



**SF1681 Linjär algebra, fk
Tentamen
Modelltentamen**

Skrivtid: 14:00-19:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: Mats Boij

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. Del I utgörs av de tre första uppgifterna som testar förmågan att lösa basala problem. Del II utgörs av de två följande uppgifterna och testar begreppsförståelse och kunskap om satser och samband. De fyra sista uppgifterna utgör del III och testar förmågan att lösa mer avancerade problem och är avsedda främst för högre betyg.

Bonuspoäng av typ I adderas till erhållna poäng på del I och bonuspoäng av typ II adderas till erhållna poäng på del II.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av följande tabell där kolumnerna anger poänggräns för respektive del.

Del	Poäng	Innehåll	Fx	E	D	C	B	A
I	12	Basala problem	7	8	8	8	8	8
II	8	Begrepp och satser	4	4	4	6	6	6
III	16	Avancerade problem	0	0	3	6	9	12

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL I – BASALA PROBLEM

1. Beräkna den Jordankanoniska formen för den linjära operatören $D: P_4 \longrightarrow P_4$ som ges av $D(f) = f'(x)$ där P_4 är vektorrummet av polynom av grad högst fyra med komplexa koefficienter. **(4 p)**

2. Låt $V \subseteq L^2(S_{2\pi}^1)$ vara inre-produktrummet med bas som ges av funktionerna $\sin nx$, för $n = 1, 2, 3$ med den inre produkten

$$\langle f|g \rangle = \int_0^{2\pi} \overline{f(x)}g(x) dx.$$

Bestäm matrisen för operatören $L: V \longrightarrow V$ som ges av

$$L(f)(x) = \int_0^{2\pi} f(t) \cos(x - t) dt$$

med avseende på den givna basen och avgör om operatören är självdjungerad. **(4 p)**

3. Låt A vara 3×3 -matrisen med element i $\mathbb{Z}_2$ - heltalen modulo 2 - som ges av

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bestäm *minimalpolynomet* till A och använd detta för att avgöra om A är diagonaliserbar. **(4 p)**

DEL II – BEGREPP OCH SATSER

4. För singularvärdesuppdelning av matriser används begreppet *unitära* matriser.
- (a) Vad betyder det att en matris är *unitär*? (1 p)
 - (b) Ge ett belysande exempel på en unitär 2×2 -matris. (1 p)
 - (c) Hur används singularvärdesuppdelning för definition av pseudoinvers? (1 p)
 - (d) Ge ett belysande exempel på pseudoinversen av en 3×4 -matris. (1 p)
5. I boken finns en sats som ger sambandet mellan två egenskaper hos ett par diagonaliserbara operatorer på ett ändligdimensionellt vektorrum, att de *kommuterar* och att de är *samtidigt diagonaliserbara*.
- (a) Vad betyder de båda egenskaperna? (1 p)
 - (b) Vilket är sambandet? (1 p)
 - (c) En del av sambandet är enkelt att bevisa. Vilket? Hur bevisar man det? (2 p)
-

Var god vänd!

DEL III – AVANCERADE PROBLEM

6. Den linjära partiella differentialekvationen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

där k är en nollskild konstant kan analyseras med hjälp av linjära operatorer och deras egenvärden och egenvektorer på vektorrummet $C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

(a) Skriv differentialoperatören $\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ som en produkt av två kommuterande operatorer, L_1 och L_2 och bestäm egenvektorer till var och en av dessa operatorer.

(2 p)

(b) Visa att egenvektorer med egenvärde 0 till $L_1 \circ L_2$ kan skrivas som summor av egenvektorer med egenvärde 0 för L_1 respektive L_2 och använd det för att skriva upp den allmänna lösningen till differentialekvationen.

(2 p)

7. Låt $L: V \rightarrow V$ vara en operator på ett reellt vektorrum som med basen $\{e_1, e_2, e_3\}$ för V ges av matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Med hjälp av L får vi en avbildning $L \otimes L^*: V \otimes V^* \rightarrow V \otimes V^*$ från den bilinjära avbildningen $V \times V^* \rightarrow V \otimes V^*$ som ges av $(x, \phi) \mapsto L(x) \otimes L^*(\phi)$, för $x \in V$ och $\phi \in V^*$.

(a) Bestäm matrisen för $L \otimes L^*$ med avseende på basen $\{e_i \otimes e_j^*\}$.

(2 p)

(b) Bestäm $\det(L \otimes L^*)$. (Ledning: $\det(L) = 7$.)

(2 p)

8. Följden $\{x_i\}_{i \geq 0}$ definieras genom den linjära rekursionen $x_{i+2} = x_{i+1} + x_i$, för $i \geq 0$ och $x_0 = x_1 = 1$. Bestäm x_{2017} om räkningarna sker i $\mathbb{Z}_{11}$.

(4 p)

9. Exponentialavbildningen för reella eller komplexa matriser ges av $\exp(A) = \sum_{i=0}^{\infty} A^i / i!$, för A i $M_n(k)$ där $k = \mathbb{R}$ eller $k = \mathbb{C}$.

(a) Visa att $\exp(A) \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ om och endast om $\mathrm{Tr}(A) = 0$ för A i $M_n(\mathbb{R})$.

(2 p)

(b) Låt $V \subseteq M_2(k)$ ges av $V = \{A \in M_2(k) : \mathrm{Tr}(A) = 0\}$. Avgör om exponentialavbildningen $\exp: V \rightarrow \mathrm{SL}_2(k)$ är surjektiv för $k = \mathbb{R}$ respektive $k = \mathbb{C}$.

(2 p)



**SF1681 Linjär algebra, fk
Tentamen
10 januari 2018**

Skrivtid: 14:00-19:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Mats Boij

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. Del I utgörs av de tre första uppgifterna som testar förmågan att lösa basala problem. Del II utgörs av de två följande uppgifterna och testar begreppsförståelse och kunskap om satser och samband. De fyra sista uppgifterna utgör del III och testar förmågan att lösa mer avancerade problem och är avsedda främst för högre betyg.

Bonuspoäng av typ I adderas till erhållna poäng på del I och bonuspoäng av typ II adderas till erhållna poäng på del II.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av följande tabell där kolumnerna anger poänggräns för respektive del.

Del	Poäng	Innehåll	Fx	E	D	C	B	A
I	12	Basala problem	7	8	8	8	8	8
II	8	Begrepp och satser	4	4	4	6	6	6
III	16	Avancerade problem	0	0	3	6	9	12

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL I – BASALA PROBLEM

1. Bestäm Jordans normalform för den operator på $\mathbb{C}^2$ som ges av matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & i\sqrt{2} \\ 2i\sqrt{2} & -1 \end{bmatrix}.$$

(4 p)

2. Låt $V = \mathbb{C}[x]$ vara vektorrummet som ges av alla polynom i x med komplexa koefficienter och låt $W = \{p(x) \in V : p(1) = p(-1) = 0\}$.

(a) Bestäm en linjär avbildning $L: V \rightarrow U$ så att $W = \ker(L)$.

(1 p)

(b) Bestäm en bas för V/W .

(3 p)

3. Bestäm pseudoinversen till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

(4 p)

DEL II – BEGREPP OCH SATSER

4. Låt V vara ett komplext inre produktrum och L en operator på V .

(a) Hur definieras den *adjungerade operatoren* $L^\dagger$?

(1 p)

(b) Hur kan man visa att den adjungerade operatoren existerar då $\dim V < \infty$?

(1 p)

(c) Ge ett belysande exempel på ett inre produktrum V och en operator L som inte är självadjungerad, men där både L och $L^\dagger$ är naturliga operatorer.

(2 p)

5. (a) Vad är en *sannolikhetsmatris*?

(1 p)

(b) Alla sannolikhetsmatriser har 1 som ett egenvärde. Hur bevisar man det?

(1 p)

(c) Formulera någon version av Perron-Frobenius sats.

(1 p)

(d) Ge ett exempel som visar att $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$ inte behöver existera även om A är en irreducibel sannolikhetsmatris.

(1 p)

DEL III – AVANCERADE PROBLEM

6. På Hilbertrummet $\ell_2(\mathbb{C}) = \{\{a_j\}_{j \geq 0} : a_j \in \mathbb{C}, \forall j \geq 0 \text{ och } \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2 < \infty\}$ definierar vi en operator L genom $L(\{a_j\}_{j \geq 0}) = \{b_j\}_{j \geq 0}$ där

$$b_j = \begin{cases} -a_{j+1} & \text{om } j \text{ är jämnt,} \\ a_{j-1} & \text{om } j \text{ är udda.} \end{cases}$$

Kontrollera att $L(\{a_j\}_{j \geq 0})$ tillhör $\ell_2(\mathbb{C})$ om $\{a_j\}_{j \geq 0}$ gör det och bestäm alla egenvärden, egenvektorer och singularvärden till operatoren L . **(4 p)**

7. Låt $V \subseteq \mathbb{C}^3$ vara delrummet som ges av ekvationen $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ och betrakta tensorprodukten $V \otimes V$ som ett delrum i $\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3$. Avgör om någon av tensorerna

$$e_1 \otimes e_3 + e_2 \otimes e_1 - 2e_3 \otimes e_2$$

eller

$$e_1 \otimes e_1 - e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_2 - e_3 \otimes e_3$$

ligger i $V \otimes V$, där e_1, e_2, e_3 är standardbasvektorer för $\mathbb{C}^3$. **(4 p)**

8. Låt K vara delmängden av $M_2(\mathbb{Z}_7)$ som ges av

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{Z}_7 \right\}.$$

Visa att K bildar en kropp med 49 element och lös ekvationerna $x^2 + 2x + 2 = 0$ respektive $x^6 = 1$ i K . **(4 p)**

9. Inom *grafteori* används *grannmatriser* och deras egenvärden. En *graf* är en mängd *hörn* och en mängd *kanter* som går mellan par av hörn. Grannmatrisen för en graf med hörn $\{1, 2, \dots, n\}$ är den symmetriska $n \times n$ -matris som ges av

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om det går en kant mellan hörnen } i \text{ och } j, \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Betrakta cykelgrafen C_n med n hörn där det går en kant mellan hörn i och hörn $i + 1$ för $i = 1, 2, \dots, n - 1$, men också en kant mellan hörn 1 och hörn n . Bestäm egenvärdena för grannmatrisen för C_n . (Ledning: Matrisen kan skrivas som $B + B^T$ där $B^n = I$.) **(4 p)**



**SF1681 Linjär algebra, fk
Tentamen
5 april 2018**

Skrivtid: 08:00-13:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Mats Boij

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. Del I utgörs av de tre första uppgifterna som testar förmågan att lösa basala problem. Del II utgörs av de två följande uppgifterna och testar begreppsförståelse och kunskap om satser och samband. De fyra sista uppgifterna utgör del III och testar förmågan att lösa mer avancerade problem och är avsedda främst för högre betyg.

