Häfte med övningsblad

SF1681, HT25

Gustav Nilsson

Senast uppdaterat: 10 januari 2026

Innehåll

SF1681, övning 1

ALA 2.1.11

Explain why the set of all polynomials in $\mathbb{R}_5[t]$ with integer coefficients is or is not a vector space.

ALA 2.1.12

Let X be an arbitrary set. Is the set of all integer-valued functions on X a vector space? What about the set of all real-valued functions on X? Complex-valued functions on X?

ALA 2.1.15

The axioms for a vector space demand the existence of an additive identity, but do not explicitly demand uniqueness. Prove that a vector space cannot have more than one additive identity.

ALA 2.3.10

Let V be the subspace of $M_{2,2}$ consisting of symmetric matrices ($A = A^T$). What is the dimension of V? Find a basis for V.

ALA 2.3.11

If L is an isomorphism from V to W, show that L^{-1} is well defined and is an isomorphism from W to V.

ALA 2.3.12

If V_1 and V_2 are isomorphic, and V_2 and V_3 are isomorphic, show that V_1 and V_3 are isomorphic.

ALA 2.4.9

In $\mathbb{R}_2[t]$, let $\mathbf{b}_1(t) = t^2 + t + 1, \mathbf{b}_2(t) = t^2 + 3t + 2, \mathbf{b}_3(t) = t^2 + 2t + 1$, and $\mathbf{v}(t) = 3t^2 - 2t + 5$. Let $\mathcal{E} = \{1, t, t^2\}$ be the standard basis. Find $P_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$, $P_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$ and $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$.

ALA 2.4.12

In $M_{2,2}$, let $\mathcal{E}$ be the standard basis, and let $\mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$. Let $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$. Find $P_{\mathcal{D}\mathcal{E}}$, $P_{\mathcal{E}\mathcal{D}}$, $[\mathbf{v}]_{\mathcal{D}}$ and $[\mathbf{v}]_{\mathcal{E}}$.

ALA 2.5.3

Show that $M_{3,3}$, the space of 3×3 real matrices, is the direct sum of the subspace of symmetric matrices ($A^T = A$), and the subspace of antisymmetric matrices ($A^T = -A$). What are the dimensions of these subspaces? What is the dimension of $M_{3,3}$?

ALA 2.5.4

Let $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{pmatrix}$. In the decomposition of exercise 2.5.3, what is $P_1 A$? $P_2 A$?

Tentamen 2020-04-16, uppgift 5a

Låt V vara ett ändligdimensionellt vektorrum. Vad innebär det att V är en *inre direkt summa* av två delrum V_1 och V_2?

Egen uppgift

Vi minns från analysen att C^1 betyder *kontinuerligt deriverbar*.

(a) Låt V vara mängden av alla C^1-kurvor i planet:

$$V = \{\gamma \mid \gamma \text{ är en funktion } \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \text{ och } \gamma \text{ är } C^1\}.$$

Summan $\gamma_1 + \gamma_2$ av $\gamma_1, \gamma_2 \in V$ definieras enligt

$$(\gamma_1 + \gamma_2)(t) = \gamma_1(t) + \gamma_2(t),$$

och skalningen $c\gamma$ av $\gamma \in V$ med en skalär $c \in \mathbb{R}$ definieras enligt

$$(c\gamma)(t) = c \cdot \gamma(t).$$

Visa att V tillsammans med dessa operationer utgör ett vektorrum över $\mathbb{R}$.

(b) För varje $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, definiera en delmängd $V_p \subseteq V$ enligt

$$V_p = \{\gamma \in V \mid \gamma(0) = p\}.$$

För vilka p är V_p ett delrum till V?

(c) Är V ändligdimensionellt? Ge exempel på ett tvådimensionellt delrum $W \subseteq V$, tillsammans med en bas för W.

(d) Visa att $V \cong V_{(0,0)} \oplus \mathbb{R}^2$ (som yttre direkt summa).

SF1681, övning 2

ALA 3.2.14

Suppose $A \in M_{m,n}$ and $B \in M_{m',n'}$. Define a linear map $L : \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^{n'} \to \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^{m'}$ by $L\begin{pmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A\mathbf{x}\\ B\mathbf{y}\end{pmatrix}$. Find the matrix of L (relative to the standard bases) in terms of the matrices A and B.

ALA 3.3.8

Draw a figure, similar to Figure 3.4, that summarizes the proof of Theorem 3.3.

ALA 3.1.16, 3.1.17

Representing points in Euclidean $\mathbb{R}^3$ as 3-vectors $(x, y, z)^T$, find 3×3 matrices that represent the following motions, and compare the results with each other:

- Rotation by an angle $\pi/3$ about the x-axis followed by rotation by an angle $\pi/2$ about the z-axis.
- Rotation by an angle $\pi/2$ about the z-axis followed by rotation by an angle $\pi/3$ about the x-axis.

ALA 3.2.7, 3.2.8, 3.2.9

- On $\mathbb{R}_2[t]$, let $(T_1\mathbf{p})(t) = \mathbf{p}(t-1)$. Find the matrix of T_1.
- More generally, for each value of a, let $(T_a\mathbf{p})(t) = \mathbf{p}(t-a)$. Compute the matrix of T_a acting on $\mathbb{R}_2[t]$. What is the matrix of T_a^{-1}?
- Compute the matrix of T_a acting on $\mathbb{R}_4[t]$. Where have you seen this pattern before? Can you guess what the matrix of T_a acting on $\mathbb{R}_n[t]$ looks like?

ALA 3.3.6

On $M_{2,2}$, let $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right\}$. Let $L(A) = (A + A^T)/2$. Find $[L]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$.

ALA 3.4.1, 3.4.2, 3.4.3, 3.4.4

The following exercises are all about $\mathbb{R}[t]$ with the standard basis $\mathcal{E} = \{1, t, t^2, \ldots\}$, which is our simplest example of an infinite dimensional vector space.

- Let $L_1 f(t) = tf(t)$. Find the matrix of L_1.
- Let $L_2 f(t) = (f(t) - f(0))/t$. Find the matrix of L_2.
- Let A_1 be the matrix of L_1, and let A_2 be the matrix of L_2. Compute A_1A_2 and A_2A_1. How do these compare to the matrices of $L_1 \circ L_2$ and $L_2 \circ L_1$?
- Let $L_3 f(t) = \int_0^t f(t')dt'$. Find the matrix of L_3. What is the matrix of d/dt times the matrix of L_3? What is the matrix of L_3 times the matrix of d/dt? How does this jibe with the idea that integration and differentiation are inverse operations?

