$$S(4, 2) = S(3, 1) + 2S(3, 2) = 1 + 2 \cdot 3 = 7$$

$$S(4, 3) = S(3, 2) + 3S(3, 3) = 3 + 3 \cdot 1 = 6$$

$$S(5, 2) = S(4, 1) + 2S(4, 2) = 1 + 2 \cdot 7 = 15$$

$$S(5, 3) = S(4, 2) + 3S(4, 3) = 7 + 3 \cdot 6 = 25$$

$$S(6, 3) = S(5, 2) + 3S(5, 3) = 15 + 3 \cdot 25 = 90$$

eller som en tabell:

	1	2	3
1	1		
2	1	1	
3	1	3	1
4	1	7	6
5	1	15	25
6	1	31	90

Alltså får vi

$$S(6, 3) \cdot S(5, 3) \cdot 3! = 90 \cdot 25 \cdot 6 = 13500.$$

Svar. 13500

6. Låt $f(x) = 2x^4 + 6x^2 + 4$ och $g(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$.

(a) Använd Euklides algoritm för att bestämma den största gemensamma delaren till $f(x)$ och $g(x)$. **(2 p)**

(b) Bestäm för vilka $x \in \mathbb{R}$ som $f(x) \geq g(x)$. **(2 p)**

Lösningsförslag.

(a) Euklides algoritm ger

$$2x^4 + 6x^2 + 4 = (x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2) \cdot 2 + (6x^3 + 6x)$$

$$x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 = (6x^3 + 6x) \cdot \frac{1}{6}(x - 3) + (2x^2 + 2)$$

$$6x^3 + 6x = (2x^2 + 2) \cdot (3x) + 0.$$

Den största gemensamma delaren är den sista resten som inte är 0, multiplicerad med en konstant som gör resten monisk, dvs $\frac{1}{2}(2x^2 + 2) = x^2 + 1$.

(b) Vi faktorerar den största gemensamma delaren ur polynomen

$$f(x) = (x^2 + 1)(2x^2 + 4)$$

$$g(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 3x + 2)$$

vilket ger

$$f(x) - g(x) = (x^2 + 1)(x^2 + 3x + 2) = (x^2 + 1)(x + 1)(x + 2).$$

Eftersom $x^2 + 1 > 0$ för alla x så är $f(x) - g(x) \geq 0$ precis då $(x + 1)(x + 2) \geq 0$.

Vi gör en teckentabell:

x	-2		-1	
$x + 1$	-	-	0	+
$x + 2$	-	0	+	+
$(x + 1)(x + 2)$	+	0	-	+

Alltså är $f(x) \geq g(x)$ precis då $x \leq -2$ eller $x \geq -1$.

Svar. (a) $x^2 + 1$ (b) $x \in (-\infty, -2] \cup [-1, \infty)$

DEL III

7. Låt $f(x) = e^x - e^{-x}$.

(a) Visa att f är injektiv. (1 p)

(b) Bestäm en invers till f . (3 p)

Lösningsförslag.

(a) Eftersom e^x är strikt växande är e^{-x} strikt avtagande och $-e^{-x}$ strikt växande. Alltså är $f(x) = e^x - e^{-x}$ strikt växande och därmed injektiv.

(b) Låt $y = e^x - e^{-x}$. Vi ska bestämma x som en funktion av y . Vi multiplicerar med e^x vilket ger

$$ye^x = e^{2x} - 1 \quad \Longleftrightarrow \quad (e^x)^2 - y(e^x) - 1 = 0.$$

Detta ger

$$e^x = \frac{y}{2} \pm \sqrt{\frac{y^2}{4} + 1} = \frac{y \pm \sqrt{y^2 + 4}}{2}.$$

Eftersom $e^x > 0$ måste högerledet vara positivt. Eftersom $\sqrt{y^2 + 4} > |y|$ är högerledet positivt precis då vi väljer $+$ och inte $-$. Alltså är

$$f^{-1}(y) = x = \ln \left(\frac{y + \sqrt{y^2 + 4}}{2} \right).$$

Definitions- och värdemängden hos f är $\mathbb{R}$ (eftersom $e^x \rightarrow \infty$ när $x \rightarrow \infty$ och $e^x \rightarrow 0$ när $x \rightarrow -\infty$) så detsamma gäller hos f^{-1} .

(Kommentar: $f(x) = 2 \sinh x$ och $f^{-1}(y) = \operatorname{arcsinh} \frac{y}{2}$.)

Svar. $f^{-1}(x) = \ln \left(\frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2} \right).$

8. Låt $X = \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\})$ vara potensmängden av $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Inför följande relation $\sim$ på X : om $A, B \in X$ så är $A \sim B$ om minsta gemensamma multipeln av alla elementen i A är lika med minsta gemensamma multipeln av alla elementen i B . (Tomma mängden har minsta gemensamma multipeln 1.)
- (a) Visa att $\sim$ är en ekvivalensrelation. (1 p)
- (b) Bestäm antalet ekvivalensklasser. (3 p)

Lösningsförslag.

