

Lösningssförslag till egen uppgift från övning 5

Uppgift

Låt V beteckna mängden av alla C^∞ -funktioner $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ som är¹ 1-periodiska. Det går att visa att V är ett reellt vektorrum. För $f, g \in V$ definierar vi

$$\langle f|g \rangle_V = \int_0^1 f(x)g(x) dx,$$

vilket ger en inre produkt $\langle \cdot | \cdot \rangle_V$ på V . Vi definierar också en linjär operator $D = \frac{d}{dx} : V \rightarrow V$.

- (a) Beskriv $\ker(D)$ och $\ker(D)^\perp$.
- (b) Visa att $\langle Df|g \rangle_V = -\langle f|Dg \rangle_V$ för alla $f, g \in V$.
- (c) Beskriv $\operatorname{im}(D)$ och $\operatorname{im}(D)^\perp$, och bestäm dimensionen hos kvotrummet $W = V/\operatorname{im}(D)$.
- (d) För godtyckliga element $[f], [g] \in W$ väljer vi representanter $f_1 \in [f] \cap \ker(D)$ och $g_1 \in [g] \cap \ker(D)$, och låter

$$\langle [f]|[g] \rangle_W = \langle f_1|g_1 \rangle_V.$$

Visa att detta är² väldefinierat, och att $\langle \cdot | \cdot \rangle_W$ är en inre produkt på W .

Lösningssförslag

- (a) Eftersom $Df = f'$ är $\ker(D)$ precis de funktioner $f \in V$ vars derivata är identiskt noll. En sådan funktion måste vara konstant, och det gäller också att alla konstanta funktioner $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ faktiskt ligger i V (man kan enkelt verifiera att de är oändligt deriverbara och är periodiska med vilken period som helst). Alltså är

$$\ker(D) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ är konstant}\}.$$

En funktion $f \in V$ ligger i $\ker(D)^\perp$ om och endast om $\int_0^1 f(x)g(x) dx = 0$ för alla $g \in \ker(D)^\perp$, och enligt förra stycket är detta samma sak som att $\int_0^1 f(x) \cdot C dx = C \cdot \int_0^1 f(x) dx = 0$ för alla $C \in \mathbb{R}$, vilket förstås är ekvivalent med att $\int_0^1 f(x) dx = 0$. Alltså är

$$\ker(D)^\perp = \left\{ f \in V \mid \int_0^1 f(x) dx = 0 \right\}$$

- (b) Om $f, g \in V$ ger partiell integration att

$$\langle Df|g \rangle_V = \int_0^1 f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_0^1 - \int_0^1 f(x)g'(x) dx.$$

Eftersom f och g ligger i V är $f(0) = f(1)$ och $g(0) = g(1)$, så att

$$[f(x)g(x)]_0^1 = f(1)g(1) - f(0)g(0) = f(0)g(0) - f(0)g(0) = 0.$$

Alltså är

$$\langle Df|g \rangle_V = - \int_0^1 f(x)g'(x) dx = - \langle f|Dg \rangle_V.$$

- (c) Vi hävdar att $\operatorname{im}(D) = \ker(D)^\perp$. För att bevisa det, antag först att $f \in \operatorname{im}(D)$; då är (per definition) $f = Dh$ för någon $h \in V$. Om $g \in \ker(D)$, ger resultatet från deluppgift (b) att

$$\langle f|g \rangle_V = \langle Dh|g \rangle_V = - \langle h|Dg \rangle_V = - \langle h|0 \rangle_V = 0,$$

och eftersom detta gäller för alla $g \in \ker(D)$ drar vi slutsatsen att $f \in \ker(D)^\perp$. Detta visar att $\operatorname{im}(D) \subseteq \ker(D)^\perp$.

Antag nu att $f \in \ker(D)^\perp$. Vi vill bevisa att $f \in \operatorname{im}(D)$, dvs. att det finns en funktion $h \in V$ sådan att $h' = f$. Eftersom f är kontinuerlig har den en primitiv funktion; låt oss välja en godtycklig primitiv

¹Med andra ord ska $f(x+1) = f(x)$ gälla för alla x .

²Med andra ord, visa att sådana representanter kan väljas, och att uttrycket i högerledet i definitionen av $\langle [f]|[g] \rangle_W$ är entydigt definierat.

funktion h till f . Eftersom derivatan till h är f , vilket därefter (enligt antagande) kan deriveras oändligt många gånger, är h en C^∞ -funktion. För att visa att h ligger i V återstår det att visa att h är 1-periodisk. Antag därför att $x \in \mathbb{R}$. Enligt analysens huvudsats är

$$h(x+1) - h(x) = \int_x^{x+1} f(x) dx.$$

Om vi låter $\lfloor x \rfloor$ beteckna det största heltalet som uppfyller $\lfloor x \rfloor \leq x$, ger 1-periodiciteten hos f att

$$\begin{aligned} h(x+1) - h(x) &= \int_{x-\lfloor x \rfloor}^{x-\lfloor x \rfloor+1} f(x) dx = \int_{x-\lfloor x \rfloor}^1 f(x) dx + \int_1^{x-\lfloor x \rfloor+1} f(x) dx \\ &= \int_{x-\lfloor x \rfloor}^1 f(x) dx + \int_0^{x-\lfloor x \rfloor} f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx, \end{aligned}$$

vilket enligt resultatet från deluppgift (a) är noll. Eftersom x var godtyckligt följer det att h är 1-periodisk, och därmed att $h \in V$. Detta avslutar beviset för att $\text{im}(D) = \ker(D)^\perp$.

Vi hävdar även att $\text{im}(D)^\perp = \ker(D)$. Notera att detta inte följer direkt av att $\text{im}(D) = \ker(D)^\perp$. Ortogonal komplementering på båda sidor av denna likhet ger $\text{im}(D) = (\ker(D)^\perp)^\perp$, men i allmänhet behöver inte det ortogonala komplementet till det ortogonala komplementet till ett delrum vara lika med delrummet i oändligdimensionella vektorrum (som V är). Däremot gäller det alltid att det senare är ett delrum av det tidigare, vilket i vårt fall säger att $\ker(D) \subseteq (\ker(D)^\perp)^\perp = \text{im}(D)^\perp$.

För att visa att $\text{im}(D)^\perp = \ker(D)$ räcker det alltså att visa att $\text{im}(D)^\perp \subseteq \ker(D)$; antag därför att $f \in \text{im}(D)^\perp$. För alla $g \in V$ gäller det enligt resultatet från deluppgift (b) att $\langle Df|g \rangle_V = -\langle f|Dg \rangle_V$, vilket är noll eftersom $Dg \in \text{im}$. Alltså är Df ortogonal mot alla element i V , och speciellt är den ortogonal mot sig själv: $\langle Df|Df \rangle_V = 0$. Då den inre produkten är positivt definit betyder detta att $Df = 0$, eller ekvivalent, $f \in \ker(D)$.

Låt nu $L : V \rightarrow \mathbb{R}$ vara den linjära avbildningen som definieras av $L(f) = \int_0^1 f(x) dx$. Resultatet från deluppgift (a) ger att $\ker(L) = \ker(D)^\perp$, vilket vi just har visat är lika med $\text{im}(D)$. Enligt isomorfisatsen är då $W \cong \text{im}(L)$. Dimensionen hos $\text{im}(L)$ är antingen 0 eller 1, eftersom det är ett delrum av $\mathbb{R}$. Denna dimension kan inte vara 0, eftersom det finns funktioner $f \in V$ för vilka $L(f) \neq 0$, och alltså är $\dim(W) = 1$.

(d) Lösning kommer snart.