

Lösningssförslag till ALA 2.3.11

Uppgift

Om L är en isomorfi från V till W (där vi antar att V och W är k -vektorrums, där $k = \mathbb{R}$ eller $k = \mathbb{C}$), visa att L^{-1} är väldefinierad (existerar) och att L^{-1} är en isomorfi från W till V .

Lösningssförslag

Eftersom L är en isomorfi är den linjär och bijektiv. För varje $w \in W$ finns det alltså en unik $v \in V$ som uppfyller $Lv = w$, och vi definierar $L^{-1}w = v$. Detta definierar en avbildning $L^{-1} : W \rightarrow V$, eftersom varje $w \in W$ har exakt en motsvarande $v \in V$. Detta visar att L^{-1} existerar.

För varje $v \in V$ finns det ett $w \in W$ som uppfyller $L^{-1}w = v$, nämligen $w = Lv$. Alltså är L^{-1} surjektiv. Om $w_1, w_2 \in W$ uppfyller $L^{-1}w_1 = L^{-1}w_2$, så är $w_1 = L(L^{-1}w_1) = L(L^{-1}w_2) = w_2$, och alltså är L^{-1} injektiv. Detta visar att L^{-1} är bijektiv.

Det återstår att visa att L^{-1} är linjär. Om $w_1, w_2 \in W$, så är

$$L(L^{-1}(w_1 + w_2)) = w_1 + w_2 = L(L^{-1}w_1) + L(L^{-1}w_2) = L(L^{-1}w_1 + L^{-1}w_2),$$

där vi i sista steget använde att L är linjär. Eftersom L är injektiv innebär det att

$$L^{-1}(w_1 + w_2) = L^{-1}w_1 + L^{-1}w_2,$$

vilket gäller för alla $w_1, w_2 \in W$.

Antag nu att $c \in k$ och $w \in W$. Då är

$$L(L^{-1}(cw)) = cw = cL(L^{-1}(w)) = L(cL^{-1}(w)),$$

där vi i sista steget använde att L är linjär. Eftersom L är injektiv är därför $L^{-1}(cw) = cL^{-1}w$, vilket gäller för alla $c \in k$ och $w \in W$. Detta visar att L^{-1} är linjär.