Bonuspoäng av typ I adderas till erhållna poäng på del I och bonuspoäng av typ II adderas till erhållna poäng på del II.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av följande tabell där kolumnerna anger poänggräns för respektive del.

Del	Poäng	Innehåll	Fx	E	D	C	B	A
I	12	Basala problem	7	8	8	8	8	8
II	8	Begrepp och satser	4	4	4	6	6	6
III	16	Avancerade problem	0	0	3	6	9	12

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL I – BASALA PROBLEM

1. Låt $k = \{0, 1, a, 1 + a\}$ vara kroppen med fyra element.
- (a) Skriv upp additions- och multiplikationstabellerna för k . **(2 p)**
 - (b) Bestäm en matris A med koefficienter i $\mathbb{Z}_2$ sådan att k kan representeras av matriserna $\{0, I, A, A + I\}$. **(2 p)**
2. Låt $V = P_5$ vara polynom i x av grad högst 5 med komplexa koefficienter. Definiera produkten av polynom i V som den vanliga produkten, men där vi bortser från termer som har grad 6 eller högre i produkten. Operatoren $L: V \rightarrow V$ definieras av multiplikation med polynomet $x^5 - x^4 + x^3$.
- (a) Bestäm en bas för kärnan $\ker(L)$. **(2 p)**
 - (b) Bestäm en bas för bildrummet $\operatorname{im}(L)$. **(2 p)**
3. Bestäm singularvärden och singularvektorer till matriserna

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}.$$

(4 p)

DEL II – BEGREPP OCH SATSER

4. Betrakta operatorer L på ett ändligdimensionellt vektorrum V .
- (a) Definiera begreppen *minimalpolynom* och *karaktäristiskt polynom*. **(1 p)**
 - (b) Ge ett par belysande exempel på klasser av operatorer där minimalpolynomet inte är lika med det karaktäristiska polynomet. **(1 p)**
 - (c) Visa att alla egenvärden till en operator måste vara nollställen både till minimalpolynomet och till det karaktäristiska polynomet. **(1 p)**
 - (d) Vad säger Cayley-Hamiltons sats och vad kan man dra för slutsats från den om relationen mellan minimalpolynomet och det karaktäristiska polynomet? **(1 p)**
5. Låt V och W vara ändligdimensionella vektorrum.
- (a) Definiera tensorprodukten $V \otimes W$. **(1 p)**
 - (b) Visa att $\dim V \otimes W = (\dim V)(\dim W)$. **(1 p)**
 - (c) Visa att det finns en naturlig bilinjär avbildning $\Phi: V \times W \rightarrow V \otimes W$. **(1 p)**
 - (d) Tensorprodukten $V \otimes W$ har tillsammans med den bilinjära avbildningen från del (c) en universell egenskap med avseende på bilinjära avbildningar $V \times W \rightarrow U$, nämligen att alla sådana faktoriserar på ett entydigt sätt via Φ . Förklara vad detta innebär och skissera ett bevis för att detta gäller. **(1 p)**

DEL III – AVANCERADE PROBLEM

6. Låt $V = \mathbb{C}[x]$ vara vektorrummet som består av polynom i en variabel med komplexa koefficienter. Definiera den inre produkten $\langle \cdot | \cdot \rangle$ så att $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$ bildar en ortonormal bas för V . Låt $L: V \rightarrow \mathbb{C}$ vara den linjära avbildning som ges av $L(p(x)) = p(1)$ och låt $W = \ker(L)$.

(a) Bestäm en ortogonal bas för W . (3 p)

(b) Bestäm en bas för $W^\perp$. (1 p)

7. För en linjär operator L på V kan vi bilda en linjär operator på $V \otimes V$ genom $I \otimes L - L \otimes I$, där I är identitetsoperatoren på V .

(a) Bestäm rangen för $I \otimes L - L \otimes I$ om L ges av matrisen (2 p)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

(b) Visa att $I \otimes L - L \otimes I$ är nilpotent om L är nilpotent, men att det omvända inte alltid gäller. (2 p)

8. En *derivation* på $\mathbb{C}[x]$ med avseende på ett komplext tal a är en linjär avbildning

$$D: \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathbb{C}$$

som uppfyller

$$D(f(x)g(x)) = g(a)D(f(x)) + f(a)D(g(x)),$$

för alla $f(x)$ och $g(x)$ i $\mathbb{C}[x]$.

(a) Visa att mängden av derivationer på $\mathbb{C}[x]$ med avseende på a bildar ett vektorrum $\text{Der}_a(\mathbb{C}[x])$. (1 p)

(b) Bestäm dimensionen av $\text{Der}_a(\mathbb{C}[x])$, exempelvis genom att använda hur derivationerna verkar på en lämpligt vald bas för $\mathbb{C}[x]$. (3 p)

9. Visa att $\det A \geq 0$ för alla reella antisymmetriska matriser A . (4 p)
-



SF1681 Linjär algebra, fk
Tentamen
9 januari 2019

Skrivtid: 14:00-19:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: Mats Boij

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. Del I utgörs av de tre första uppgifterna som testar förmågan att lösa grundläggande problem. Del II utgörs av de två följande uppgifterna och testar begreppsförståelse och kunskap om satser och samband. De fyra sista uppgifterna utgör del III och testar förmågan att lösa mer avancerade problem och är avsedda främst för högre betyg. Bonuspoäng av typ I adderas till erhållna poäng på del I och bonuspoäng av typ II adderas till erhållna poäng på del II. Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av följande tabell där kolumnerna anger poänggräns för respektive del.

Del	Poäng	Innehåll	Fx	E	D	C	B	A
I	12	Grundläggande problem	7	8	8	8	8	8
II	8	Begrepp och satser	4	4	4	6	6	6
III	16	Avancerade problem	0	0	3	6	9	12

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Låt $V = \mathbb{C}[x]$ vara vektorrummet av polynom med komplexa koefficienter. Definiera $L: V \rightarrow V$ genom $L(p(x)) = \int_{-x}^x p(t) dt$ för alla $p(x) \in V$. Visa att L är linjär och bestäm en bas för kärnan $\ker(L)$ och en bas för bildrummet $\operatorname{im}(L)$. **(4 p)**

2. Låt $V = C^\infty(\mathbb{R})$ vara de oändligt deriverbara komplexvärda funktionerna på $\mathbb{R}$ med inre produkt

$$\langle f|g \rangle = \int_0^1 \overline{f(t)}g(t) dt, \quad \text{för alla } f, g \in V,$$

låt $W = \{f \in V: f(t+1) = f(t), \forall t \in \mathbb{R}\}$ och låt $L: W \rightarrow W$ ges av $L(f) = f'$. Bestäm den adjungerade operatoren $L^\dagger$. **(4 p)**

3. I en Markovkedja ges fördelningen vid tidpunkt $t = n + 1$ av fördelningen vid tidpunkt $t = n$ genom den stokastiska matrisen

$$A = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 7 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Avgör om $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$ existerar och bestäm i så fall gränsvärdet. **(4 p)**

DEL II – BEGREPP OCH SATSER

4. (a) Definiera begreppen *egenvektor* och *egenvärde* till en linjär operator L på ett vektorrum V . **(1 p)**
- (b) Definiera begreppet *minimalpolynom* för en linjär operator L på ett vektorrum V och visa att alla egenvärden till L måste vara nollställen till minimalpolynomet om L har ett minimalpolynom. **(1 p)**
- (c) Visa att alla operatorer på V har ett minimalpolynom om $\dim V < \infty$ och ge ett exempel på en operator på ett oändligdimensionellt vektorrum som saknar minimalpolynom. **(2 p)**
5. (a) Vad menas med att en operator L på ett komplext inre-produktrum är *unitär*? **(1 p)**
- (b) Ge exempel på en linjär operator L på ett komplext inre-produktrum V som uppfyller $\|L(x)\| = \|x\|$ för alla x i V utan att L är unitär. **(1 p)**
- (c) Visa att $\exp(iH)$ är unitär om H är en självadjungerad operator och $\exp(iH)$ är väldefinierad. **(2 p)**

DEL III – AVANCERADE PROBLEM

6. En följd av 2×2 -matriser $\{X_i\}_{i \geq 0}$ definieras rekursivt av

$$X_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{och} \quad X_{n+1} = 3X_n - 2X_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Bestäm en explicit formel för X_n . **(4 p)**

7. Låt $V = \mathbb{C}^n$ med bas $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Bestäm rangen av den linjära avbildningen

$$L: \bigwedge^2 V \longrightarrow \bigwedge^3 V$$

som ges av $L(x) = x \wedge (e_1 + e_2 + \dots + e_n)$, för $x \in \bigwedge^2 V$. **(4 p)**

8. För heltal $n \geq 1$ låt P_n vara vektorrummet av polynom av grad högst n med komplexa koefficienter. Definiera $L: P_n \longrightarrow P_n$ genom

$$L(p(x)) = p(x+1) - 2p(x) + p(x-1), \quad \text{för alla } p(x) \in P_n.$$

Visa att L är nilpotent och bestäm Jordans normalform för L . **(4 p)**

9. Visa att en operator L på ett vektorrum V som uppfyller $L^2 = I$ är diagonaliserbar, oavsett om $\dim V$ är ändlig eller inte, under förutsättning att $1 + 1 \neq 0$ i den kropp som utgör skalärerna för V . (*Ledning:* Betrakta operatorerna $L_1 = \frac{1}{2}(I + L)$ och $L_2 = \frac{1}{2}(I - L)$.)

Detta ger att en operator som är både unitär och självadjungerad måste vara diagonaliserbar. Varför? **(4 p)**



SF1681 Linjär algebra, fk
Tentamen
17 april 2019

Skrivtid: 14:00-19:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: Mats Boij

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. Del I utgörs av de tre första uppgifterna som testar förmågan att lösa grundläggande problem. Del II utgörs av de två följande uppgifterna och testar begreppsförståelse och kunskap om satser och samband. De fyra sista uppgifterna utgör del III och testar förmågan att lösa mer avancerade problem och är avsedda främst för högre betyg. Bonuspoäng av typ I adderas till erhållna poäng på del I och bonuspoäng av typ II adderas till erhållna poäng på del II. Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av följande tabell där kolumnerna anger poänggräns för respektive del.

