

SF1671, övning 1

EXERCISES P.1

In Exercises 3–4, express the given repeating decimal as a quotient of integers in lowest terms.

4. $3.2\overline{7}$

20. $\frac{x+1}{x} \geq 2$

Solve the equations in Exercises 27–32.

32. $\left| \frac{s}{2} - 1 \right| = 1$

In Exercises 13–26, solve the given inequality, giving the solution set as an interval or union of intervals.

EXERCISES P.2

In Exercises 21–24, write an equation for the line through the two points.

22. $(-2, 1), (2, -2)$

35. **(Two-intercept equations)** If a line is neither horizontal nor vertical and does not pass through the origin, show that its equation can be written in the form $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, where a is its x -intercept and b is its y -intercept.

F1 — Grundläggande terminologi och begrepp, ekvationer och olikheter, absolutbelopp

Fler uppgifter:

(1) Ange alla ekvivalenser/implikationer mellan följande utsagor.

$$A: x^2 < 9, \quad B: x > -3, \quad C: -3 < x < 3. \quad (\text{E})$$

(2) Ange alla ekvivalenser/implikationer mellan följande utsagor för $x, y \in \mathbb{R}$.

$$A: x = y, \quad B: x^2 = y^2, \quad C: xy = x^2, \quad D: xy = y^2. \quad (\text{E})$$

$$(6) \text{ Lös ekvationen } |x + 1| + |2x - 6| = 10. \quad (\text{E})$$

SF1671, övning 3

EXERCISES P.4

In Exercises 1–6, find the domain and range of each function.

4. $F(x) = 1/(x - 1)$

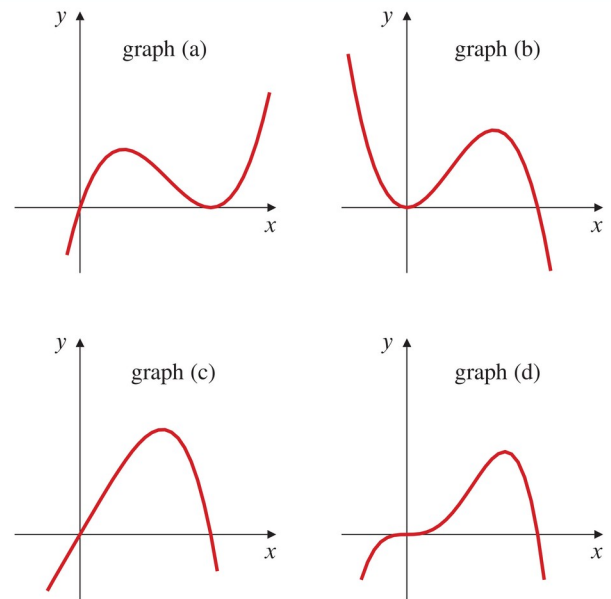


Figure P.57

8. Figure P.57 shows the graphs of the functions: (i) $x - x^4$, (ii) $x^3 - x^4$, (iii) $x(1 - x)^2$, (iv) $x^2 - x^3$. Which graph corresponds to which function?

In Exercises 11–22, what (if any) symmetry does the graph of f possess? In particular, is f even or odd?

14. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$

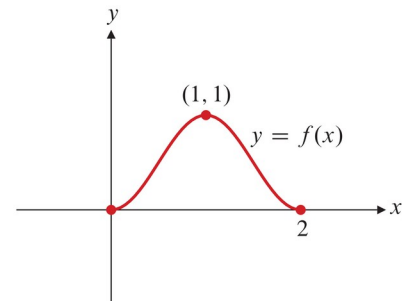


Figure P.58

In Exercises 39–46, f refers to the function with domain $[0, 2]$ and range $[0, 1]$, whose graph is shown in Figure P.58. Sketch the graphs of the indicated functions and specify their domains and ranges.