ALA 3.4.7

An infinite matrix A is said to be Hilbert-Schmidt if the double sum $\sum_{i,j=1}^{\infty} |A_{ij}|^2$ converges. Show that if A is Hilbert-Schmidt, then the traces of A^TA and AA^T are well defined, and $\mathrm{Tr}(A^TA) = \mathrm{Tr}(AA^T)$.

ALA 3.5.5, 3.5.6

- Let L be the operator on $M_{2,2}$ given by $L(A) = A + A^T$. Find bases for $\ker(L)$ and $\mathrm{im}(L)$. What is the rank of L?
- Repeat this for 3×3 matrices. Can you generalize your results to $n \times n$ matrices?

ALA 3.5.10

Let $C^\infty(\mathbb{R})$ denote the space of infinitely differentiable functions on the real line. Let $L = d^2/dt^2 + 3d/dt + 2$ be an operator on $C^\infty(\mathbb{R})$. Find a basis for $\ker(L)$.

Tentamen 2018-04-05, uppgift 2

Låt $V = P_5$ vara polynom i x av grad högst 5 med komplexa koefficienter. Definiera produkten av polynom i V som den vanliga produkten, men där vi bortser från termer som har grad 6 eller högre i produkten. Operatorn $L : V \longrightarrow V$ definieras av multiplikation med polynomet $x^5 - x^4 + x^3$.

(a) Bestäm en bas för kärnan $\ker(L)$.

(b) Bestäm en bas för bildrummet $\mathrm{im}(L)$.

Tentamen 2019-01-09, uppgift 1

Låt $V = \mathbb{C}[x]$ vara vektorrummet av polynom med komplexa koefficienter. Definiera $L : V \longrightarrow V$ genom $L(p(x)) = \int_{-x}^{x} p(t)\, dt$ för alla $p(x) \in V$. Visa att L är linjär och bestäm en bas för kärnan $\ker(L)$ och en bas för bildrummet $\mathrm{im}(L)$.

Utdrag från ALA, kapitel 3.2

$$\begin{tikzcd}
{[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}} \arrow[r, "{[L]_{\mathcal{B}}}"] \arrow[d, shift right=2, "P_{\mathcal{DB}}"'] & {[\mathbf{Lv}]_{\mathcal{B}}} \arrow[d, shift right=2, "P_{\mathcal{DB}}"'] \\
{[\mathbf{v}]_{\mathcal{D}}} \arrow[r, "{[L]_{\mathcal{D}}}"] \arrow[u, shift right=2, "P_{\mathcal{BD}}"'] & {[L\mathbf{v}]_{\mathcal{D}}} \arrow[u, shift right=2, "P_{\mathcal{BD}}"']
\end{tikzcd}$$

Figure 3.4. A change of basis

Utdrag från ALA, kapitel 3.3

Theorem 3.3. *Let V be a vector space with bases $\mathcal{B}$ and $\mathcal{D}$, let W be a vector space with bases $\mathcal{B}'$ and $\mathcal{D}'$, and let L be an linear transformation from V to W. Let $[L]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ be the matrix of L relative to the $\mathcal{B}$ and $\mathcal{B}'$ bases. The matrix of L relative to the $\mathcal{D}$ and $\mathcal{D}'$ bases is*

$$[L]_{\mathcal{D}'\mathcal{D}} = P_{\mathcal{D}'\mathcal{B}'}[L]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}P_{\mathcal{B}\mathcal{D}}. \tag{3.26}$$

Proof. The argument is almost identical to the proof of Theorem 3.2. Let $\mathbf{v}$ be an arbitrary vector in V. Then

$$\begin{aligned}
P_{\mathcal{B}\mathcal{D}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{D}} &= [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}, \\
[L]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}P_{\mathcal{B}\mathcal{D}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{D}} &= [L]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = [L\mathbf{v}]_{\mathcal{B}'}, \\
P_{\mathcal{D}'\mathcal{B}'}[L]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}P_{\mathcal{B}\mathcal{D}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{D}} &= P_{\mathcal{D}'\mathcal{B}'}[L\mathbf{v}]_{\mathcal{B}'} = [L\mathbf{v}]_{\mathcal{D}'}.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Since multiplication by $P_{\mathcal{D}'\mathcal{B}'}[L]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}P_{\mathcal{B}\mathcal{D}}$ converts $[\mathbf{v}]_{\mathcal{D}}$ to $[L\mathbf{v}]_{\mathcal{D}'}$ for every vector $\mathbf{v}$, $P_{\mathcal{D}'\mathcal{B}'}[L]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}P_{\mathcal{B}\mathcal{D}}$ must equal $[L]_{\mathcal{D}'\mathcal{D}}$. ∎

SF1681, övning 3

ALA 2.5.5

Show that, for general V and W, the equivalence relation $\sim$ of (2.28) satisfies the linearity properties: 1) If $\mathbf{x}_1 \sim \mathbf{y}_1$ and $\mathbf{x}_2 \sim \mathbf{y}_2$, then $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \sim \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$, and 2) If $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$, then $c\mathbf{x} \sim c\mathbf{y}$.

ALA 2.5.6

Show that, for general V and W, the addition operation of (2.30) are well defined. That is, show that, if $\mathbf{x}$ and $\mathbf{x}'$ are both in $[\mathbf{x}]$, and if $\mathbf{y}$ and $\mathbf{y}'$ are both in $[\mathbf{y}]$, then $[\mathbf{x} + \mathbf{y}] = [\mathbf{x}' + \mathbf{y}']$.

ALA 2.5.7

Let $V = \mathbb{R}[t]$, and let W be the subspace consisting of all polynomials divisible by $(t-1)^2$. Show that W is a subspace of V and that V/W is 2-dimensional, and exhibit a basis for V/W. (A point in V/W is the set of all polynomials that have a specified value and derivative at $t = 1$.)

ALA 2.5.8

Let $V = \mathbb{R}[t]$, let $\mathbf{p}$ be a fixed polynomial of degree n, and let W be all polynomials divisible by $\mathbf{p}$. Show that V/W is an n-dimensional vector space and exhibit a basis for V/W.

ALA 4.1.4

On $C^\infty(\mathbb{R})$, consider the operator $L = \frac{d^2}{dt^2}$. Find a basis for E_0.

ALA 4.1.5

On $C^\infty(\mathbb{R})$, let $L = \frac{d^2}{dt^2} + \frac{d}{dt}$. Find a basis for E_0 and a basis for E_2.

ALA 4.1.6

On $M_{2,2}$, let $L(A) = A^T$. Find a basis for E_1 and a basis for E_{-1}.

ALA 4.1.7

On $\mathbb{R}_2[t]$, let $L(\mathbf{p})(t) = \mathbf{p}(t) + \mathbf{p}(-t)$. Find a basis for E_2.