Del	Poäng	Innehåll	Fx	E	D	C	B	A
I	12	Grundläggande problem	7	8	8	8	8	8
II	8	Begrepp och satser	4	4	4	6	6	6
III	16	Avancerade problem	0	0	3	6	9	12

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Låt $V = \mathbb{C}[x]$ vara vektorrummet av polynom med komplexa koefficienter. Definiera $L: V \rightarrow V$ genom $L(p(x)) = p(x+1) + p(x-1)$ för alla $p(x) \in V$. Visa att L är linjär och bestäm en bas för kärnan $\ker(L)$ och en bas för bildrummet $\text{im}(L)$. **(4 p)**

2. Låt

$$S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

- (a) Avgör vilka av matriserna i S som är Hermiteska och bestäm egenvärdena för någon av dessa. **(2 p)**
- (b) Avgör vilka av matriserna i S som är unitära och bestäm egenvärdena för någon av dessa. **(2 p)**

3. Bestäm det största singularvärdet och motsvarande höger- och vänstersingulära vektorer som hör till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

(4 p)

DEL II – BEGREPP OCH SATSER

4. (a) Definiera begreppet *inre direkt summa av delrum*. (1 p)
 (b) Visa att om W är ett delrum av V så finns ett delrum U så att $U \oplus W = V$ som en inre direkt summa i fallet då $\dim V < \infty$. (1 p)
 (c) Visa att om $V = U \oplus W$ som inre direkt summa av delrum så är $V/U \cong W$. (2 p)
5. (a) Ge definitionen av en *inre produkt* på ett komplext vektorrum. (1 p)
 (b) Vad är det som gör att $C^0([0, 1], \mathbb{C})$, rummet av kontinuerliga komplexvärda funktioner på enhetsintervallet, med den inre produkten som ges av $\langle f|g \rangle = \int_0^1 \overline{f(t)}g(t) dt$ inte är ett Hilbertrum? (1 p)
 (c) Bevisa att en inre produkt på ett komplext vektorrum är unikt bestämd av normen. (2 p)

DEL III – AVANCERADE PROBLEM

6. Låt $L: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ vara den linjära avbildning som ges av matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

med avseende på standardbasen. Visa att $\cos(tL)$ är en väldefinierad operator på $\mathbb{C}^2$ för alla komplexa tal t och bestäm matrisen för denna operator med avseende på standardbasen. (4 p)

7. Låt $V = \mathbb{C}[x]$ och definiera $L: V \rightarrow V$ genom

$$L(p(x)) = p(x) + p(\xi x) + p(\xi^2 x), \quad \forall p(x) \in V,$$

där $\xi = e^{2i\pi/3}$. Visa att L har två egenvärden λ_1 och λ_2 så att $V = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2}$. (4 p)

8. Bestäm A^{2019} då

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

har koefficienter i $\mathbb{Z}_7$. (4 p)

9. Bestäm alla unitära stokastiska matriser (sannolikhetsmatriser) och avgör om de bildar en grupp under matrismultiplikation. (4 p)



SF1681 Linjär algebra, fk
Tentamen
9 januari 2020

Skrivtid: 14:00–19:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: David Rydh

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. Del I utgörs av de tre första uppgifterna som testar förmågan att lösa grundläggande problem. Del II utgörs av de två följande uppgifterna och testar begreppsförståelse och kunskap om satser och samband. De fyra sista uppgifterna utgör del III och testar förmågan att lösa mer avancerade problem och är avsedda främst för högre betyg. Bonuspoäng av typ I adderas till erhållna poäng på del I och bonuspoäng av typ II adderas till erhållna poäng på del II. Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av följande tabell där kolumnerna anger poänggräns för respektive del.

Del	Poäng	Innehåll	Fx	E	D	C	B	A
I	12	Grundläggande problem	7	8	8	8	8	8
II	8	Begrepp och satser	4	4	4	6	6	6
III	16	Avancerade problem	0	0	3	6	9	12

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Låt $V = P_{10}$ vara vektorrummet av polynom av grad högst 10 med komplexa koefficienter (kallas $\mathbb{C}_{10}[x]$ i kursboken). Definiera $L: V \rightarrow V$ genom $L(p(x)) = xp'(x) + p(1)$. Bestäm alla egenvärden och egenrum till L . Är L diagonaliserbar? **(4 p)**

2. Låt $V = C^\infty([0, 1])$ vara de oändligt deriverbara komplexvärda funktionerna på $[0, 1]$ med inre produkt

$$\langle f|g \rangle = \int_0^1 \overline{f(t)}g(t) dt, \quad \text{för alla } f, g \text{ i } V.$$

Låt $L: V \rightarrow V$ ges av $L(f(t)) = f(t)e^{it}$. Är L självadjungerad? Är L unitär? **(4 p)**

3. Låt $V = \mathbb{C}^3$ och låt $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

- (a) Visa att det finns en unik linjär avbildning $L: \bigwedge^2 V \rightarrow \mathbb{C}$ sådan att $L(x \wedge y) = x^T A y$ för alla $x, y \in V$. **(2 p)**
- (b) Bestäm en bas för kärnan till L . **(2 p)**

DEL II – BEGREPP OCH SATSER

4. (a) Låt V vara ett vektorrum och W ett delrum. Låt $v_1, v_2 \in V$ vara två vektorer. När är $q(v_1) = q(v_2)$ där $q: V \rightarrow V/W$ är kvotavbildningen? **(1 p)**
- (b) Låt $L: V \rightarrow U$ vara en linjär avbildning mellan vektorrum. Formulera *isomorfi-satsen* för L (den säger något om L och kvotrum). **(1 p)**
- (c) Låt V vara ett ändligtdimensionellt inre-produktrum och W ett delrum. Definiera en avbildning Φ mellan $W^\perp$ och V/W och visa att Φ är en isomorfi. **(2 p)**
5. Låt V vara ett ändligtdimensionellt komplext inre-produktrum och L en operator på V .
- (a) Vad menas med den *adjungerade operatoren* $L^\dagger$ till L ? Vad innebär det att L är *själv-adjungerad*? **(1 p)**
- (b) Visa att om L är självadjungerad så har V en ortogonal bas bestående av egenvektorer till L . *Tips: använd induktion på $\dim V$.* **(2 p)**
- (c) Ge ett exempel på ett inre-produktrum V som ovan med en operator L som har en ortogonal bas av egenvektorer men som inte är självadjungerad. **(1 p)**

DEL III – AVANCERADE PROBLEM

6. Låt A vara 4×4 -matrisen med element i $\mathbb{Z}_2$ (dvs heltalen modulo 2) som ges av:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Låt S vara delrummet av 4×4 -matriser som ges av $S = \{p(A) : p(x) \text{ är ett polynom med koefficienter i } \mathbb{Z}_2\}$. Bestäm antalet element i S . Utgör S en kropp? **(4 p)**

7. Låt $x_0, x_1, x_2, \dots$ vara en följd av heltal som uppfyller att $x_0 = -5$ och $x_1 = 2$ samt att $x_n = -2x_{n-1} - x_{n-2}$ för $n \geq 2$. Bestäm x_{2020} . **(4 p)**

8. Låt P_1 vara vektorrummet av polynom av grad högst 1 med reella koefficienter. Vi ger P_1 och $P_1 \otimes P_1$ de inre produkterna som bestäms av:

$$\langle p_1 | p_2 \rangle = p_1(0)p_2(0) + p_1'(0)p_2'(0), \quad \text{för alla } p_1, p_2 \in P_1,$$

$$\langle p_1 \otimes q_1 | p_2 \otimes q_2 \rangle = \langle p_1 | p_2 \rangle \langle q_1 | q_2 \rangle, \quad \text{för alla } p_1, q_1, p_2, q_2 \in P_1.$$

Låt $L: P_1 \otimes P_1 \rightarrow P_1$ vara den linjära avbildning som uppfyller $L(p \otimes q) = pq' + p(0)q$.

- (a) Bestäm ortonormala baser till P_1 och $P_1 \otimes P_1$ och bestäm matrisen för L med avseende på dessa baser. **(1 p)**
- (b) Bestäm singularvärdena till L samt höger- och vänstersingularvektorer till det största singularvärdet. **(3 p)**

9. Låt V vara ett komplext vektorrum av dimension n och L en operator på V . Visa att L är diagonaliserbar om och endast om minimalpolynomet $q_L(t)$ är en produkt av distinkta linjära faktorer, dvs om och endast om

$$q_L(t) = \prod_{i=1}^r (t - \lambda_i)$$

för något heltal r och $\lambda_i \neq \lambda_j$ för alla $i \neq j$. **(4 p)**



SF1681 Linjär algebra, fk

Tentamen (distans)

16 april 2020

Skrivtid: 08:00–09:40 (1+4+7), 10:00–11:40 (2+5+8), 12:00–13:40 (3+6+9)

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: David Rydh

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger 2–5 poäng. Del I (12 p) utgörs av de tre första uppgifterna och testar förmågan att lösa grundläggande problem. Del II (8 p) utgörs av de tre följande uppgifterna och testar begreppsförståelse och kunskap om satser och samband. Del III (16 p) utgörs av de tre sista uppgifterna och testar förmågan att lösa mer avancerade problem och är avsedda främst för högre betyg. Bonuspoäng av typ I adderas till erhållna poäng på del I och bonuspoäng av typ II adderas till erhållna poäng på del II. Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av följande tabell där kolumnerna anger poänggräns för respektive del.

Del	Poäng	Innehåll	Fx	E	D	C	B	A
I	12	Grundläggande problem	7	8	8	8	8	8
II	8	Begrepp och satser	4	4	4	6	6	6
III	16	Avancerade problem	0	0	3	6	9	12

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Låt V vara vektorrummet av komplexa 2×2 -matriser. Låt $L: V \rightarrow V$ vara operatoren som definieras av följande matrismultiplikation:

$$L(A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

Bestäm Jordans normalform för L .

(4 p)

2. Låt $V = \mathbb{C}[t]$ vara vektorrummet av polynom med komplexa koefficienter med inre produkt

$$\langle f|g \rangle = \int_0^\infty \overline{f(t)}g(t)e^{-t} dt, \quad \text{för alla } f, g \text{ i } V.$$

Låt $L: V \rightarrow V$ vara operatoren som ges av $L(f) = tf'$. Bestäm den adjungerade operatoren $L^\dagger$. (När tentamen skrevs var uppgiften för "operatorn" $L(f) = f'$ på delrummet W av polynom med $f(0) = 0$. Men detta är inte en operator på W eftersom $f'(0)$ inte behöver vara 0. Operatoren på V som ges av $L(f) = f'$ saknar adjunkt.)

(4 p)

3. Betrakta den komplexa matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \\ i & i \end{bmatrix}$.

(a) Bestäm singularvärdena till A .

(2 p)

(b) Bestäm höger- och vänstersingularvektorer till det största singularvärdet.