40. $f(x) - 1$

(4) Lös ekvationen $(3 + \sqrt{x})(3 - \sqrt{x}) = 8\sqrt{x}$.

(E)

EXERCISES P.5

In Exercises 1–2, find the domains of the functions $f + g$, $f - g$, fg , f/g , and g/f , and give formulas for their values.

2. $f(x) = \sqrt{1-x}$, $g(x) = \sqrt{1+x}$

In Exercises 19–24, f refers to the function with domain $[0, 2]$ and range $[0, 1]$, whose graph is shown in Figure P.65. Sketch the graphs of the indicated functions, and specify their domains and ranges.

22. $f(x/3)$

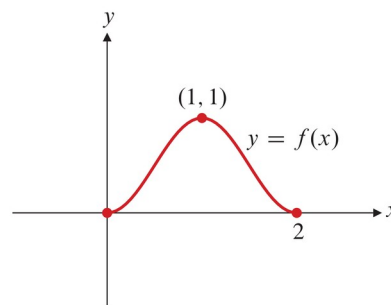


Figure P.65

33. Assume that f is an even function, g is an odd function, and both f and g are defined on the whole real line $\mathbb{R}$. Is each of the following functions even, odd, or neither?

$$f + g, \quad fg, \quad f/g, \quad g/f, \quad f^2 = ff, \quad g^2 = gg$$

$$f \circ g, \quad g \circ f, \quad f \circ f, \quad g \circ g$$

EXERCISES 3.1

Show that the functions f in Exercises 1–12 are one-to-one, and calculate the inverse functions f^{-1} . Specify the domains and ranges of f and f^{-1} .

6. $f(x) = 1 + \sqrt[3]{x}$

12. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

In Exercises 13–20, f is a one-to-one function with inverse f^{-1} . Calculate the inverses of the given functions in terms of f^{-1} .

14. $h(x) = f(2x)$

In Exercises 21–23, show that the given function is one-to-one and find its inverse.

22. $g(x) = \begin{cases} x^3 & \text{if } x \geq 0 \\ x^{1/3} & \text{if } x < 0 \end{cases}$

SF1671, övning 4

EXERCISES P.7

Find the values of the quantities in Exercises 1–6 using various formulas presented in this section. Do not use tables or a calculator.

6. $\sin \frac{11\pi}{12}$

In Exercises 13–16, prove the given identities.

14. $\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \tan \frac{x}{2}$

52. Observers at positions A and B 2 km apart simultaneously measure the angle of elevation of a weather balloon to be 40° and 70° , respectively. If the balloon is directly above a point on the line segment between A and B , find the height of the balloon.

53. Show that the area of triangle ABC is given by $(1/2)ab \sin C = (1/2)bc \sin A = (1/2)ca \sin B$.

EXERCISES 3.2

Simplify the expressions in Exercises 1–18.

4. $\left(\frac{1}{2}\right)^x 4^{x/2}$

6. $\log_4 \left(\frac{1}{8}\right)$

8. $2^{\log_4 8}$

30. Solve $2 \log_3 x + \log_9 x = 10$ for x .

16. $2 \log_3 12 - 4 \log_3 6$

EXERCISES 3.3

Simplify the expressions given in Exercises 1–10.

2. $\ln(e^{1/2} e^{2/3})$

Solve the equations in Exercises 11–14 for x .

12. $3^x = 9^{1-x}$

Solve the inequalities in Exercises 17–18.

18. $\ln(x^2 - 2) \leq \ln x$

(1) Man vet att $\sin x = \frac{2}{3}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Bestäm det exakta värdet av

$$\frac{3 \cos x - \cot x}{3 \sin x + \tan x}.$$

(C)

(2) Avgör om det för alla $x > 0$ gäller att

$$-\frac{x}{2} + \ln x = \ln \left(x(\sqrt{1+e^x} - \sqrt{e^x}) \right) + \ln(\sqrt{1+e^{-x}} + 1).$$

(A)

SF1671, övning 5

C 3.5

In Exercises 1–12, evaluate the given expression.