ALA 4.2.6

Suppose we have a basis $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ of eigenvectors of A, with corresponding eigenvalues λ_i. Show that the product $(A - \lambda_1 I) \cdots (A - \lambda_n I)$ equals the zero matrix.

ALA 4.3.12

Diagonalize the operator $L : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_2[t]$ given by $L(\mathbf{p})(t) = -\mathbf{p}(0) + 3\mathbf{p}(1)t + \mathbf{p}(2)t^2$.

ALA 4.3.14

Prove that, if a matrix A is diagonalizable, then $p_A(A) = 0$. [This result, known as the Cayley-Hamilton Theorem, is true even if A is not diagonalizable, but that case is more difficult to prove.]

ALA 4.4.1

Check explicitly that the matrix $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ can be written as

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+bi & 0 \\ 0 & a-bi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}^{-1}.$$

ALA 4.4.3

On $\mathbb{R}^3$, let $L\mathbf{x} = A\mathbf{x}$, where

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diagonalize L. Describe geometrically what L does to a vector in $\mathbb{R}^3$.

ALA 4.4.8

Is there a real matrix conjugate to $\begin{pmatrix} 3+2i & 0 \\ 0 & 3+2i \end{pmatrix}$?

ALA 4.4.9

Is there a real matrix conjugate to $\begin{pmatrix} 3+2i & 0 \\ 0 & 3-2i \end{pmatrix}$?

ALA 4.6.1

Derive a formula for the eigenvectors of a lower triangular matrix of the form $M' = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ B' & C' \end{pmatrix}$ corresponding to eigenvalues of A'.

ALA 4.6.11

Find the eigenvalues of the matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. You do not need to find the eigenvectors.

Tentamen 2019-04-17, uppgift 4

(a) Definiera begreppet inre direkt summa av delrum.

(b) Visa att om W är ett delrum av V så finns ett delrum U så att $U \oplus W = V$ som en inre direkt summa i fallet då $\dim V < \infty$.

(c) Visa att om $V = U \oplus W$ som inre direkt summa av delrum så är $V/U \cong W$.

Tentamen 2020-01-09, uppgift 1

Låt $V = P_{10}$ vara vektorrummet av polynom av grad högst 10 med komplexa koefficienter (kallas $\mathbb{C}_{10}[x]$ i kursboken). Definiera $L : V \longrightarrow V$ genom $L(p(x)) = xp'(x)+p(1)$. Bestäm alla egenvärden och egenrum till L. Är L diagonaliserbar?

Tentamen 2019-04-17, uppgift 7

Låt $V = \mathbb{C}[x]$ och definiera $L : V \longrightarrow V$ genom

$$L(p(x)) = p(x) + p(\xi x) + p(\xi^2 x), \quad \forall p(x) \in V,$$

där $\xi = e^{2i\pi/3}$. Visa att L har två egenvärden λ_1 och λ_2 så att $V = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2}$.

Egen uppgift om kvotrum

Betrakta vektorrummet[1] $V_{(0,0)}$ som består av alla C^1-kurvor $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ som uppfyller $\gamma(0) = (0,0)$, och definiera en delmängd $V^1_{(0,0)} \subseteq V_{(0,0)}$ genom

$$V^1_{(0,0)} := \{\gamma \in V_{(0,0)} \mid \gamma'(0) = (0,0)\}.$$

(a) Visa att $V^1_{(0,0)}$ är ett delrum till $V_{(0,0)}$.

(b) Visa att kvotrummet $V_{(0,0)}/V^1_{(0,0)}$ är isomorft med $\mathbb{R}^2$.

(c) Fixera en C^1-funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, och definiera en avbildning $L_f : V_{(0,0)} \to \mathbb{R}$ genom

$$L_f(\gamma) := (f \circ \gamma)'(0) \qquad \left(\; = \frac{d}{dt}(f(\gamma(t)))\Big|_{t=0} \; \right).$$

Visa att L_f är linjär och att $V^1_{(0,0)} \subseteq \ker(L_f)$

(d) Förklara varför detta betyder att L_f ger upphov till en linjär avbildning $\tilde{L}_f : V_{(0,0)}/V^1_{(0,0)} \to \mathbb{R}$.

Egen uppgift om diagonalisering

Låt V vara ett n-dimensionellt vektorrum över $\mathbb{C}$, för något heltal $n > 0$. Antag att $J : V \to V$ är en linjär operator som uppfyller $J^2 = -I$, där $I : V \to V$ är identitetsavbildningen. Med andra ord, antag att $J(J(v)) = -v$ för alla $v \in V$.

(a) Visa att $\mathrm{im}(-iI + J) \subseteq \ker(iI + J)$.

(b) Visa att J är diagonaliserbar.

Eftersom reella tal också räknas som komplexa tal kan V också betraktas som ett vektorrum över $\mathbb{R}$. För tydlighetens skull kallar vi detta[2] reella vektorrum för $V_\mathbb{R}$, och vi kallar J för $J_\mathbb{R}$ när den betraktas som en linjär operator $V_\mathbb{R} \to V_\mathbb{R}$ på ett reellt vektorrum.

(c) Är $J_\mathbb{R}$ diagonaliserbar?

(d) Antag nu att det finns ett (reellt) n-dimensionellt delrum $W \subseteq V_\mathbb{R}$ sådant att $J_\mathbb{R}(W) \subseteq W$, och sådant att W, betraktat som en delmängd[3] av det komplexa vektorrummet V, spänner upp V.

Bestäm under detta antagande det karakteristiska polynomet för J.

[1] Vektorrumsoperationerna är punktvis addition och skalning, som beskrevs på förra övningsbladet.
[2] Notera att $V_\mathbb{R}$ har samma underliggande mängd som V, men skalärmultiplikationen är begränsad till reella skalärer.
[3] Notera att W inte behöver vara ett (komplext) delrum till V. Faktum är att antagandena vi gör medför att det inte kan vara det.

Utdrag från ALA, kapitel 2.5

Quotient spaces. Now let V be a vector space and let W be a subspace of V. We will construct a vector space called the *quotient of V by W* and denoted V/W. This construction is not as intuitive as direct sums, so it is best to keep a simple example in mind. The example is $V = \mathbb{R}^2$, with W being all multiples of $(1,0)^T$, that is, the x_1 axis.

We define an equivalence relation $\sim$ on V:

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \text{ if } \mathbf{x} - \mathbf{y} \in W. \tag{2.28}$$

You should check that $\sim$ satisfies all the requirements of an equivalence relation, namely: 1) $\mathbf{x} \sim \mathbf{x}$ (reflexivity), 2) if $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$, then $\mathbf{y} \sim \mathbf{x}$ (symmetry), and 3) if $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ and $\mathbf{y} \sim \mathbf{z}$, then $\mathbf{x} \sim \mathbf{z}$ (transitivity). In our example, two elements of V are equivalent if they differ by a multiple of $(1,0)^T$. In other words, $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ if and only if $x_2 = y_2$.