(2 p)

DEL II – BEGREPP OCH SATSER

4. (a) Ge ett exempel på en 3×3 -sannolikhetsmatris (ej identitetsmatrisen). **(1 p)**
 (b) Visa att en sannolikhetsmatris alltid har en egenvektor med egenvärde 1. **(1 p)**
 (c) Antag att A är en sannolikhetsmatris sådan att alla element i matrisen A^3 är positiva. Vad kan vi då säga om egenvärden med absolutbelopp 1 och deras algebraiska multipliciteter? **(1 p)**
5. Låt V vara ett ändligtdimensionellt vektorrum och $L: V \rightarrow V$ en operator.
 (a) Vad innebär det att V är en *inre direkt summa* av två delrum V_1 och V_2 ? **(1 p)**
 (b) Visa att V är en inre direkt summa av $\ker L$ och $\operatorname{im} L$ om L är diagonaliserbar. **(1 p)**
 (c) Ge exempel på V och L så att V inte är en inre direkt summa av $\ker L$ och $\operatorname{im} L$.
 (Tips: välj till exempel L så att $\operatorname{im} L \subseteq \ker L$.) **(1 p)**
6. Låt V vara ett ändligtdimensionellt komplext inre-produktrum. En *skevhermiteisk* operator $L: V \rightarrow V$ är en operator sådan att $L^\dagger = -L$.
 (a) Visa att alla egenvärden till en skevhermiteisk operator är rent imaginära. **(1 p)**
 (b) Kursboken visar att Hermiteiska, dvs självdjungerade, operatorer är diagonaliserbara. Använd detta för att visa att skevhermiteiska operatorer är diagonaliserbara. **(1 p)**

DEL III – AVANCERADE PROBLEM

7. Betrakta Hilbertrummet $\ell_2(\mathbb{C})$ av oändliga följder $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots)$ av komplexa tal sådana att $\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2 < \infty$ med den inre produkten $\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \overline{a_j} b_j$. Låt L vara operatören på $\ell_2(\mathbb{C})$ som tar följden $(a_0, a_1, \dots)$ på följden $(b_0, b_1, \dots)$ där
- $$b_j = \frac{1}{2}(a_{j-1} + a_{j+1}) \quad (\text{med konventionen att } a_{-1} = 0).$$
- (a) Är L unitär? **(1 p)**
 (b) Är L självdjungerad? **(1 p)**
 (c) Visa att $L(\mathbf{a})$ verkligen tillhör $\ell_2(\mathbb{C})$ om $\mathbf{a}$ gör det. **(1 p)**
 (d) Bestäm kärnan till L . **(2 p)**
8. Betrakta följande stokastiska process i diskret tid. Tillstånden ges av $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$, dvs heltalen modulo 3, och om tillståndet vid tiden t är $n \in \mathbb{Z}_3$ så är tillståndet vid tiden $t+1$
- $n^2 \in \mathbb{Z}_3$ med sannolikheten $1 - 2\alpha$,
 - $n^2 - 1 \in \mathbb{Z}_3$ med sannolikheten α , och
 - $n^2 + 1 \in \mathbb{Z}_3$ med sannolikheten α ,
- där $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$ är en konstant. Modellera detta som en Markovkedja. Avgör för vilka α som processen konvergerar mot en sannolikhetsfördelning som inte beror på tillståndet vid tiden $t = 0$. Bestäm den stationära sannolikhetsfördelningen för dessa α . **(5 p)**
9. Låt V och W vara vektorrum av dimension m och n över en kropp K . Låt
- $$P = \{ v \otimes w : v \in V, w \in W \} \subseteq V \otimes W$$
- vara de dekomposerbara (även kallade rena) tensorerna.
 (a) För vilka m och n är $P = V \otimes W$? Är svaret samma för alla kroppar K ? **(3 p)**
 (b) Om $K = \mathbb{Z}_p$ är heltalen modulo p för ett primtal p , hur många element har P ? **(3 p)**



SF1681 Linjär algebra, fk
Tentamen
11 januari 2021

Skrivtid: 14:00–19:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: David Rydh

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. Del I utgörs av de tre första uppgifterna som testar förmågan att lösa grundläggande problem. Del II utgörs av de två följande uppgifterna och testar begreppsförståelse och kunskap om satser och samband. De fyra sista uppgifterna utgör del III och testar förmågan att lösa mer avancerade problem och är avsedda främst för högre betyg. Bonuspoäng av typ I adderas till erhållna poäng på del I och bonuspoäng av typ II adderas till erhållna poäng på del II. Det går dock inte att få mer än 12 respektive 8 poäng på dessa delar. Betygsgränserna vid tentamen kommer preliminärt att ges av följande tabell där kolumnerna anger poänggräns för respektive del/hela skrivningen.

Del	Poäng	Innehåll	Fx	E	D	C	B	A
I	12	Grundläggande problem	-	-	-	-	-	-
II	8	Begrepp och satser	4	4	4	6	6	6
III	16	Avancerade problem	-	-	-	-	-	-
hela	36		11	12	18	22	26	30

Till exempel krävs för betyg C minst 22 poäng totalt varav 6 poäng på del II.

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Låt $C^1([0, 1], \mathbb{R})$ vara vektorrummet av kontinuerligt deriverbara funktioner $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Låt $V = \text{Span}\{\sin x, \cos x, e^x, e^{-x}\}$ och låt $L: V \rightarrow V$ vara operatoren som ges av

$$L(f)(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f'(x)) - f(0)e^x.$$

- (a) Bestäm en bas för bilden $\text{im } L$. (2 p)
(b) Är V en inre direkt summa av kärnan $\ker L$ och bilden $\text{im } L$? (2 p)

2. Låt $\mathbb{C}[x]$ vara vektorrummet av polynom med komplexa koefficienter med inre produkt

$$\langle p(x) | q(x) \rangle = \int_0^1 \overline{p(x)} q(x) dx, \quad \text{för alla } p(x), q(x) \text{ i } \mathbb{C}[x].$$

Bestäm den ortogonala projektionen av $x^2 + x + 1$ på delrummet $V = \text{Span}\{1, x\}$. (4 p)

3. Låt $\mathbb{C}$ vara de komplexa talen betraktat som ett reellt vektorrum.

- (a) Vad är dimensionen av tensorprodukten $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$? (1 p)
(b) Visa att det finns en unik linjär avbildning $L: \mathbb{C} \otimes \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sådan att $L(z \otimes w) = zw$ för alla $z, w \in \mathbb{C}$. (1 p)
(c) Bestäm en bas för kärnan till L . (2 p)

DEL II – BEGREPP OCH SATSER

4. Ge exempel på komplexa 2×2 -matriser A , B , C och D sådana att
- (a) A är Hermitesk men inte unitär. (1 p)
 - (b) B är unitär men inte Hermitesk. (1 p)
 - (c) C är diagonaliserbar men varken unitär eller Hermitesk. (1 p)
 - (d) D är inte diagonaliserbar. (1 p)
5. Låt V vara ett komplext vektorrum med bas $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$.
- (a) Definiera det *duala vektorrummet* V^* och den *duala basen* $\mathbf{b}_1^*, \dots, \mathbf{b}_n^*$ till $\mathcal{B}$. (1 p)
 - (b) Visa att $\mathbf{b}_1^*, \dots, \mathbf{b}_n^*$ är en bas. (2 p)
 - (c) Låt L vara en operator på V som i basen $\mathcal{B}$ ges av matrisen $A = (A_{ij})$. Definiera den *duala avbildningen* $L^*: V^* \rightarrow V^*$ och beskriv dess matris i den duala basen. (1 p)

DEL III – AVANCERADE PROBLEM

6. För alla värden på parametern $a \in \mathbb{R}$, bestäm Jordans normalform till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2a - 3 & a \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 3 - a & 2 \end{bmatrix}.$$

(Du behöver inte bestämma någon Jordanbas.) (4 p)

7. Låt $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ vara två vektorer i $\mathbb{R}^n$ och låt ℓ_1 och ℓ_2 vara motsvarande linjer genom origo i $\mathbb{R}^n$. Låt θ vara vinkeln mellan $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$. Notera att $0 \leq \theta \leq \pi$.
- (a) Om $n = 2$ och S_i betecknar speglingen i linjen ℓ_i , för vilka vinklar θ kommuterar S_1 och S_2 ? Beskriv också operatoren $S_1 S_2$ för varje sådan vinkel θ . (2 p)
 - (b) Om $n = 3$ och R_i betecknar rotation kring linjen ℓ_i med vinkeln $\pi/3$ (vinkeln mäts med hjälp av riktningsvektorn $\mathbf{v}_i$ och högerhandsregeln), för vilka vinklar θ kommuterar R_1 och R_2 ? Beskriv operatoren $R_1 R_2$ för varje sådan vinkel θ . (2 p)
8. Låt V vara ett ändligtdimensionellt reellt inre produktrum. Låt $\text{Hom}(V, V)$ vara rummet av operatorer på V med den inre produkten $\langle L_1 | L_2 \rangle = \text{tr}(L_1^\dagger L_2)$. Låt $S \subset \text{Hom}(V, V)$ vara delrummet av symmetriska, dvs självadjungerade, operatorer. Bestäm $S^\perp$ och ge en enkel formel för den ortogonala projektionen på S . (4 p)
9. Låt V vara ett komplext vektorrum av dimension n och låt $d, k \geq 1$ vara heltal. Vad är det minsta respektive största möjliga värdet på $\dim \ker(L^k)$ för en operator L på V sådan att $\dim \ker(L) = d$? (4 p)



**SF1681 Linjär algebra, fk
Tentamen
8 april 2021**

Skrivtid: 8:00–13:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: David Rydh

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. Del I utgörs av de tre första uppgifterna som testar förmågan att lösa grundläggande problem. Del II utgörs av de två följande uppgifterna och testar begreppsförståelse och kunskap om satser och samband. De fyra sista uppgifterna utgör del III och testar förmågan att lösa mer avancerade problem och är avsedda främst för högre betyg. Bonuspoäng av typ I adderas till erhållna poäng på del I och bonuspoäng av typ II adderas till erhållna poäng på del II. Det går dock inte att få mer än 12 respektive 8 poäng på dessa delar. Betygsgränserna vid tentamen kommer preliminärt att ges av följande tabell där kolumnerna anger poänggräns för respektive del/hela skrivningen.

Del	Poäng	Innehåll	Fx	E	D	C	B	A
I	12	Grundläggande problem	-	-	-	-	-	-
II	8	Begrepp och satser	4	4	4	6	6	6
III	16	Avancerade problem	-	-	-	-	-	-
hela	36		11	12	18	22	26	30

Till exempel krävs för betyg C minst 22 poäng totalt varav 6 poäng på del II.