2. $\cos^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right)$

6. $\cos(\sin^{-1} 0.7)$

10. $\sin\left(\cos^{-1}\left(\frac{-1}{3}\right)\right)$

12. $\tan(\tan^{-1} 200)$

In Exercises 13–18, simplify the given expression.

14. $\cos(\sin^{-1} x)$

C 3.6

2. Verify the addition formulas

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y,$$

$$\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y.$$

Proceed by expanding the right-hand side of each identity in terms of exponentials. Find similar formulas for $\cosh(x - y)$ and $\sinh(x - y)$.

Extra (1)

Vinkeln v är spetsig och $\cos 2v = -1/9$. Bestäm exakt värdet av $\cos v$.

Extra (4)

Lös ekvationen $\sin(3x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Extra (5)

Om $2\cos(x + \frac{\pi}{6}) = 1$, vilka värden kan då $\sin x$ anta?

SF1671, övning 6

DM 2.4

Räkna upp elementen i mängden

$$\{n \mid n \text{ är ett positivt udda tal mindre än } 10\}.$$

DM 2.7

Anta att vi upptäckt dels att $A \subseteq B$ och dels att $B \subseteq A$. Vad kan vi dra för slutsatser om förhållandet mellan A och B ?

DM 2.12

Låt universum $\mathcal{U}$ bestå av siffrorna från noll till nio. Bilda mängderna $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ och $B = \{5, 7, 9\}$. Vilka av följande påståenden är sanna?

- (a) $B \not\subseteq A$
- (b) $3 \in B$
- (c) $7 \notin B$
- (d) $|B| = 3$

DM 2.16

- (a) Uttryck betydelsen i $A \setminus B$ med hjälp av mängdbyggaren.
- (b) Illustrera vad som menas i ett venndiagram.
- (c) Det går att uttrycka $A \setminus B$ med hjälp av de andra räknesätten. Gör det!

DM 2.21

- (a) Illustrera de distributiva lagarna med venndiagram.
- (b) Skriv formella bevis för lagarna.

DM 2.26

Ett register över avställda bilar innehåller 1812 poster. Ett register över bilar som har automatfotograferats vid fortkörning innehåller 1066 poster. Tillsammans innehåller de båda registren 2001 poster. Hur många bilar som egentligen är registrerade som avställda har ändå noterats vid fortkörning?

Extra (1)

Hur många element innehåller mängden $\{1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3\}$?

Extra (2)

Mängderna A , B , C ges av $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 4, 7\}$, $C = \{1, 2, 4\}$.

- (a) Ange mängderna $A \cup B$, $B \cap C$, $B \setminus A$, $A \setminus B$, $\mathcal{P}(C)$, $C \times B$.
- (b) Avgör vilka av följande påståenden som är sanna och vilka som är falska: $C \subseteq A \cap B$, $C \in \mathcal{P}(A)$, $A \in \mathcal{P}(B) \cup \mathcal{P}(C)$, $C \times B \subseteq A \times B$. Motivera.

Extra (4)

Visa, dels med räkneregler på sidan 20 i läroboken (DM) och dels med ett Venndiagram, att för godtyckliga mängder A, B gäller

$$((A^c \cup B^c) \setminus A)^c = A.$$

Minns att $M \setminus N$ kan uttryckas som $M \cap N^c$.

Extra (7)

Vad är $|\mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\})|$ och $|\mathcal{P}(\{\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\})|$? Ange alla element i $\mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\})$ och i $\mathcal{P}(\{\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\})$.

Egen uppgift

Låt $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ vara en ändlig mängd med n element.

- (a) Antag att vi har valt ut m olika delmängder av A :

$$B = \{A_1, \dots, A_m\},$$

där $m \leq n$. Definiera en ny delmängd $C \subseteq A$ enligt

$$C := \{a_k \mid 1 \leq k \leq m \text{ och } a_k \notin A_k\}.$$

Visa att $C \notin B$.