We denote by $[\mathbf{x}]$ the equivalence class of $\mathbf{x}$. That is,

$$[\mathbf{x}] = \{\mathbf{y} \in V | \mathbf{y} - \mathbf{x} \in W\}. \tag{2.29}$$

(Do not confuse this with the representation of a vector in a basis, which we denote $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$. These very different concepts are both traditionally denoted by square brackets.) In our example, $[(0,2)^T]$ is the set of all vectors with second component 2. $[(5,2)^T]$ is the same set, since $(1,2)^T \sim (5,2)^T$. However, $[(1,3)^T]$ is a different set.

Definition. *The* quotient space V/W *is the set of all equivalence classes of $\sim$, equipped with the following operations of addition and scalar multiplication:*

$$[\mathbf{x}] + [\mathbf{y}] = [\mathbf{x} + \mathbf{y}]; \qquad c[\mathbf{x}] = [c\mathbf{x}]. \tag{2.30}$$

SF1681, övning 4

ALA 4.7.5, 4.7.6

Check if each pair of matrices commute. If so, simultaneously diagonalize them.

- $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2-e & 2-2e \\ e-1 & 2e-1 \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

ALA 4.7.7

Prove the following: Three diagonalizable operators on a finite-dimensional vector space are simultaneously diagonalizable if and only if each pair of operators commutes.

ALA 4.8.1

Let $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Compute e^{At} from the power series. (You may need to remember the Taylor series for sine and cosine). Check that it satisfies the differential equation.

ALA 4.8.4

Let $\mathcal{B}$ be a basis for a vector space and let L be an operator on that space. Let $A = [L]_{\mathcal{B}}$. Show that $[e^L]_{\mathcal{B}} = e^A$.

ALA 4.8.6

Compute the exponential of $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, using the fact that if $A = PDP^{-1}$ for a diagonal matrix D with diagonal entries $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, then

$$e^A = Pe^DP^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & \ldots & 0 & \\ 0 & e^{\lambda_2} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

ALA 4.8.11

Show that, if A is diagonalizable, then $\sin^2(A) + \cos^2(A) = I$. Does this identity also hold for non-diagonalizable matrices?

Modelltentamen, uppgift 3

Låt A vara 3×3-matrisen med element i $\mathbb{Z}_2$ (heltalen modulo 2) som ges av

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bestäm minimalpolynomet till A och använd detta för att avgöra om A är diagonaliserbar.

Tentamen 2018-04-05, uppgift 4

Betrakta operatorer L på ett ändligdimensionellt vektorrum V.

(a) Definiera begreppen minimalpolynom och karaktäristiskt polynom.

(b) Ge ett par belysande exempel på klasser av operatorer där minimalpolynomet inte är lika med det karaktäristiska polynomet.

(c) Visa att alla egenvärden till en operator måste vara nollställen både till minimalpolynomet och till det karaktäristiska polynomet.

(d) Vad säger Cayley–Hamiltons sats och vad kan man dra för slutsats från den om relationen mellan minimalpolynomet och det karaktäristiska polynomet?

Egen uppgift

Vi minns från grundkursen i linjär algebra att en kvadratisk matris A är *ortogonal* om $A^T A = I$, och att A är *antisymmetrisk* om $A^T = -A$.

(a) Antag att A är en kvadratisk matris sådan att e^{tA} är ortogonal för alla $t \in \mathbb{R}$. Visa att A är antisymmetrisk.

(b) Visa den omvända implikationen: om A är en antisymmetrisk matris så är e^{tA} ortogonal för alla $t \in \mathbb{R}$.

Mängden av alla antisymmetriska $n \times n$-matriser betecknas $\mathfrak{o}(n)$, och mängden av alla ortogonala $n \times n$-matriser betecknas $\mathrm{O}(n)$. Det går att visa att ortgonala matriser måste ha determinant ± 1. Delmängden av de ortogonala matriser som har determinant 1 betecknas $\mathrm{SO}(n)$.

Från deluppgift (b) vet vi att restriktionen av exp (där $\exp(A) = e^A$) till mängden $\mathfrak{o}(n)$ kan betraktas som en avbildning $\mathfrak{o}(n) \to \mathrm{O}(n)$.

(c) Visa att $\det(\exp(A)) = 1$ för alla $A \in \mathfrak{o}(n)$, så att restriktionen $\exp|_{\mathfrak{o}(n)}$ kan betraktas som en avbildning $\mathfrak{o}(n) \to \mathrm{SO}(n)$.

(d) Är $\exp|_{\mathfrak{o}(2)} : \mathfrak{o}(2) \to \mathrm{SO}(2)$ injektiv och/eller surjektiv?

SF1681, övning 5

ALA 6.1.7

On $\mathbb{R}^2$, is the bilinear form $\langle (x_1, x_2)^T \mid (y_1, y_2)^T \rangle = x_1 y_2 + x_2 y_1$ an inner product? Why or why not?

ALA 6.1.8

In an inner product space V, consider a triangle with vertices A, B, and C. Let a, b, and c be the lengths of the sides opposite A, B, and C, respectively, and let θ be the angle at C. Prove the law of cosines: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\theta)$.

ALA 6.1.9

Let $\mathbf{x}$ and $\mathbf{y}$ be vectors in Euclidean $\mathbb{R}^2$, and consider the parallelogram with vertices at the origin, $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}+\mathbf{y}$, and $\mathbf{y}$. Show that the area of this parallelogram is $\pm \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle_A$, the sign depending on whether $\mathbf{x}$ is clockwise or counterclockwise of $\mathbf{y}$. Here, $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle_A = x_1 y_2 - x_2 y_1$.

ALA 6.2.3

In $\mathbb{C}^2$ with the standard inner product, compute $|\mathbf{x}|$ and $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \rangle$, where $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$.

ALA 6.4.1

In Euclidean $\mathbb{R}^3$, the vectors $\mathbf{b}_1 = (1,1,1)^T$, $\mathbf{b}_2 = (-2,1,1)^T$, and $\mathbf{b}_3 = (0,1,-1)^T$ are orthogonal. Use the inner product to write $\mathbf{x} = (-3,7,2)^T$ as a linear combination of $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$, and $\mathbf{b}_3$.

ALA 6.4.6, 6.4.7

Let $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ be a basis for a vector space V. Show that $\mathcal{B}$ is orthonormal if and only if the dual basis is $\{\langle \mathbf{b}_k|\}$.

ALA 6.4.8

Let $\mathcal{B}$ be an orthogonal (but not necessarily orthonormal) basis. What is the dual basis to $\mathcal{B}$?