- (a) Låt $\text{mgm}(A)$ beteckna minsta gemensamma multipeln av elementen i A . Då är $A \sim B$ om och endast om $\text{mgm}(A) = \text{mgm}(B)$. Relationen är reflexiv ($A \sim A$) eftersom $\text{mgm}(A) = \text{mgm}(A)$. Den är symmetrisk ($A \sim B$ medför $B \sim A$) eftersom $\text{mgm}(A) = \text{mgm}(B)$ medför $\text{mgm}(B) = \text{mgm}(A)$. Den är transitiv ($A \sim B \sim C$ medför $A \sim C$) eftersom $\text{mgm}(A) = \text{mgm}(B) = \text{mgm}(C)$ medför $\text{mgm}(A) = \text{mgm}(C)$.
- (b) Ekvivalensklassen av A består av alla B med $\text{mgm}(B) = \text{mgm}(A)$. Om till exempel $\text{mgm}(A) = 4$ får vi ekvivalensklassen

$$[A] = \{\{4\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 4\}\}.$$

Antalet ekvivalensklasser är alltså antalet olika värden på $\text{mgm}(A)$ för $A \in X$.

Vi har primtalsfaktorerna 2, 3 och 5 bland talen 1, 2, 3, 4, 5, 6 och endast 2 förekommer med repetition: $4 = 2^2$. De minsta gemensamma multiplerna som kan komma i fråga är därmed $m = 2^a 3^b 5^c$ där $0 \leq a \leq 2$, $0 \leq b \leq 1$ och $0 \leq c \leq 1$. En mängd med minsta gemensamma multipel m är mängden $A = \{2^a, 3^b, 5^c\}$. Alltså förekommer alla dessa minsta gemensamma multipler hos någon mängd $A \in X$. Antalet ekvivalensklasser blir därmed $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ stycken.

Svar. (b) Antalet ekvivalensklasser är 12 stycken.

9. Fem (särskiljbara) barn ska dela på 18 (identiska) kakor. De ska få minst 2 kakor var och ingen får ta fler än 4 kakor. Det kan bli kakor över. På hur många sätt kan kakorna fördelas? För full poäng ska svaret ges som ett heltal. **(4 p)**

Lösningsförslag. Vi börjar med att dela ut 2 kakor var och har då 8 kakor kvar. Låt a_i vara antalet ytterligare kakor som barn i får. Då blir problemet att hitta antalet lösningar till

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \leq 8, \quad 0 \leq a_i \leq 2, \quad \forall i.$$

Vi inför antalet överblivna kakor $c = 8 - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)$. Då får vi

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + c = 8, \quad 0 \leq a_i \leq 2, \quad \forall i \text{ och } 0 \leq c.$$

Utan begränsningen $a_i \leq 2$ är det frågan om antalet svaga kompositioner av 8 i 6 delar. Det är frågan om stars-and-bars med 8 stjärnor (kakor) och $6 - 1$ pinnar att fördela på $8 + 6 - 1$ positioner: $(\star \star \star | \star \star | \star | \star | \star)$ vilket går att göra på

$$\binom{8+6-1}{6-1} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 13 \cdot 11 \cdot 9 = 1287 \text{ sätt.}$$

Låt A_i vara mängden av de fördelningar där $a_i \geq 3$. Detta är detsamma som att först dela ut 3 kakor extra till barn i och sedan fördela resterande $8 - 3 = 5$ kakor på 5 barn och ett fat vilket kan göras på

$$\binom{5+6-1}{6-1} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 9 \cdot 4 \cdot 7 = 252 \text{ sätt.}$$

Betrakta nu mängden $A_i \cap A_j$ ($i \neq j$) av fördelningar där $a_i, a_j \geq 3$. Om vi börjar med att dela ut 3 kakor extra till barn i och j så ska vi fördela resterande $8 - 3 - 3 = 2$ kakor på 5 barn och ett fat vilket kan göras på

$$\binom{2+6-1}{6-1} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 21 \text{ sätt.}$$

Mängden $A_i \cap A_j \cap A_k$ (med i, j, k distinkta) av fördelningar med $a_i, a_j, a_k \geq 3$ är tom eftersom vi bara har $8 < 3 \cdot 3$ kakor kvar att dela ut.

Med inklusion och exklusion får vi nu totala antalet fördelningar:

$$1287 - 5 \cdot 252 + \binom{5}{2} \cdot 21 = 1287 - 1260 + 210 = 237.$$

Alternativ lösning genom fallindelning enligt nedan

- 4 barn får 4 kakor och det femte barnet 2 kakor. Kan göras på $\binom{5}{4}$ sätt.
- 3 barn får 4 kakor och de övriga två får 2 eller 3 kakor. Kan göras på $\binom{5}{3} \cdot 2^2$ sätt.
- 2 barn får 4 kakor och de övriga tre får 2 eller 3 kakor. Kan göras på $\binom{5}{2} \cdot 2^3$ sätt.
- 1 barn får 4 kakor och de övriga fyra får 2 eller 3 kakor. Kan göras på $\binom{5}{1} \cdot 2^4$ sätt.
- Alla fem barn får 2 eller 3 kakor. Kan göras på 2^5 sätt.

Detta ger sammanlagt $5 + 10 \cdot 4 + 10 \cdot 8 + 5 \cdot 16 + 32 = 237$ sätt.

Alternativ lösning 2. Låt varje barn välja mellan 2, 3 eller 4 kakor. Det kan göras på $3^5 = 243$ sätt. Av dessa har följande fall använt mer än 18 kakor.

- 19 kakor: 4 barn får 4 kakor och det femte barnet 3 kakor. Kan göras på 5 sätt.
- 20 kakor: alla 5 får 4 kakor. Kan göras på 1 sätt.

Detta ger $243 - 5 - 1 = 237$ sätt.

Svar. 237 sätt.