

Lösningssförslag till ALA 3.2.14

Uppgift

Antag att $A \in M_{m,n}$ och $B \in M_{m',n'}$. Definiera en linjär avbildning $L : \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^{n'} \rightarrow \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^{m'}$ genom att sätta $L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax \\ By \end{pmatrix}$ för alla $x \in \mathbb{R}^n$ och $y \in \mathbb{R}^{n'}$. Bestäm matrisen för L med avseende på standardbaserna,¹ i termer av matriserna A och B .

Lösningssförslag

Låt $\mathcal{B}_1 = \{e_1, \dots, e_n\}$, $\mathcal{B}_2 = \{f_1, \dots, f_{n'}\}$, $\mathcal{C}_1 = \{u_1, \dots, u_m\}$, $\mathcal{C}_2 = \{v_1, \dots, v_{m'}\}$ vara standardbaserna för $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{n'}$, $\mathbb{R}^m$, respektive $\mathbb{R}^{m'}$. Om vi låter

$$b_1 = \begin{pmatrix} e_1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} e_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, b_n = \begin{pmatrix} e_n \\ 0 \end{pmatrix}, b_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ f_1 \end{pmatrix}, b_{n+2} = \begin{pmatrix} 0 \\ f_2 \end{pmatrix}, \dots, b_{n+n'} = \begin{pmatrix} 0 \\ f_{n'} \end{pmatrix}$$

är $\mathcal{B} := \{b_1, \dots, b_{n+n'}\}$ en bas för $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^{n'}$, och om vi låter

$$c_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} u_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, c_m = \begin{pmatrix} u_m \\ 0 \end{pmatrix}, c_{m+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_1 \end{pmatrix}, c_{m+2} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix}, \dots, c_{m+m'} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_{m'} \end{pmatrix}$$

är $\mathcal{C} := \{c_1, \dots, c_{m+m'}\}$ en bas för $\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^{m'}$. Baserna $\mathcal{B}$ och $\mathcal{C}$ är precis de baser som uppgiften syftar på. För $1 \leq j \leq n$ har vi

$$\begin{aligned} Lb_j &= L \begin{pmatrix} e_j \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ae_j \\ B0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1j}u_1 + A_{2j}u_2 + \dots + A_{mj}u_m \\ 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_{m'} \end{pmatrix} \\ &= A_{1j}c_1 + A_{2j}c_2 + \dots + A_{mj}c_m + 0 \cdot c_{m+1} + 0 \cdot c_{m+2} + \dots + 0 \cdot c_{m+m'}. \end{aligned}$$

Detta betyder att den j :te kolonnen (för $1 \leq j \leq n$) i matrisen $[L]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$ är

$$\begin{pmatrix} A_{1j} \\ A_{2j} \\ \vdots \\ A_{mj} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

För $1 \leq j \leq n'$ har vi

$$\begin{aligned} Lb_{n+j} &= L \begin{pmatrix} 0 \\ f_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A0 \\ Bf_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + \dots + 0 \cdot u_m \\ B_{1j}v_1 + B_{2j}v_2 + \dots + B_{m'j}v_{m'} \end{pmatrix} \\ &= 0 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 + \dots + 0 \cdot c_m + B_{1j}c_{m+1} + B_{2j}c_{m+2} + \dots + B_{m'j}c_{m+m'}. \end{aligned}$$

Detta betyder att den $(n+j)$:te kolonnen (för $1 \leq j \leq n'$) i $[L]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$ är

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ B_{1j} \\ B_{2j} \\ \vdots \\ B_{m'j} \end{pmatrix}.$$

¹Med "standardbaserna" menas de baser för $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^{n'}$ respektive $\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^{m'}$ som uppkommer från standardbaserna för $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{n'}$, $\mathbb{R}^m$ och $\mathbb{R}^{m'}$.

Alltså får vi att

$$[L]_{c\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n'} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n'} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & B_{m'1} & B_{m'2} & \cdots & B_{m'n'} \end{pmatrix},$$

eller, skrivet i blockform,

$$[L]_{c\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$