ALA 6.5.3

In $\mathbb{C}^2$ with the standard inner product, find the matrices of $P_{\mathbf{v}_1}$ and $P_{\mathbf{v}_2}$, where $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ and $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$. What is $P_{\mathbf{v}_1} + P_{\mathbf{v}_2}$? Explain.

ALA 6.5.10

In the space of smooth function on $[0,\pi]$ with inner product $\langle f \mid g \rangle = \int_0^\pi f(t)g(t)\,dt$, find an orthonormal basis for the span of 1, $\sin(t)$, and $\sin^2(t)$.

ALA 6.5.11

Let $V = \mathbb{R}[t]$, with the inner product $\langle f \mid g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)\,dt$. Apply the Gram-Schmidt process to the vectors $\mathbf{x}_1(t) = 1$, $\mathbf{x}_2(t) = t$, $\mathbf{x}_3(t) = t^2$, and $\mathbf{x}_4(t) = t^3$. The vector $\mathbf{y}_i(t)$ is called the i^{th} Legendre polynomial.

ALA 6.5.12

Let $V = \mathbb{R}[t]$, with the inner product given by $\langle f \mid g \rangle = (\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^\infty f(t)g(t)e^{-t^2}\,dt$. Apply the Gram-Schmidt process to the vectors $\mathbf{x}_1(t) = 1$, $\mathbf{x}_2(t) = t$, $\mathbf{x}_3(t) = t^2$, and $\mathbf{x}_4(t) = t^3$. The vector $\mathbf{y}_i(t)$ is called the i^{th} Hermite polynomial.

ALA 6.6.3

On $\mathbb{R}_3[t]$ with inner product $\langle \mathbf{f} \mid \mathbf{g} \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$ let W be the subspace spanned by 1 and t. Compute $P_W(t^2)$.

ALA 6.6.4

Let $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$ be a basis for a subspace W of an-dimensional inner product space V. Let $\mathbf{x}_{m+1}, \ldots, \mathbf{x}_n$ be chosen so that $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ is a basis for V. Apply Gram-Schmidt to $\{\mathbf{x}_i\}$ to get an orthogonal basis $\{\mathbf{y}_i\}$. Show that $\{\mathbf{y}_{m+1}, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ is an orthogonal basis for $W^\perp$.

ALA 6.7.1

Show that, if $A^T A\mathbf{x} = 0$, then $A\mathbf{x} = 0$. [Hint: Consider the inner product $\langle A\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} \rangle$.] Use this to show that, if the columns of A are linearly independent, then $A^T A$ is invertible.

Tentamen 2019-04-17, uppgift 5

(a) Ge definitionen av en inre produkt på ett komplext vektorrum.

(b) Vad är det som gör att $C^0([0,1],\mathbb{C})$, rummet av kontinuerliga komplexvärda funktioner på enhetsintervallvallet, med den inre produkten som ges av $\langle f \mid g \rangle = \int_0^1 \overline{f(t)}g(t)\,dt$ inte är ett Hilbertrum?

(c) Bevisa att en inre produkt på ett komplext vektorrum är unikt bestämd av normen.

Egen uppgift

Låt V beteckna mängden av alla C^∞-funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som är[1] 1-periodiska. Det går att visa att V är ett reellt vektorrum. För $f, g \in V$ definierar vi

$$\langle f \mid g \rangle_V = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx,$$

vilket ger en inre produkt $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_V$ på V. Vi definierar också en linjär operator $D = \frac{d}{dx} : V \to V$.

(a) Beskriv $\ker(D)$ och $\ker(D)^\perp$.

(b) Visa att $\langle Df \mid g \rangle_V = -\langle f \mid Dg \rangle_V$ för alla $f, g \in V$.

(c) Beskriv $\operatorname{im}(D)$ och $\operatorname{im}(D)^\perp$, och bestäm dimensionen hos kvotrummet $W = V/\operatorname{im}(D)$.

(d) För godtyckliga element $[f], [g] \in W$ väljer vi representanter $f_1 \in [f] \cap \ker(D)$ och $g_1 \in [g] \cap \ker(D)$, och låter

$$\langle [f] \mid [g] \rangle_W = \langle f_1 \mid g_1 \rangle_V .$$

Visa att detta är[2] väldefinierat, och att $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_W$ är en inre produkt på W.

[1] Med andra ord ska $f(x+1) = f(x)$ gälla för alla x.

[2] Med andra ord, visa att sådana representanter kan väljas, och att uttrycket i högerledet i definitionen av $\langle [f] \mid [g] \rangle_W$ är entydigt definierat.

SF1681, övning 6

ALA 5.1.3, ALA 5.1.4, ALA 5.1.5

In the following cases, find $\mathbf{x}(n)$ for all n, where $\mathbf{x}(n)$ is defined by the recurrence relation $\mathbf{x}(n+1) = A\mathbf{x}(n)$ together with the initial value $\mathbf{x}(0)$. Also, describe qualitatively what is happening.

- $A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.2 \\ 0.3 \end{pmatrix}$

ALA 5.1.6

Let $A = \begin{pmatrix} 0.2 & 1.1 & 2.3 \\ 1.1 & 0.5 & -1.7 \\ 2.3 & -1.7 & 0.7 \end{pmatrix}$ and let $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Find $\mathbf{x}(n)$ for all n. You may wish to use technology to diagonalize A and to invert P.

ALA 5.1.7

Let

$$A = \begin{pmatrix} 0.5738 & 0.1775 & -0.2218 & -0.1584 & 0.4994 \\ 0.3051 & 0.0387 & -0.0336 & -0.3644 & 0.0491 \\ -0.3462 & -0.2716 & -0.0465 & 0.4543 & 0.1453 \\ -0.0079 & -0.8545 & 0.0851 & 0.8213 & 0.0217 \\ 0.9806 & 0.2944 & 0.7080 & 0.2595 & 0.7346 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Using technology, compute $\mathbf{x}(n)$ for several values of n. Diagonalize A (using technology) and describe the asymptotic behavior of $\mathbf{x}(n)$ for n large. How does $x_1(100)$ compare to $x_1(99)$? What about x_2? How do the proportions $x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5$ depend on n?

ALA 5.1.8

Griffins and Dragons live in the Enchanted Forest. The number of dragons D and griffins G in the forest each year is determined by the populations the previous year, according to the formulas:

$$D(n) = 1.5D(n-1) + G(n-1),$$
$$G(n) = D(n-1).$$

If in year 0 there are 25 dragons and no griffins, what will the populations be in year k? (Don't worry about your answers being fractional. Mythical animals don't have to come in whole units.) In the long run, will the populations grow, shrink, or approach a nonzero equilibrium value? After a long time, approximately what will the ratio of dragons to griffins be?