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Låt A vara följande reella matris.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Bestäm det karakteristiska polynomet $p_A(t)$ och minimalpolynomet $q_A(t)$. **(4 p)**

2. Låt $C^0([0, 2\pi], \mathbb{C})$ vara vektorrummet av kontinuerliga komplexvärda funktioner på intervallet $[0, 2\pi]$ med inre produkt $\langle f(x)|g(x) \rangle = \int_0^{2\pi} \overline{f(x)}g(x) dx$. Låt V vara delrummet av trigonometriska polynom, dvs $V = \text{Span}\{e^{ikx} : k \in \mathbb{Z}\}$. Avgör om följande operatorer på V är självadjungerade och/eller unitära.

(a) $L_1(f)(x) = f'(x)$ **(2 p)**

(b) $L_2(f)(x) = (e^{ix} + e^{-ix})f(x)$ **(2 p)**

3. Vi har en stokastisk process $\mathbf{p}(t)$ som ges av $\mathbf{p}(t+1) = A\mathbf{p}(t)$ där

$$A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

med startfördelningen $\mathbf{p}(0) = [0.2 \quad 0.3 \quad 0.5]^T$. Avgör om gränsvärdet $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{p}(t)$ existerar och beräkna i så fall det. **(4 p)**

DEL II – BEGREPP OCH SATSER

4. Låt V vara ett ändligtdimensionellt komplext vektorrum och L en linjär operator på V .
- (a) Definiera begreppen *generaliserad egenvektor* (kallas *power vector* i kursboken) och *generaliserat egenrum* för L . **(1 p)**
 - (b) Beskriv de operatorer vars generaliserade och vanliga egenrum sammanfaller. **(1 p)**
 - (c) Bestäm alla möjliga Jordans normalformer om L är nilpotent och $\dim V = 3$. **(1 p)**
 - (d) Ge ett exempel på två operatorer med samma karakteristiska polynom men inte samma Jordans normalform. **(1 p)**
5. Låt V och W vara vektorrum med baser $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ och $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_m$.
- (a) Ange en bas för *tensorprodukten* $V \otimes W$. Vad är dess dimension? **(1 p)**
 - (b) Ange en bas för den *yttre potensen* $\bigwedge^2 V$. Vad är dess dimension? **(1 p)**
 - (c) Definiera en naturlig linjär avbildning $L: W \otimes V^* \rightarrow \text{Hom}(V, W)$ utan att hänvisa till baserna (där V^* betecknar det duala vektorrummet). **(1 p)**
 - (d) Visa att L är en isomorfi. *Tips: Här kan du använda baser.* **(1 p)**

DEL III – AVANCERADE PROBLEM

6. Betrakta Hilbertrummet $\ell_2(\mathbb{C})$ av oändliga följder $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots)$ av komplexa tal sådana att $\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2 < \infty$ med den inre produkten $\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \overline{a_j} b_j$. Låt V vara delrummet av följder $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots)$ sådana att $a_{2k+1} = a_{2k}$ för alla heltal $k \geq 0$.

- (a) Bestäm det ortogonala komplementet $V^\perp$. (2 p)
 (b) Är $\ell_2(\mathbb{C})$ en inre direkt summa av V och $V^\perp$? (2 p)

7. Låt A vara följande 2×2 -matris med element i kroppen $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{0, 1, -1\}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- (a) Visa att $\{p(A) : p(x) \in \mathbb{F}_3[x]\}$ utgör en kropp K och bestäm antalet element i denna kropp. (2 p)
 (b) Betrakta nu A som en 2×2 -matris över kroppen K . Bestäm dess egenvärden i K och motsvarande egenvektorer i K^2 . (2 p)

8. Låt A vara en komplex $n \times n$ -matris med egenvärden $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ och singularvärden $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n$.

- (a) Visa att $|\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n| = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n$. (2 p)
 (b) Visa att $|\lambda_i| \leq \sigma_1$ för alla i . (2 p)

9. Låt V och W vara vektorrum med baserna $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ och $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_m\}$. För en delmängd $S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ av storlek m med $s_1 < s_2 < \dots < s_m$ låter vi $P_S: V \rightarrow W$ och $J_S: W \rightarrow V$ vara de linjära avbildningarna som ges av

$$J_S(\mathbf{f}_i) = \mathbf{e}_{s_i}, \quad P_S(\mathbf{e}_j) = \begin{cases} \mathbf{f}_i & \text{om } j = s_i \\ \mathbf{0} & \text{om } j \notin S \end{cases}$$

Låt $L_S = J_S \circ P_S$.

- (a) Visa att $\sum_S (\bigwedge^m L_S)$ är identitetsoperatoren på $\bigwedge^m V$. (2 p)
 (b) Visa att $\det(A \circ B) = \sum_S \det(A \circ J_S) \det(P_S \circ B)$ om $A: V \rightarrow W$ och $B: W \rightarrow V$ är linjära avbildningar. (2 p)

Summorna är över alla delmängder $S \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ av storlek m . Finns inga sådana delmängder så är summan 0.



SF1681 Linjär algebra, fk
Tentamen
12 januari 2022

Skrivtid: 14:00–19:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: David Rydh

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. Del I utgörs av de tre första uppgifterna som testar förmågan att lösa grundläggande problem. Del II utgörs av de två följande uppgifterna och testar begreppsförståelse och kunskap om satser och samband. De fyra sista uppgifterna utgör del III och testar förmågan att lösa mer avancerade problem och är avsedda främst för högre betyg. Bonuspoäng av typ I adderas till erhållna poäng på del I och bonuspoäng av typ II adderas till erhållna poäng på del II. Det går dock inte att få mer än 12 respektive 8 poäng på dessa delar. Betygsgränserna vid tentamen kommer preliminärt att ges av följande tabell där kolumnerna anger poänggräns för respektive del/hela skrivningen.

Del	Poäng	Innehåll	Fx	E	D	C	B	A
I	12	Grundläggande problem	-	-	-	-	-	-
II	8	Begrepp och satser	4	4	4	6	6	6
III	16	Avancerade problem	-	-	-	-	-	-
hela	36		11	12	18	22	26	30

Till exempel krävs för betyg C minst 22 poäng totalt varav 6 poäng på del II.

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Låt $\ell^2(\mathbb{C})$ vara Hilbertrummet av följder $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots)$ med $|\mathbf{a}|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} |a_i|^2 < \infty$ och den inre produkten $\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} \overline{a_i} b_i$. Låt $c \in \mathbb{C}$ vara ett komplext tal med $|c| \leq 1$ och låt $L_c: \ell^2(\mathbb{C}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{C})$ vara operatoren som tar följden $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots)$ på följden $L_c(\mathbf{a}) = (a_0, ca_1, c^2a_2, c^3a_3, \dots)$.

(a) Bestäm den adjungerade operatoren $L_c^\dagger$. (2 p)

(b) För vilka $c \in \mathbb{C}$ är L_c självadjungerad och/eller unitär? (2 p)

2. Låt $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$. Bestäm Jordans normalform till A och beräkna A^{2022} . (4 p)

3. Låt $K = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$. Detta är en kropp.

(a) Avgör om matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ är diagonaliserbar över kroppen K . (2 p)

(b) Bestäm en 2×2 -matris $B \in M_2(\mathbb{Q})$ och en isomorfi av kroppar $\varphi: K \rightarrow \text{Span}\{I, B\}$, dvs en isomorfi av $\mathbb{Q}$ -vektorum som tar multiplikation i K till multiplikation av matriser. (2 p)

DEL II – BEGREPP OCH SATSER

4. Låt V vara ett vektorrum och $L: V \rightarrow V$ en operator.
- (a) Definiera vad som menas med minimalpolynomet $q_L(t)$ för L . **(1 p)**
 - (b) Visa att minimalpolynomet existerar om $\dim V = n < \infty$ och har grad $\leq n^2$. **(1 p)**
 - (c) Ge ett exempel på en operator L på ett ändligtdimensionellt vektorrum V sådan att minimalpolynomet $q_L(t)$ inte är lika med det karakteristiska polynomet $p_L(t)$. **(1 p)**
 - (d) Ge ett exempel på en operator L sådan att $q_L(t)$ inte existerar. **(1 p)**
5. (a) Vad innebär det att en $n \times n$ -matris A är unitär? **(1 p)**
- (b) Vad innebär en *singulärvärdesuppdelning* (en: *singular value decomposition*) av en linjär avbildning $L: V \rightarrow W$ mellan ändligtdimensionella inre produktrum V och W ? Definiera även begreppen *singulärvärde* och *singulärvektor*. **(1 p)**
- (c) Visa att en $n \times n$ -matris A är unitär om och endast om A har n stycken singulärvärden som alla är 1. **(2 p)**

DEL III – AVANCERADE PROBLEM

6. En följd av polynom $p_0(t), p_1(t), \dots$ definieras rekursivt av
- $$p_0(t) = 4t - 1, \quad p_1(t) = 4t^2 + 1, \quad \text{och} \quad p_{n+1}(t) = 2p_n(t) + 3p_{n-1}(t) \text{ för } n \geq 1.$$
- Bestäm en explicit formel för $p_n(t)$. **(4 p)**
7. Låt V vara ett komplext vektorrum och definiera en avbildning $f: V \times V \rightarrow V \otimes V$ genom $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \otimes \mathbf{y} - \mathbf{y} \otimes \mathbf{x}$. Visa att det finns en unik operator L på $V \otimes V$ sådan att $L(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Visa att $V \otimes V = \text{im } L \oplus \ker L$ är en inre direkt summa. **(4 p)**
8. Låt $A \in M_n(\mathbb{C})$ vara en $n \times n$ -matris och låt $L: \mathbb{C}[x] \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ vara den linjära avbildningen som definieras av $L(p(x)) = p(A) + p'(A)$.
- (a) Bestäm de möjliga dimensionerna för bildrummet till L när A varierar men n är fixt. **(2 p)**
 - (b) Bestäm ett delrum $V \subset \mathbb{C}[x]$ sådant att $\mathbb{C}[x] = V \oplus \ker(L)$ när $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. **(2 p)**
9. Låt V vara ett ändligtdimensionellt komplext inre produktrum. Låt $V_1, V_2, \dots, V_m$ vara en-dimensionella delrum, för något $m \geq 1$, och låt $L_i: V \rightarrow V$ vara operatorn som projicerar ortogonalt på V_i för $i = 1, 2, \dots, m$. Låt $L = L_1 + L_2 + \dots + L_m$.
- (a) Visa att L är diagonaliserbar med högst m noll-skilda egenvärden. **(2 p)**
 - (b) Visa att egenvärdena är reella och icke-negativa och att det största egenvärdet ligger i intervallet $[1, m]$. **(2 p)**



SF1681 Linjär algebra, fk
Tentamen
21 april 2022

Skrivtid: 8:00–13:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: David Rydh

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. Del I utgörs av de tre första uppgifterna som testar förmågan att lösa grundläggande problem. Del II utgörs av de två följande uppgifterna och testar begreppsförståelse och kunskap om satser och samband. De fyra sista uppgifterna utgör del III och testar förmågan att lösa mer avancerade problem och är avsedda främst för högre betyg. Bonuspoäng av typ I adderas till erhållna poäng på del I och bonuspoäng av typ II adderas till erhållna poäng på del II. Det går dock inte att få mer än 12 respektive 8 poäng på dessa delar. Betygsgränserna vid tentamen kommer preliminärt att ges av följande tabell där kolumnerna anger poänggräns för respektive del/hela skrivningen.