Ledning: För varje k , hitta ett element som är med i A_k men inte i C , eller vice versa, och dra slutsatsen att $A_k \neq C$.

- (b) Använd resultatet i (a) för att visa att $|\mathcal{P}(A)| > |A|$.

SF1671, övning 7

DM 2.32

Rita ett Hassediagram för potensmängden $\mathcal{P}(A)$ till en mängd A med två element.

DM 2.40

Beskriv de mängder som ges av $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}_+$, $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}_+$, $\mathbb{N} \setminus \mathbb{Z}_+$, $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, $\mathbb{N} \setminus \mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ och $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

DM 2.45

Vad är egentligen $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ för något, och har du arbetat med den mängden någon gång?

DM 8.4

Rita grafen och matrisen till relationen $\mathcal{R} = \{(a, c), (a, d), (b, b), (c, a), (c, c), (d, b), (d, e)\}$.

DM 8.24

Avgör om $\mathcal{R}_1 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, e), (b, a), (b, b), (b, c), (b, e), (d, c), (d, d)\}$ respektive $\mathcal{R}_2 = \{(a, b), (a, c), (a, e), (a, e), (b, a), (b, b), (b, c), (b, e), (d, c), (d, d), (e, e)\}$ är transitiva.

DM 8.25

Skriv på svenska vad det skulle innebära om relationen kär-i var

- (a) reflexiv.
- (b) symmetrisk
- (c) anti-symmetrisk
- (d) transitiv.

Extra (2)

För vilka mängder av människor gäller att relationen "är syster till" är symmetrisk?

Extra (5)

Låt $A = \{1, 2, 3\}$ och $X = \{B \subseteq A \mid 1 \in B \text{ eller } 2 \in B\}$. Visa att relationen $\subseteq$ på X är en partialordning. Finn alla minimala, minsta, maximala och största element i X med denna ordning.

Extra (6)

Låt $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, och låt

$$\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 3), (4, 4), (5, 2), (5, 5)\}$$

vara en relation på A . Visa att $\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation och bestäm ekvivalensklasserna.

Egen uppgift

En relation $\mathcal{R}$ på en mängd A kallas för en *välgrundad* relation om det för varje icke-tom delmängd $S \subseteq A$ finns ett element $m \in S$ sådant att $m\mathcal{R}s$ (det vill säga att $(m, s) \in \mathcal{R}$) för alla $s \in S$.

En *totalordning* på en mängd A är (definieras som) en partialordning $\leq$ som också uppfyller att det för alla $x, y \in A$ gäller antingen att $x \leq y$ eller $y \leq x$.

En *välordning* på A är en totalordning som också är välgrundad.

- (a) Visa att en välgrundad partialordning automatiskt är en välordning.
- (b) Visa att en totalordning på en *ändlig* mängd automatiskt är en välordning.
- (c) Ge ett exempel på en totalordning som inte är en välordning.

SF1671, övning 8

DM 3.9

Primfaktorisera 60, 61, 62, 63 och 64.

DM 3.15

Använd Euklides algoritm på talen 100 och 70, för att kontrollera att den verkligen tar fram 10 (som man ser är den största gemensamma delaren).

DM 3.16

Talen 100 och 70 har största gemensamma delare 10. Uttryck 10 som linjärkombination av 100 och 70.

DM 3.46

Konvertera det binära talet 101010 till decimal notation och det decimala talet 101 till binär. Konvertera sedan tillbaka talen till ursprungsnotationen och kontrollera att det blir det du startade med.

Extra (1b)

Beräkna i bas 2:

$$k + l \quad \text{och} \quad m \cdot n,$$

där

$$k = (218)_{10}, \quad l = (137)_{10}, \quad m = (89)_{10}, \quad n = (43)_{10}.$$

Kontrollera additionerna med subtraktion.