ALA 5.4.3

Suppose that $x(0) = 0, x(1) = 1$, and for $n \geq 2$, $x(n) = x(n-1) + 2x(n-2)$. Convert this to a 2×2 first-order matrix problem, and solve to get a closed-form expression for $x(n)$.

ALA 5.4.4

Suppose that $x(0) = 0, x(1) = 1$, and for $n \geq 2$, $x(n) = x(n-1) + x(n-2)$. Convert this to a 2×2 first-order matrix problem, and solve to get a closed-form expression for $x(n)$.

ALA 5.5.7

Let $\mathbf{x}(n) = A\mathbf{x}(n-1)$, with $A = \begin{pmatrix} 0 & k \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, where k is an unspecified real constant. For what values of k is the system stable? For what values is there one unstable mode? For what values are there two unstable modes?

ALA 5.5.8

Let $\mathbf{x}(n) = A\mathbf{x}(n-1)$, with A a real 2×2 matrix whose determinant equals one. Show that the system is neutrally stable if $-2 < \operatorname{Tr}(A) < 2$, but is unstable if $|\operatorname{Tr}(A)| > 2$.

Tentamen 2019-01-09, uppgift 6

En följd av 2×2-matriser $\{X_i\}_{i \geq 0}$ definieras rekursivt av

$$X_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{och} \quad X_{n+1} = 3X_n - 2X_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Bestäm en explicit formel för X_n.

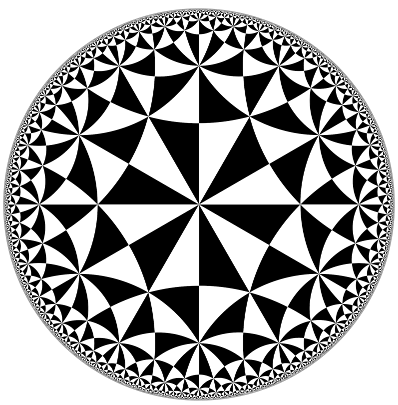
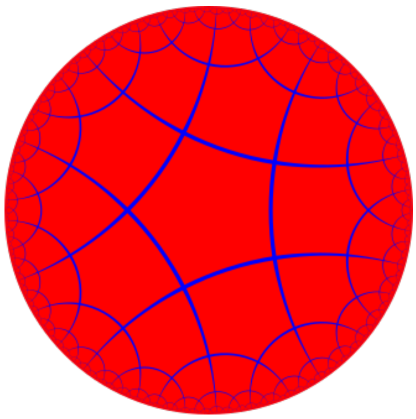
Tentamen 2020-01-09, uppgift 7

Låt $x_0, x_1, x_2, \ldots$ vara en följd av heltal som uppfyller att $x_0 = -5$ och $x_1 = 2$ samt att $x_n = -2x_{n-1} - x_{n-2}$ för $n \geq 2$. Bestäm x_{2020}.

Egen uppgift

Bakgrund

Inom differentialgeometrin studeras krökta rum med andra geometrier än den euklidiska geometrin vi är vana vid, och ett exempel på ett sådant rum är det *hyperboliska planet* H, som har så kallad negativ krökning. Som mängd kan vi betrakta H som den öppna enhetsdisken i komplexa talplanet (denna representation kallas *Poincarés diskmodell*) Avståndsmåttet i H är inte det vanliga euklidiska avståndet, utan definieras på ett annat sätt. De exakta definitionerna är överkurs, men det finns i alla fall begrepp såsom avstånd, vinklar och area precis som i euklidisk geometri. Det finns även ett begrepp som är analogt med räta linjer, nämligen så kallade *geodeter*, som är de kortaste (enligt hyperboliska mått) kurvorna mellan punkter. Det är i allmänhet svårt att få visuell intuition för det hyperboliska planet, eftersom det inte går att bädda in det som en yta i vår tredimensionella värld på ett sätt som bevarar avstånd. Den första bilden nedan visar ett konstverk av M. C. Escher som gestaltar hyperbolisk geometri, där varje vit kurva är en geodet, och den andra bilden visar en täckning av hela hyperboliska planet med ”trianglar”; här är alla kanter på trianglarna ”räta” (är geodetsegment). På tredje bilden illustreras att det hyperboliska planet kan täckas med ”pentagoner” (femhörningar vars kanter är geodetsegment), där alla vinklarna i alla ”pentagoner” är räta vinklar. I bilderna illustreras också att inbäddningen av H som enhetscirkelskivan i det euklidiska planet är en *konform* inbäddning: vinklar bevaras (men inte avstånd).

I allmänhet beskrivs geodeter av ett system av andra ordningens ickelinjära ordinära differentialekvationer, men för så kallade *symmetriska riemannska rum* går det att reducera till ett system av första ordningens linjära sådana. Detta system av differentialekvationer kan lösas med materialet från denna kurs.[1]

[1]Däremot är själva reduktionen till ett sånt system extremt överkurs, och kräver en hel del förkunskaper inom riemannsk geometri och teorin för Liegrupper. Argumentet för att reduktionen är korrekt finns att läsa precis efter uppgiften.

Uppgift

I den här uppgiften ska vi studera rörelse längs geodeter i det hyperboliska planet $H := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \subseteq \mathbb{C}$, men vi behöver först några verktyg. För varje komplex 2×2-matris $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ definierar vi en komplexvärd funktion f_A enligt $f_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, där värdemängden är alla komplexa tal z för vilket uttrycket är definierat (alltså inte ger division med noll). Notera att $f_A(z)$ kan uttryckas som $f_A(z) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}\right) \Big/ \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, där vi har matrismultiplikation.

Låt M_2 vara vektorrummet av alla reella 2×2-matriser, låt $\mathfrak{g}$ vara delrummet av de matriser vars spår är 0, och låt $\mathfrak{h} \subseteq M_2$ vara delrummet av symmetriska matriser.

Om $\gamma : \mathbb{R} \to H$ är en parametrisering av en geodet[2] kan man visa att det finns en C^∞-funktion $A : \mathbb{R} \to M_2$ som uppfyller följande tre villkor:

- $\gamma(t) = f_{PA(t)P^{-1}}(\gamma(0))$ för alla $t \in \mathbb{R}$, där $P = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$,
- $A(s+t) = A(s)A(t)$ för alla $s, t \in \mathbb{R}$,
- Matrisen $X := A'(0)$ ligger i delrummet $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{h} \subseteq M_2$.

Eftersom vi inte formellt har definierat vad en geodet är skulle villkoren ovan kunna ses som en definition av vad en (parametrisering av en) geodet är.

(a) Härled en matrisdifferentialekvation för funktionen A från det andra villkoret ovan. Differentialekvationen får innehålla A, A' och X. Från samma villkor, bestäm också vad initialvärdet $A(0)$ måste vara.