Del	Poäng	Innehåll	Fx	E	D	C	B	A
I	12	Grundläggande problem	-	-	-	-	-	-
II	8	Begrepp och satser	4	4	4	6	6	6
III	16	Avancerade problem	-	-	-	-	-	-
hela	36		11	12	18	22	26	30

Till exempel krävs för betyg C minst 22 poäng totalt varav 6 poäng på del II.

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

- Låt $V = \mathbb{C}[x]$ vara vektorrummet av polynom med komplexa koefficienter. Låt $L: V \rightarrow V$ vara operatoren som ges av $L(p(x)) = (x-1)(p(x) + p(-x))$.
 - Bestäm en bas för kärnan $\ker L$ och en bas för bilden $\operatorname{im} L$. **(2 p)**
 - Är V en inre direkt summa av $\ker L$ och $\operatorname{im} L$? **(2 p)**
- Låt $V = \mathbb{C}[x]_{\leq 4}$ vara vektorrummet av polynom av grad ≤ 4 med komplexa koefficienter. Ge V den inre produkten $\langle p(x)|q(x) \rangle = \overline{p(0)}q(0) + \overline{p'(0)}q'(0) + \dots + \overline{p^{(4)}(0)}q^{(4)}(0)$. Bestäm alla $a, b \in \mathbb{C}$ sådana att operatoren $L: V \rightarrow V$, som ges av $L(p(x)) = p(ax+b)$, är självadjungerad. **(4 p)**
- Betrakta den komplexa matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.
 - Bestäm singularvärdena till A . **(2 p)**
 - Bestäm höger- och vänstersingularvektorer till det största singularvärdet. **(2 p)**

DEL II – BEGREPP OCH SATSER

4. Låt V vara ett ändligtdimensionellt komplext inre produktrum och låt $W \subset V$ vara ett delrum.
- (a) Definiera det *ortogonala komplementet* $W^\perp$. (1 p)
 - (b) Givet en ortonormal bas $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r$ för W , ge en formel för den *ortogonala projektionen* på W . (1 p)
 - (c) Visa att $V = W \oplus W^\perp$ är en inre direkt summa. (1 p)
 - (d) Ge ett exempel på ett vektorrum V , ett delrum W och två inre produkter på V som ger olika ortogonala komplement $W^\perp$. (1 p)
5. Låt V vara ett ändligtdimensionellt vektorrum och låt S och T vara operatorer på V .
- (a) Vad innebär det att S och T *kommuterar* och vad innebär det att de är *samtidigt diagonaliserbara*? (1 p)
 - (b) Vilket/vilka samband gäller mellan egenskaperna i (a)? (1 p)
 - (c) Visa att om V är ett komplext inre produktrum och S och T är kommuterande och *självadjungerade* så finns en *ortonormal* bas till V bestående av egenvektorer till både S och T . (2 p)
-

DEL III – AVANCERADE PROBLEM

6. Låt n vara ett positivt heltal. Låt $V = \mathbb{C}[x]_{\leq n}$ vara vektorrummet av komplexa polynom av grad $\leq n$. Bestäm Jordans normalform till operatorn $L: V \rightarrow V$ som ges av $L(p(x)) = p(x+1) - p(x)$. (4 p)
7. Betrakta "Fibonacci" talföljd $x_1 = 1, x_2 = 1$ och $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ för alla $n \geq 1$ men där talen $x_1, x_2, \dots$ tillhör den ändliga kroppen $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Vad är x_{2022} ? (4 p)
8. Låt A och B vara komplexa 2×2 -matriser. Antag att A har egenvärdena 0 och 1 och B har egenvärdena -3 och 3 . Bestäm alla möjliga egenvärden till $A + B$ om:
- (a) $AB = BA$, (1 p)
 - (b) A och B är godtyckliga, (2 p)
 - (c) A och B är Hermiteska. (1 p)
9. Låt $L: M_{n,n} \rightarrow M_{n,n}$ vara operatorn på vektorrummet av reella $n \times n$ -matriser som ges av $L(A) = A - A^T + \text{tr}(A)I$. Bestäm minimalpolynomet och det karakteristiska polynomet för L för varje positivt heltal n . (4 p)
-



SF1681 Linjär algebra, fk
Tentamen
11 januari 2023

Skrivtid: 14:00–19:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: David Rydh

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. Del I utgörs av de tre första uppgifterna som testar förmågan att lösa grundläggande problem. Del II utgörs av de två följande uppgifterna och testar begreppsförståelse och kunskap om satser och samband. De fyra sista uppgifterna utgör del III och testar förmågan att lösa mer avancerade problem och är avsedda främst för högre betyg. Bonuspoäng av typ I adderas till erhållna poäng på del I och bonuspoäng av typ II adderas till erhållna poäng på del II. Det går dock inte att få mer än 12 respektive 8 poäng på dessa delar. Betygsgränserna vid tentamen kommer preliminärt att ges av följande tabell där kolumnerna anger poänggräns för respektive del/hela skrivningen.

Del	Poäng	Innehåll	Fx	E	D	C	B	A
I	12	Grundläggande problem	-	-	-	-	-	-
II	8	Begrepp och satser	4	4	4	6	6	6
III	16	Avancerade problem	-	-	-	-	-	-
hela	36		11	12	18	22	26	30

Till exempel krävs för betyg C minst 22 poäng totalt varav 6 poäng på del II.

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Låt $V = \mathbb{C}[x]_{\leq 4}$ vara vektorrummet av polynom av grad ≤ 4 . Låt $L: V \rightarrow V$ vara operatör $I - \left(\frac{d}{dx}\right)^2$, dvs den som ges av $L(p)(x) = p(x) - p''(x)$. Bestäm Jordans normalform för L . **(4 p)**
2. Låt V vara vektorrummet av kontinuerliga funktioner $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ med kompakt stöd, dvs $f(x) = 0$ för alla $|x| > R$ för något R (beroende på f). Ge V den inre produkten $\langle f|g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)}g(x)e^x dx$. Låt $L: V \rightarrow V$ vara operatör som ges av $L(f)(x) = f(x+1)$.
 - (a) Bestäm den adjungerade operatör till L . **(2 p)**
 - (b) Avgör för varje $c \in \mathbb{C}$ om cL är självdjungead. **(1 p)**
 - (c) Avgör för varje $c \in \mathbb{C}$ om cL är unitär. **(1 p)**
3. Låt $V = \mathbb{R}^3$ och låt $f: V \times V \rightarrow V$ vara kryssprodukten, dvs $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \times \mathbf{y}$ för alla $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Eftersom f är bilinjär så ger den upphov till en unik linjär avbildning $L: V \otimes V \rightarrow V$ så att $L(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ för alla $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Bestäm en bas för $\ker L$. **(4 p)**

DEL II – BEGREPP OCH SATSER

4. Låt V vara ett vektorrum och låt U och W vara delrum av V .
- (a) Definiera vad det innebär att V är en *inre direkt summa* av U och W . (1 p)
 - (b) Definiera *kvotrummet* V/W (du behöver inte bevisa att det är ett vektorrum). (1 p)
 - (c) Visa att om $V = U \oplus W$ så finns en isomorfi mellan U och V/W . (2 p)
5. Låt V vara ett komplext inre produktrum och låt $L: V \rightarrow V$ vara en operator.
- (a) Definiera vad det innebär att L är *unitär*. (1 p)
 - (b) Ge ett exempel på ett inre produktrum V och en linjär operator L så att $\|L(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$ utan att L är unitär. (1 p)
 - (c) Visa att alla egenvärden till en unitär operator har absolutbelopp 1. (1 p)
 - (d) Visa att egenrummen till olika egenvärden till en unitär operator är ortogonala. (1 p)

DEL III – AVANCERADE PROBLEM

6. Låt A vara 3×3 -matrisen med element i kroppen $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ som ges av:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Låt S vara delrummet av 3×3 -matriser som ges av $S = \{p(A) : p(x) \in \mathbb{F}_3[x]\}$, dvs alla polynom i A med koefficienter i $\mathbb{F}_3$.

- (a) Bestäm antalet element i S . (2 p)
 - (b) Avgör om S utgör en kropp (med addition och multiplikation av matriser). (2 p)
7. Låt $\ell^2(\mathbb{C})$ vara Hilbertrummet av följder $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots)$ med $\|\mathbf{a}\|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} |a_i|^2 < \infty$ och den inre produkten $\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} \overline{a_i} b_i$. Låt $L: \ell^2(\mathbb{C}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{C})$ vara operatoren som tar en följd $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ på följden $(a_2, a_0, a_1, a_5, a_3, a_4, a_8, a_6, a_7, \dots)$.
- (a) Avgör om L är självadjungerad och/eller unitär. (2 p)
 - (b) Avgör om det finns en ortonormal Hilbert-bas av egenvektorer till L . (2 p)
8. Låt X och Y vara $n \times n$ -matriser så att alla trippelprodukter av dem är noll, dvs $X^3 = X^2Y = XYX = YX^2 = Y^2X = YXY = XY^2 = Y^3 = 0$.
- (a) Beräkna $e^X e^Y$ och e^{X+Y} . (1 p)
 - (b) Visa att det finns en matris Z så att $e^X e^Y = e^Z$ och ge en explicit formel för Z i termer av X och Y . (3 p)
9. Låt V vara ett vektorrum av dimension n , låt $0 < m < n$ och låt $\omega \in \bigwedge^m V$ där $\omega \neq 0$. Vi har en linjär avbildning $L: V \rightarrow \bigwedge^{m+1} V$ där $L(\mathbf{y}) = \omega \wedge \mathbf{y}$. Visa att $\dim(\ker L) = m$ om och endast om $\omega = \mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_m$ för några vektorer $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m \in V$. (4 p)



SF1681 Linjär algebra, fk
Tentamen
11 april 2023

Skrivtid: 8:00–13:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: David Rydh

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. Del I utgörs av de tre första uppgifterna som testar förmågan att lösa grundläggande problem. Del II utgörs av de två följande uppgifterna och testar begreppsförståelse och kunskap om satser och samband. De fyra sista uppgifterna utgör del III och testar förmågan att lösa mer avancerade problem och är avsedda främst för högre betyg. Bonuspoäng av typ I adderas till erhållna poäng på del I och bonuspoäng av typ II adderas till erhållna poäng på del II. Det går dock inte att få mer än 12 respektive 8 poäng på dessa delar. Betygsgränserna vid tentamen kommer preliminärt att ges av följande tabell där kolumnerna anger poänggräns för respektive del/hela skrivningen.