Kontrollera slutligen resultaten genom att konvertera svaret till bas 10.

Extra (3)

Tag ett tresiffrigt tal m , där första och sista siffran i m är olika. Bilda ett nytt tal n genom att ta m 's siffror i omvänd ordning (så att t.ex. $m = 385$ ger $n = 583$).

Låt p vara $m - n$ om $m > n$, annars $n - m$. Bilda nu q genom att ta p 's tre siffror i omvänd ordning (så t.ex. $p = 198$ ger $q = 891$ och $p = 99$ ger $q = 990$).

Varför är $p + q = 1089$, oberoende av valet av m ?

Vad blir resultatet om man räknar i bas t ?

Extra (4)

Visa att $x|0$ för alla $x \in \mathbb{Z}$, men $0|x$ om och endast om $x = 0$. Här utgår vi från den definition av delbarhet som gavs på föreläsningen, dvs för heltal a, b gäller att $a|b$ om det finns $q \in \mathbb{Z}$ så att $b = aq$.

Extra (7)

Låt k vara ett heltal. Visa att $3k + 2$ och $5k + 3$ är relativt prima, dvs att $\text{sgd}(3k + 2, 5k + 3) = 1$.

Egen uppgift

Vi kan introducera en relation $\mathcal{R}$ på $\mathbb{N}$ genom att definiera att $(a, b) \in \mathcal{R}$ om och endast om $a|b$.

- (a) Visa att denna relation är en partialordning.
- (b) Vilka är de minsta, minimala, största och maximala elementen för $\mathbb{N}$ under denna partialordning?
- (c) Vilka är de minsta, minimala, största och maximala elementen för delmängden $\mathbb{N} \setminus \{1\} \subseteq \mathbb{N}$?

SF1671, övning 9

DM 3.19a

Hitta gcd och lcm för 408 och 672, och skriv gcd som linjärkombination av talen på minst två olika sätt.

DM 3.22

Det finns en sats som säger att om ett primtal p delar en produkt ab måste det dela någon av faktorerna i produkten.

1. Hitta tre tal p , a och b , där p inte är ett primtal och där slutdelen i satsen inte heller gäller.
2. Hitta tre tal p , a och b , där p inte är ett primtal men där slutdelen av satsen gäller i allfall.

DM 3.26a

Lös den diofantiska ekvationen $8x + 9y = 3$.

Extra (7)

Använd aritmetikens fundamentalsats för att visa att om för $a, b, c \in \mathbb{Z}_+$ gäller att $a^2 = b \cdot c^2$ så måste b vara en perfekt kvadrat.

Extra (8)

Visa att för alla heltal n gäller att $6 \mid n^5 + 5n$.

SF1671, övning 10

DM 3.31

Beräkna $27 \cdot 35 \pmod{12}$ på samma sätt som i exemplet nedan, på alla tre sätten. Vilket var här enklast och vilket var krångligast? (Använd inte räknare!)

Exempel från DM

Vi vill addera 27 och 35 modulo 12. Vi kan antingen börja med att addera talen och sedan reducera modulärt

$$27 + 35 = 62 = 5 \cdot 12 + 2 \equiv 2 \pmod{12}$$

eller först reducera modulärt, därefter addera, och sedan reducera igen

$$27 + 35 = (2 \cdot 12 + 3) + (2 \cdot 12 + 11) \equiv 3 + 11 = 14 = 1 \cdot 12 + 2 \equiv 2 \pmod{12}$$