(b) Låt $p := \gamma(0)$ vara geodetens startpunkt och låt $v := \gamma'(0)$ vara dess starthastighet. Bestäm ett uttryck för $\gamma(t)$ i fallet då $p = 0$ och $v = 1$.

(c) Bestäm ett uttryck för $\gamma(t)$ i fallet då $p = 1/2$ och $v = i$.

(d) För $v \neq 0$, visa att $\gamma(t)$ alltid går mot någon punkt på randcirkeln $\{z : |z| = 1\} \subseteq \mathbb{C}$ då $t \to \infty$, och bestäm ett uttryck för denna punkt i termer av elementen i matrisen X. Visa dessutom att γ möter randcirkeln i en rät vinkel, det vill säga att $\lim_{t\to\infty} \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} = \lim_{t\to\infty} \gamma(t)$.

Reduktion av de geodetiska ekvationerna (väldigt överkurs)

Låt $G := \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ verka på $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ via Möbiustransformationer. Det är välkänt att $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ verkar transitivt på H, och att stabilisatorn för en punkt p är en delgrupp som är konjugerad till $K = \mathrm{SO}(2) \subseteq \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Detta ger en (kanonisk) diffeomorfi mellan H och vänstra sidoklassrummet G/K, där punkten p identifieras med sidoklassen $K \in G/K$. Vi låter $\pi : G \to G/K \cong H$ beteckna kvotavbildningen.

Om vi utrustar H med Poincarémetriken med konstant Gaußkrökning -1,

$$g = \frac{dx \otimes dx + dy \otimes dy}{y^2},$$

där $x = \mathrm{Re}(z)$ och $y = \mathrm{Im}(z)$, är det välkänt att H är ett symmetriskt rum. Speciellt existerar en involution $\sigma : H \to H$ som fixerar $p \in H$, vars framknuffning i punkten p är $d\sigma_p = -\mathrm{id} : T_pH \to T_pH$. Konjugering med $\sigma \in G$ definierar en automorfi $\tilde{\sigma} : G \to G$, och eftersom isometrier bestäms entydigt av framknuffningens verkan på ett tangentrum är $\tilde{\sigma}$ också en involution. Detta ger i sin tur upphov till en Liealgebraautomorfi $\theta := \tilde{\sigma}_*$ på Liealgebran $\mathfrak{g}$ till G, och på grund av funktorialitet är även θ involutiv.

Eftersom θ är en involution är den diagonaliserbar med egenvärden ± 1, och vi kan skriva $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$, där $\mathfrak{k}$ och $\mathfrak{m}$ är egenrummen som svarar mot egenvärdet 1 respektive -1. Om vi betraktar G som ett principalt K-knippe över H går det att visa att $\mathfrak{k}$ spänner upp den vertikala distributionen, vilket ger en kanonisk identifikation mellan $\mathfrak{m}$ och $T_{\pi(g)}M$. Genom att lyfta metriken från H får vi en metrik på den horisontella distributionen (som spänns upp av $\mathfrak{m}$), och den direkta summan av denna metrik och minus Killingformen på $\mathfrak{k}$ definierar en vänsterinvariant Riemannmetrik på G för vilken $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ är en ortogonal uppdelning. Eftersom θ bevarar Lieklammern är uppdelningen också reduktiv (dvs. $[\mathfrak{k}, \mathfrak{m}] \subseteq \mathfrak{m}$) och symmetrisk (dvs. $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subseteq \mathfrak{k}$).

Antag nu att $\gamma : \mathbb{R} \to H$ är en geodet med startpunkt $\gamma(0) = p$, och lyft γ till en horisontell geodet $A : \mathbb{R} \to G$ med startpunkt $A(0) = I$. Genom att identifiera alla tangentrum med $\mathfrak{g}$ via vänstertranslation kan vi då betrakta A' som en kurva $\mathbb{R} \to \mathfrak{m}$. Under denna identifikation följer det från metrikens vänsterinvarians att $A''(t) = -\mathrm{ad}^{\dagger}_{A'(t)}(A'(t))$

[2] Här ska det egentligen tilläggas att vi antar att parametriseringen har konstant fart, men vi har inte formellt definierat vad "fart" betyder i det hyperboliska planet.

för alla t, där $\mathrm{ad}^{\dagger}_{A'(t)} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ är den adjungerade operatorn till $\mathrm{ad}_{A'(t)} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ med avseende på den inre produkten $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ som kommer från metriken på G. Per definition är

$$\langle \mathrm{ad}^{\dagger}_{A'(t)}(A'(t)), Y \rangle_{\mathfrak{g}} = \langle A'(t), \mathrm{ad}_{A'(t)}(Y) \rangle_{\mathfrak{g}}.$$

Om $Y \in \mathfrak{m}$, ger symmetrin att $\mathrm{ad}_{A'(t)}(Y) \in \mathfrak{k}$, och eftersom $\mathfrak{m} \perp \mathfrak{l}$ blir högerledet ovan noll. Om å andra sidan $Y \in \mathfrak{k}$, ger reduktiviteten att $\mathrm{ad}_{A'(t)}(Y) \in \mathfrak{m}$, så att den inre produkten i högerledet ovan är en inre produkt i $\mathfrak{m}$. Den inre produkten på $\mathfrak{m}$ är $\mathrm{Ad}(K)$-invariant, och därför är $\mathrm{ad}_{A'(t)}$ skevadjungerad, så att högerledet ovan är lika med

$$-\langle \mathrm{ad}_{A'(t)}(A'(t)), Y \rangle_{\mathfrak{g}} = -\langle [A'(t), A'(t)], Y \rangle_{\mathfrak{g}} = 0.$$

Eftersom $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$, följer det av linjaritet att $\langle A'(t), \mathrm{ad}_{A'(t)}(Y) \rangle_{\mathfrak{g}}$ för alla $Y \in \mathfrak{g}$. Alltså är $\mathrm{ad}^{\dagger}_{A'(t)}(A'(t)) = 0$ för alla t, och kurvan $A' : \mathbb{R} \to \mathfrak{m}$ är därmed identiskt lika med någon konstant $X \in \mathfrak{m}$.

På grund av identifikationerna vi gjort ger detta, tillsammans med faktumet att $A(0) = I$, att A är en 1-parameterdelgrupp till G, dvs. att $A(s+t) = A(s)A(t)$ för alla $s, t \in \mathbb{R}$, vilket är det andra villkoret i listan.

Låt f_B beteckna Möbiustransformationen som beskrivs av en 2×2-matris B. Rent konkret är $\sigma = f_S$, där

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Faktumet att X är en egenvektor till θ med egenvärdet -1 kan formuleras som att $SXS^{-1} = -X$, och de matriser X som uppfyller detta är precis de som är på formen

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}, \qquad \text{för några } a, b \in \mathbb{R}.$$

Detta är precis de matriser X som både ligger i $\mathfrak{g}$ (mängden av spårfria 2×2-matriser) och är symmetriska. Alltså uppfylls det tredje villkoret.