Del	Poäng	Innehåll	Fx	E	D	C	B	A
I	12	Grundläggande problem	-	-	-	-	-	-
II	8	Begrepp och satser	4	4	4	6	6	6
III	16	Avancerade problem	-	-	-	-	-	-
hela	36		11	12	18	22	26	30

Till exempel krävs för betyg C minst 22 poäng totalt varav 6 poäng på del II.

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Låt A vara följande matris med element i kroppen $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bestäm det karakteristiska polynomet $p_A(x)$, minimalpolynomet $q_A(x)$ och Jordans normalform till A . (4 p)

2. Låt $z \in \mathbb{C}$ vara ett komplext tal och betrakta matrisen $A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & z \\ i & 1 + 2iz \end{bmatrix}$. Bestäm alla värden på z för vilka A är Hermitesk och/eller unitär. Beräkna även egenvärdena för A för alla sådana z . (4 p)

3. Ge vektorrummet $\mathbb{C}[x]_{\leq d}$ av komplexa polynom av grad $\leq d$ den inre produkten så att $1, x, x^2, \dots, x^d$ är en ortonormal bas. Låt $L: \mathbb{C}[x]_{\leq 2} \rightarrow \mathbb{C}[x]_{\leq 1}$ vara den linjära avbildningen som ges av $L(p) = p'(x) + ip(0)$. Bestäm en singularvärdesuppdelning för L , dvs ange singularvärden och motsvarande ortonormala baser för $\mathbb{C}[x]_{\leq 2}$ och $\mathbb{C}[x]_{\leq 1}$. (4 p)

DEL II – BEGREPP OCH SATSER

4. (a) Definiera begreppen *stokastisk* vektor och *stokastisk* matris. (1 p)
 (b) Visa att varje stokastisk matris har egenvärdet 1. (1 p)
 (c) Definiera begreppet *reguljär* matris och formulera någon version av Perron–Frobenius sats. (1 p)
 (d) Ge exempel på en reguljär *Hermite*sk stokastisk matris A av storlek 3×3 och bestäm det stationära tillståndet i motsvarande Markov-process. (1 p)
5. (a) Definiera begreppet *minimalpolynom* $q_L(t)$ för en operator $L: V \rightarrow V$. (1 p)
 (b) Låt A vara en $n \times n$ -matris med element i en kropp k och låt S vara delrummet av $n \times n$ -matriser som ges av $S = \{p(A) : p(t) \in k[t]\}$, dvs alla polynom i A med koefficienter i k . Visa att dimensionen av S är lika med graden av minimalpolynomet $q_A(t)$. (2 p)
 (c) Låt $k = \mathbb{R}$ och ge exempel på en matris A sådan att S (under addition och multiplikation av matriser) blir en kropp som är isomorf med $\mathbb{C}$. (1 p)

DEL III – AVANCERADE PROBLEM

6. Betrakta de två Markovprocesserna som ges av matriserna

$$A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Bestäm alla stationära tillstånd till de två Markovprocesserna. (2 p)
 (b) Avgör om de två Markovprocesserna konvergerar oavsett starttillstånd. (2 p)
7. Låt A vara en reell 2×2 -matris med reella egenvärden $a_1 < b_1$. Betrakta rekursionsekvationen
- $$X_n = 2X_{n-1} + 3X_{n-2} \quad \forall n \geq 2, \quad X_0 = I, \quad X_1 = A$$
- där X_n är reella 2×2 -matriser.
- (a) Visa att egenvärdena a_n och b_n för X_n endast beror på a_1 och b_1 och inte på A . (2 p)
 (b) Ge en explicit formel för egenvärdena a_n och b_n då $a_1 = 0$ och $b_1 = 3$. (2 p)
8. Låt A vara en komplex $m \times n$ -matris där alla kolonner har norm 1.
- (a) Visa att $1 \leq \text{rk } A \leq \min\{m, n\}$ och att alla värden i detta intervall är möjliga. (1 p)
 (b) Visa att alla singulärvärden till A ligger i intervallet $[0, \sqrt{n}]$. (2 p)
 (c) För alla m, n , ge exempel där A har ett singulärvärde $\sqrt{n}$. (1 p)
9. Låt $M_{n,n}$ vara vektorrummet av komplexa $n \times n$ -matriser. Låt $L: \bigwedge^2 M_{n,n} \rightarrow M_{n,n}$ vara den linjära avbildningen som uppfyller $L(A \wedge B) = AB - BA$ för $A, B \in M_{n,n}$. Låt $M_{n,n}$ ha den inre produkten som ges av $\langle A|B \rangle = \text{tr}(A^\dagger B)$. Bestäm en ortonormal bas för det ortogonala komplementet $\text{im}(L)^\perp$ av bilden $\text{im}(L)$. (4 p)



SF1681 Linjär algebra, fk
Tentamen
10 januari 2024

Skrivtid: 14:00-19:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: Mats Boij

Bonuspoäng av typ I adderas till erhållna poäng på del I upp till maximalt 12 poäng och bonuspoäng av typ II adderas till erhållna poäng på del II upp till maximalt 8 poäng. Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av följande tabell.

Del	Poäng	Innehåll	Fx	E	D	C	B	A
II	8	Begrepp och satser	4	4	4	6	6	6
Total	36		11	12	18	22	26	30

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa.

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Låt $V = \mathbb{C}[x]$ vara vektorrummet av polynom i en variabel med komplexa koefficienter. Låt för heltal $n \geq 0$ operatoren $L_n: V \rightarrow V$ definieras av

$$L_n(p(x)) = p(x) - \sum_{k=0}^n \frac{p^{(k)}(0)}{k!} x^k,$$

för alla $p(x) \in V$.

- (a) Visa att L_n är linjär för alla $n \geq 0$. (1 p)
 - (b) Bestäm baser för kärnan $\ker(L_n)$ och bildrummet $\operatorname{im}(L_n)$ till L . (2 p)
 - (c) Avgör om $\ker(L_n) \oplus \operatorname{im}(L_n) = V$ som inre direkt summa. (1 p)
2. Låt $V = \mathbb{C}[x]$ vara inre-produktrummet som består av polynom med komplexa koefficienter med inre produkten definierad som

$$\langle p(x) | q(x) \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \overline{p(x)} q(x) dx$$

för $p(x), q(x) \in V$. Låt $V_n = \operatorname{Span}\{1, x, \dots, x^n\}$ för heltal $n \geq 0$.

- (a) Bestäm en ortogonal bas för V_3 . (2 p)
 - (b) Bestäm den ortogonala projektionen av x^k på V_2 för alla $k \geq 0$. (2 p)
3. Låt $\mathbb{F}_5 = \{0, \pm 1, \pm 2\}$ vara kroppen med fem element. Välj en matris A i $M_{2,2}(\mathbb{F}_5)$ sådan att $K = \{aI + bA : a, b \in \mathbb{F}_5\}$ bildar en kropp med 25 element och bestäm alla lösningarna till ekvationen $x^3 = 1$ i K . (4 p)

DEL II – BEGREPP OCH SATSER

4. (a) Definiera vad som menas med en *adjungerad* linjär avbildning. (1 p)
 (b) Visa att $\ker L^\dagger = (\operatorname{im} L)^\perp$ om $L: V \longrightarrow W$ är en linjär avbildning mellan inre produktrum. (2 p)
 (c) Ge ett exempel som visar att det inte alltid gäller att $U \oplus U^\perp = V$ om U är ett delrum av ett inre produktrum V . (1 p)
5. (a) Definiera vad som menas med *egenvektor* och *generaliserad egenvektor* till en linjär operator. (1 p)
 (b) Ge exempel på en linjär operator med en generaliserad egenvektor som inte är en egenvektor. (1 p)
 (c) Formulera satsen om Jordans normalform i fallet då operatoren är nilpotent. (1 p)
 (d) Bestäm vilka värden som är möjliga för rangen av en 5×5 -matris N som uppfyller att $N^2 = 0$. (1 p)

DEL III – AVANCERADE PROBLEM

6. Låt $V = \mathbb{C}^3$ och låt $L: V \longrightarrow V$ ges av $L(x_1, x_2, x_3) = (x_3, x_1, x_2)$.
 (a) Visa att detta ger en linjär avbildning $L \otimes L: V \otimes V \longrightarrow V \otimes V$. (1 p)
 (b) Bestäm egenvärden och egenrum för $L \otimes L$. (3 p)

7. Bestäm en Hermitesk matris A_θ som uppfyller

$$\exp(iA_\theta) = \begin{bmatrix} i \sin \theta & \cos \theta \\ \cos \theta & i \sin \theta \end{bmatrix},$$

där θ är ett reellt tal.

(4 p)

8. Låt V vara ett ändligdimensionellt vektorrum över en kropp k och låt $W \subseteq V \otimes V$ vara det linjära höljet till $S = \{\mathbf{x} \otimes \mathbf{x} : \mathbf{x} \in V\}$. Visa att $(V \otimes V)/W$ är isomorft med $\bigwedge^2 V$. (4 p)

9. För två kommuterande kvadratiske matriser A och B låt

$$V_{A,B} = \operatorname{Span}\{A^i B^j, \quad i, j \geq 0\}.$$

Bestäm det största och det minsta möjliga värdet för $\dim V_{A,B}$ då A och B är kommuterande matriser i $M_{2,2}(\mathbb{C})$. (4 p)



SF1681 Linjär algebra, fk
Tentamen
4 april 2024

Skrivtid: 14:00-19:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: Mats Boij

Bonuspoäng av typ I adderas till erhållna poäng på del I upp till maximalt 12 poäng och bonuspoäng av typ II adderas till erhållna poäng på del II upp till maximalt 8 poäng. Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av följande tabell.

Del	Poäng	Innehåll	Fx	E	D	C	B	A
II	8	Begrepp och satser	4	4	4	6	6	6
Total	36		11	12	18	22	26	30

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. För en inverterbar $n \times n$ -matris A kan vi definiera en avbildning

$$L_A: M_{n,n}(\mathbb{C}) \longrightarrow M_{n,n}(\mathbb{C})$$

genom $L_A(X) = AXA^{-1}$.

- (a) Visa att L_A är linjär. (1 p)
- (b) Visa att 1 är ett egenvärde för L_A för alla inverterbara matriser A . (1 p)
- (c) Bestäm den geometriska multipliciteten för egenvärdet 1 för L_A för matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(2 p)

2. Använd matriser för att bestämma lösningen till den linjära rekursionen

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} - 5x_n, \quad n \geq 0$$

med begynnelsevärden $x_0 = 0, x_1 = 1$.