Fördelen med den här varianten var att vi fick mindre siffror att räkna med, nackdelen var att vi fick reducera modulärt flera gånger. Vi skulle också kunna göra så här:

$$27 + 35 = (2 \cdot 12 + 3) + (3 \cdot 12 - 1) \equiv 3 + (-1) = 2 \pmod{12}$$

Det är fullt tillåtet att i mellanresultat gå över till negativa tal. Vi fick här lättare tal att räkna med, och på köpet slapp vi slutreduktionen. Angående notationen: Vi har använt vanligt "=" vid samband som gäller även vid normal räkning, och " $\equiv$ " vid de som bara gäller då man räknar modulärt. Vanligen reducerar man alla mellanresultat vid moduloberäkningar, så att man får små tal att arbeta med. Men hur vi än lägger upp räkningarna har kommer vi att få samma slutresultat: 2. Och på precis samma sätt räknar man med subtraktion och multiplikation.

DM 3.38abc

Lös ekvationen $8x = 10$

(a) i $\mathbb{Z}_{14}$

(b) i $\mathbb{Z}_{15}$

(c) i $\mathbb{Z}_{16}$

DM 3.43

I "normal" räkning finns den viktiga räkneregeln nollfaktorlagen. Den säger att om en produkt är noll så måste någon av faktorerna vara noll; det går inte att multiplicera fram noll på annat sätt. Tittar man i multiplikationstabellerna i Figur 1 ser man att detta inte är givet i modulär aritmetik.

- (a) I tabellen för $\mathbb{Z}_6$ finns ett antal nolldelare, det vill säga tal andra än noll som kan vara faktorer i noll. Förklara varför det alltid finns nolldelare om man räknar modulo ett sammansatt tal.
- (b) I tabellen för $\mathbb{Z}_7$ finns däremot bara nollor i nollans rad och kolumn. Förklara varför det inte kan finnas nolldelare då man räknar modulo ett primtal.

$\cdot$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1

Figur 1: Multiplikationstabeller för $\mathbb{Z}_6$ och $\mathbb{Z}_7$

DM 3.63

- Skriv upp additions- och multiplikationstabellen för $\mathbb{Z}_8$.
- Vilka tal har en invers, och vad är inversen?
- Hur många lösningar har ekvationen $x^2 = 1$?
- Har du några kommentarer till svaret på föregående uppgift?

Extra (1)

Finn alla heltal x så att $16x \equiv 26 \pmod{42}$.

Extra (3a)

Vad är sista siffran (i bas tio) för talet 3^{22} ?

Extra (5)

Visa att om heltalen x, y, z uppfyller $x^3 + 3y^3 = 9z^3$ så är $x = y = z = 0$.

Egen uppgift

Antag att p är ett primtal, och låt $a \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$.

- Visa att a är inverterbart i $\mathbb{Z}_p$.
- Visa att funktionen $f : \mathbb{Z}_p \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ som ges av $f(x) = a \cdot x$ är bijektiv.
- Visa att

$$(a \cdot 1) \cdot (a \cdot 2) \cdot \dots \cdot (a \cdot (p-2)) \cdot (a \cdot (p-1)) = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (p-2) \cdot (p-1)$$

gäller i $\mathbb{Z}_p$, och förklara varför detta ger att $a^{p-1} = 1$ i $\mathbb{Z}_p$.

- Visa att $a \equiv a^p \pmod{p}$ gäller för alla $a \in \mathbb{Z}$. Detta resultat kallas ibland för *Fermats lilla sats*.

SF1671, övning 11

DM 2.41

Med $2\mathbb{Z}$ menas mängden $\{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Beskriv i ord de mängder som ges av $2\mathbb{Z}$ och $\mathbb{Z} \setminus 2\mathbb{Z}$.

DM 2.47

Visa att mängden $A = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$ och $B = \mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$ har samma kardinalitet genom att skapa en bijektion mellan dem. Försök hitta någon som är lätt att beskriva!
Anmärkning: Elementen i mängden A kallas binära strängar av längd 3.

DM 2.48

Visa att mängden jämna heltal är uppräkneligt oändlig, genom att konstruera en bijektion från $\mathbb{N}$.