(4 p)

3. Låt $V = \mathbb{R}^3$ och $W = V \oplus \mathbb{R}$. Den bilinjära avbildningen $\Phi: V \times V \longrightarrow W$ som ges av kryssprodukt och skalärprodukt genom $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x} \times \mathbf{y}, \mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$ ger upphov till en linjär avbildning $L: V \otimes V \longrightarrow W$.

- (a) Bestäm rangen av L . (2 p)
- (b) Bestäm en bas för $\ker L$. (2 p)

Var god vänd!

DEL II – BEGREPP OCH SATSER

4. (a) Formulera *isomorfisatsen* för linjära avbildningar $L: V \longrightarrow W$. (1 p)
 (b) Använd isomorfisatsen för att visa att $V/W \cong k^2$ om $V = k[x]$ och

$$W = \{x^2p(x) : p(x) \in k[x]\}.$$

(1 p)
 (c) Bevisa isomorfisatsen. (2 p)
5. (a) Definiera begreppet *inre produkt* för ett komplext vektorrum. (1 p)
 (b) Ge exempel på ett oändligdimensionellt inre produktrum. (1 p)
 (c) Bevisa Cauchy-Schwartz olikhet för reella inre produktrum. (2 p)

DEL III – AVANCERADE PROBLEM

6. Låt $\mathbb{F}_q$ vara kroppen med q element där q är en primtalspotens. Bestäm antalet matriser i $M_{m,n}(\mathbb{F}_q)$ som har rang 1 för positiva heltal m och n . (4 p)
7. För en $n \times n$ -matris A kan vi bilda en $2n \times 2n$ -matris B genom
- $$B = \begin{bmatrix} A & I \\ -I & A \end{bmatrix}.$$
- Visa att minimalpolynomet $q_B(x)$ är en faktor av $q_A(x+i)q_A(x-i)$ för alla $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, där $q_A(x)$ är minimalpolynomet för A . (4 p)
8. Matrisgruppen $SU_2(\mathbb{C})$ består av all unitära 2×2 -matriser med determinant 1. Bestäm ett delrum $V \subseteq M_{2,2}(\mathbb{C})$ sådant att $\exp(V) = SU_2(\mathbb{C})$. (4 p)
9. Beräkna matriserna

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Visa att Moore-Penrose-inversen av A ges av

$$A^+ = \frac{1}{2}A^\dagger - \frac{1}{6}B^\dagger$$

(4 p)



SF1681 Linjär algebra, fk
Tentamen
13 januari 2025

Skrivtid: 08:00-13:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: Mats Boij

Bonuspoäng av typ I adderas till erhållna poäng på del I upp till maximalt 12 poäng och bonuspoäng av typ II adderas till erhållna poäng på del II upp till maximalt 8 poäng. Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av följande tabell.

Del	Poäng	Innehåll	Fx	E	D	C	B	A
II	8	Begrepp och satser	4	4	4	6	6	6
Total	36		11	12	18	22	26	30

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa.

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Låt $V = \mathbb{C}_{\leq 5}[x]$ vara mängden av polyom av grad högst fem med komplexa koefficienter och låt $L : V \rightarrow V$ ges av $L(p(x)) = p''(x) + 2p(x)$. Bestäm en Jordanbas för L . **(4 p)**

2. Låt $\langle \cdot | \cdot \rangle$ vara den inre produkt på $V = \mathbb{C}^2$ som ges av matrisen

$$G = \begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix}$$

och låt $L : V \rightarrow V$ ges av matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2i \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Bestäm matrisen för den adjungerade operatoren $L^\dagger$ genom att utgå från definitionen. (Det behövs inte någon ortogonal bas.) **(4 p)**

3. Avgör om $K = \{aI + bA : a, b \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}\}$ är en kropp för var och en av matriserna A i mängden

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \subseteq M_2(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}).$$

(4 p)

DEL II – BEGREPP OCH SATSER

4. (a) Visa att det för en linjär avbildning $L : V \longrightarrow W$ gäller att L är injektiv om och endast om $\ker(L) = \{0\}$. **(1 p)**
 (b) Ge ett exempel på en injektiv linjär avbildning $L : V \longrightarrow W$ som inte är surjektiv. **(1 p)**
 (c) Formulera och bevisa dimensionssatsen för linjära avbildningar $L : V \longrightarrow W$. **(2 p)**
5. (a) Ange en bas för $\bigwedge^m V$ om $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ är en bas för V . **(1 p)**
 (b) Ange det basbyte för $\bigwedge^2 \mathbb{C}^3$ som svarar mot basbytet för $\mathbb{C}^3$ mellan baserna $\{e_1, e_2, e_3\}$ och $\{f_1, f_2, f_3\}$ där $f_j = \sum_{i=1}^3 p_{ij} e_i$ för $j = 1, 2, 3$. **(1 p)**
 (c) Antag att $1 + 1 \neq 0$ i kroppen av skalärer. Visa att en multilinjär avbildning är *alternerande* om och endast om den är *skevsymmetrisk*. **(2 p)**

DEL III – AVANCERADE PROBLEM

6. Bestäm alla komplexa matriser som är samtidigt diagonaliserbara med både

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(4 p)

7. Låt $\ell^2(\mathbb{C}) = \{\mathbf{x} = (x_i)_{i=0}^\infty \mid x_i \in \mathbb{C}, i \geq 0 \text{ och } \sum_{i=0}^\infty |x_i|^2 < \infty\}$ med inre produkt som ges av $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=0}^\infty \overline{x_i} y_i$ och låt $L : \ell^2(\mathbb{C}) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{C})$ ges av $L(\mathbf{x})_i = x_{i+1}$, för $i \geq 0$.
 (a) Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till L . **(2 p)**
 (b) Använd del (a) och algebrans fundamentalsats för att bestämma vilka polynom $p(x)$ i $\mathbb{C}[x]$ som uppfyller att $p(L)$ är injektiv. **(2 p)**

8. Låt V och W vara komplexa inre-produktrum och låt $L : V \longrightarrow W$ vara en linjär avbildning. Definiera en seskvilinjär form på $U = V \oplus W$ som

$$\left\langle \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{y}_1 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{y}_2 \end{bmatrix} \right\rangle = \langle \mathbf{x}_1 | \mathbf{x}_2 \rangle + \langle L(\mathbf{x}_1) | \mathbf{y}_2 \rangle + \langle \mathbf{y}_1 | L(\mathbf{x}_2) \rangle + \langle \mathbf{y}_1 | \mathbf{y}_2 \rangle$$

där den första termen beräknas med inre produkten på V och de tre övriga med inre produkten på W . Visa att detta definierar en inre produkt om och endast om $|L(\mathbf{x})| < |\mathbf{x}|$ för alla $\mathbf{x} \neq 0$ i V . **(4 p)**

9. Avgör för vilka par av komplexa matriser A och B av rang 1 som Moore–Penroseinversen uppfyller att $(AB)^+ = B^+ A^+$. Observera att matriserna inte behöver vara kvadratiska, men produkten AB behöver vara definierad. **(4 p)**



SF1681 Linjär algebra, fk
Tentamen
24 april 2025

Skrivtid: 08:00-13:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: Mats Boij

Bonuspoäng av typ I adderas till erhållna poäng på del I upp till maximalt 12 poäng och bonuspoäng av typ II adderas till erhållna poäng på del II upp till maximalt 8 poäng. Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av följande tabell.

Del	Poäng	Innehåll	Fx	E	D	C	B	A
II	8	Begrepp och satser	4	4	4	6	6	6
Total	36		11	12	18	22	26	30

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa.

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. En Hammingkod C av längd 7 ges av nollrummet till matrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

med koefficienter i kroppen $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(a) Bestäm en bas för C . (2 p)

(b) Bestäm ett delrum $W \subseteq \mathbb{F}_2^7$ som uppfyller $W \oplus C = \mathbb{F}_2^7$ som inre direkt summa. (2 p)

2. Låt $V = \mathbb{C}^5$ och

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_4 - \mathbf{e}_5, \mathbf{e}_5\}$$

där $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5\}$ är standardbasen för $\mathbb{C}^5$. Bestäm den duala basen $\mathcal{B}^*$ för V^* . (4 p)

3. Bestäm singularvärden och en ortonormal bas av vänstersingulära vektorer till den reella matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(4 p)

DEL II – BEGREPP OCH SATSER

4. (a) Definiera begreppet *adjungerad operator*. (1 p)
 (b) Ge ett exempel på en operator som saknar adjungerad operator. (1 p)
 (c) Visa att alla egenvärden till en självadjungerad operator på ett komplext inre produkt-
 rum är reella. (1 p)
 (d) Visa att egenvektorer som tillhör olika egenrum till en självadjungerad operator är
 ortogonala mot varandra. (1 p)
5. (a) Definiera begreppet *primkropp*. (1 p)
 (b) Visa att primkroppen i en kropp måste vara isomorf med $\mathbb{Q}$ eller med $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ för
 något primtal p . (1 p)
 (c) Ge ett explicit exempel på en kropp med precis nio element. (2 p)

DEL III – AVANCERADE PROBLEM

6. Avgör vilka karaktäristiska polynom som är möjliga för 4×4 -matriser A med koefficienter
 i $\mathbb{C}$ med minimalpolynom $q_A(x) = x^3 + 2x^2 + x$. Ge exempel på en matris för varje sådant
 polynom. (4 p)
7. Matrisen B är nilpotent och har två Jordanblock av storlek 2×2 och tre Jordanblock
 av storlek 1×1 . Matrisen A uppfyller $A^2 = B$. Avgör vilka möjligheter det finns för
 Jordanformen för A . (4 p)
8. Låt V och W vara ändligtdimensionella komplexa inre produkttrum. Visa att det finns en
 inre produkt på $V \otimes W$ som uppfyller att
 (a) $\langle \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{w}_1 | \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{w}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 \rangle \langle \mathbf{w}_1 | \mathbf{w}_2 \rangle$, för $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ i V och $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ i W , (2 p)
 och att
 (b) $L_1 \otimes L_2$ är en unitär operator på $V \otimes W$ om L_1 är en unitär operator på V och L_2 är
 en unitär operator på W . (2 p)
9. Låt V vara ett komplext vektorrum av dimension n och låt $X \subseteq V \otimes V$ och $Y \subseteq V \otimes V \otimes V$
 vara mängderna som ges av

$$X = \{\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{u} : \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V\}$$

och

$$Y = \{2\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{w} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{w} \otimes \mathbf{u} - \mathbf{w} \otimes \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} : \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V\}.$$

- (a) Bestäm dimensionen av $\text{span } X \subseteq V \otimes V$. (2 p)
 (b) Bestäm dimensionen av $\text{span } Y \subseteq V \otimes V \otimes V$. (2 p)