DM 8.41

- (a) Är $f(x) = x^3$ injektiv om man räknar i $\mathbb{Z}_7$?
- (b) Är "kubikrot" ett meningsfullt begrepp i $\mathbb{Z}_7$?

Extra (1ab)

Avgör om sambandet $f(x) = x^2$ definierar en injektiv, surjektiv, bijektiv och/eller inverterbar funktion i följande fall

- (a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
- (b) $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$,

Här betecknar $\mathbb{R}_{\geq 0}$ de icke-negativa reella talen $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.

Extra (2a)

Är $f: \mathbb{Z}_9 \rightarrow \mathbb{Z}_9$ injektiv, surjektiv, bijektiv och/eller inverterbar då $f(x) = x^3 + 3x + 7$?

Extra (3)

Avgör om $f: \mathbb{Z}_{4711} \rightarrow \mathbb{Z}_{4711}$, $f(x) = 1632x + 1792$ är injektiv, surjektiv, bijektiv och/eller inverterbar.

Extra (5)

Ge exempel på mängder X, Y, Z och funktioner $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$, så att sammansättningen $g \circ f: X \rightarrow Z$ är en bijektion, trots att varken f eller g är det.
Lite svårare: Samma uppgift, men med kravet att $X = Y = Z$.



Figur 2: Mängderna C_n , för $n = 0, 1, \dots, 6$.

Egen uppgift

Låt A vara en mängd.

- Finns det någon injektion (injektiv funktion) $f : A \hookrightarrow \mathcal{P}(A)$?
- Finns det någon surjektion (surjektiv funktion) $f : A \twoheadrightarrow \mathcal{P}(A)$?
Ledning: Tillhör $B = \{a \in A \mid a \notin f(a)\} \subseteq A$ värdemängden för f ?
- Visa att $|\mathcal{P}(A)| \neq |A|$.
- Betrakta det slutna intervallet $C_0 = [0, 1]$. Om vi tar bort den mittersta tredjedelen av intervallet, där den del som tas bort är ett öppet intervall, får vi en union av två slutna intervall,

$$C_1 = C_0 \setminus (1/3, 2/3) = [0, 1/3] \cup [2/3, 1].$$

Motsvarande kan upprepas på varje del av C_1 , vilket resulterar i en union av fyra slutna intervall,

$$\begin{aligned} C_2 &= ([0, 1/3] \setminus (1/9, 2/9)) \cup ([2/3, 1] \setminus (7/9, 8/9)) \\ &= [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]. \end{aligned}$$

Genom att upprepa denna process får vi mängder C_n , där C_n är en union av 2^n stycken slutna intervall som fås genom att ta bort den mittersta tredjedelen (som tolkas som ett öppet intervall) på varje slutet intervall som C_{n-1} består av, se Figur 2. Snittet $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ kallas för *Cantormängden*. Notera att $C \subseteq \mathbb{R}$.

Visa att det finns en injektion $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \hookrightarrow C$, och därmed en injektion $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \hookrightarrow \mathbb{R}$.

Ledning: Låt $A \subseteq \mathbb{N}$, och definiera $d_k = 0$ för de värden på k där $k \notin A$, och $d_k = 2$ för de k där $k \in A$. I basen tre definierar detta ett tal $x = (0, d_0 d_1 d_2 d_3 \dots)_{\text{tre}}$. Om vi för varje $A \subseteq \mathbb{N}$ kallar det resulterande talet x för $g(A)$ definierar detta en funktion $g : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}$. Visa att $g(A) \in C$ för alla $A \subseteq \mathbb{N}$, och visa att om $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{N}$ och $A_1 \neq A_2$, så finns ett k sådant att $g(A_1)$ och $g(A_2)$ ligger i olika delintervall i C_k .

- Visa med hjälp av resultaten från (c) och (d) att $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$.

Ledning: Antag att det existerar en bijektion $\mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$, och visa att detta leder till att $|\mathbb{N}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.