Vi skiftar modell för det hyperboliska planet, och betraktar nu istället H som enhetsdisken i $\mathbb{C}$, och utrustar den med sin Poincarémetrik med konstant Gaußkrökning -1,

$$g = \frac{4(dx \otimes dx + dy \otimes dy)}{(1 - x^2 - y^2)^2}.$$

Den tidigare halvplansmodellen är isometrisk med denna modell via Möbiustransformationen f_P, där

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}.$$

För att förenkla notationen antar vi att p ligger i enhetsdisken och att kvotavbildningen $\pi : G \to H$, där H nu betraktas som enhetsdisken, avbildar $I \in G$ på $p \in H$. Notera att vi betraktar G, som är isometrigruppen för övre halvplanet, som ett knippe över enhetsdisken. Speciellt svarar vänstertranslationsverkan av en matris $g \in G$ på G mot den konjugerade Möbiustransformationen $f_{PgP^{-1}}$, dvs. följande diagram kommuterar:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "L_g"] \arrow[d, "\pi"] & G \arrow[d, "\pi"] \\ H \arrow[r, "f_{PgP^{-1}}"] & H. \end{tikzcd}$$

Om vi låter $g = A(t)$ följer nu det första villkoret direkt.

SF1681, övning 7

ALA 7.1.4

Let V be $\mathbb{R}^n$ with a nonstandard inner product. Let L be multiplication by a matrix A. Find the matrix of $L^\dagger$ in terms of the matrix A and the metric matrix $\mathbf{G}$. (The answer is not simply $A^\dagger$).

ALA 7.1.5

On $\mathbb{R}^3$, let $L(\mathbf{x}) = (3x_1 + x_2, x_2 - x_3, 5x_1 + x_3)^T$. With respect to the inner product $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$, compute $L^\dagger(\mathbf{x})$.

ALA 7.1.6

Let $V = \mathbb{R}_2[t]$ with the inner product $\langle a_0 + a_1t + a_2t^2 \mid b_0 + b_1t + b_2t^2 \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$. Let $D = d/dt$, and let $\mathbf{x} = 1 + 2t - t^2$. Find $D\mathbf{x}$ and $D^\dagger(\mathbf{x})$.

ALA 7.1.7

Let V be a space of smooth real-valued functions on $\mathbb{R}$ with the inner product $\langle \mathbf{f} \mid \mathbf{g} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)e^{-t^2}dt$. Find the adjoint of $D = d/dt$.

ALA 7.2.5

Let A be an arbitrary operator. Show that $H = A^\dagger A$ is Hermitian, and that all of the eigenvalues of H are nonnegative.

ALA 7.2.6

Show that the operator $L = -d^2/d\theta^2$ on $L^2(S^1)$ (the space of square-integrable functions on the unit circle) is Hermitian, with all its eigenvalues nonnegative. Can you write L in the form $A^\dagger A$ for some operator A?

ALA 7.3.4

Let A be an arbitrary real symmetric 2×2 matrix. What are the possible shapes of the curve $f_A(\mathbf{x}) = 1$? Under what conditions are each of these curves realized? Express your answer both in terms of the eigenvalues of A and in terms of the matrix elements.

ALA 7.3.8

Consider the quadratic function $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2$ on $\mathbb{R}^3$. Restrict this function to the unit sphere $|\mathbf{x}|^2 = 1$. Find the maxima, the minima, and the saddle points.

ALA 7.3.9

On $\mathbb{R}^3$, maximize $|\mathbf{x}|^2$ subject to the constraint $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2 = 1$.

ALA 7.3.10

Let A and B be real symmetric matrices, with B having all positive eigenvalues. Show that $B^{-1}A$ and $B^{-1/2}AB^{-1/2}$ have the same eigenvalues. If A is invertible, show that the eigenvalues of $A^{-1}B$ are the reciprocals of the eigenvalues of $B^{-1}A$. [Hint: Consider conjugates of matrices.]

Tentamen 2019-01-09, uppgift 2

Låt $V = C^\infty(\mathbb{R})$ vara de oändligt deriverbara komplexvärda funktionerna på $\mathbb{R}$ med inre produkt

$$\langle f \mid g \rangle = \int_0^1 \overline{f(t)} g(t)\, dt,$$

för alla f, g i V, låt $W = \{f \in V : f(t+1) = f(t), \forall t \in \mathbb{R}\}$ och låt $L : W \longrightarrow W$ ges av $L(f) = f'$. Bestäm den adjungerade operatorn $L^\dagger$.

Tentamen 2018-01-10, uppgift 4

Låt V vara ett komplext inre produktrum och L en operator på V.

(a) Hur definieras den adjungerade operatorn $L^\dagger$?

(b) Hur kan man visa att den adjungerade operatorn existerar då $\dim V < \infty$?

(c) Ge ett belysande exempel på ett inre produktrum V och en operator L som inte är självadjungerad, men där både L och $L^\dagger$ är naturliga operatorer.

Tentamen 2021-04-08, uppgift 6

Betrakta Hilbertrummet $\ell_2(\mathbb{C})$ av oändliga följder $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \ldots)$ av komplexa tal sådana att $\sum_{j=0}^\infty |a_j|^2 < \infty$ med den inre produkten $\langle \mathbf{a} \mid \mathbf{b} \rangle = \sum_{j=0}^\infty \overline{a_j} b_j$. Låt V vara delrummet av följder $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \ldots)$ sådana att $a_{2k+1} = a_{2k}$ för alla heltal $k \geq 0$.

(a) Bestäm det ortogonala komplementet $V^\perp$.

(b) Är $\ell_2(\mathbb{C})$ en inre direkt summa av V och $V^\perp$?

Tentamen 2023-01-11, (del av) uppgift 7

Låt $\ell^2(\mathbb{C})$ vara Hilbertrummet av följder $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \ldots)$ med $|\mathbf{a}|^2 = \sum_{i=0}^\infty |a_i|^2 < \infty$ och den inre produkten $\langle \mathbf{a} \mid \mathbf{b} \rangle = \sum_{i=0}^\infty \overline{a_i} b_i$. Vidare, låt $L : \ell^2(\mathbb{C}) \to \ell^2(\mathbb{C})$ vara operatorn som tar en följd $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ på följden $(a_2, a_0, a_1,\ a_5, a_3, a_4,\ a_8, a_6, a_7, \ldots)$.

(a) Avgör om L är självadjungerad.

(b) Avgör om det finns en ortonormal Hilbert-bas av egenvektorer till L.

Tentamen 2025-01-13, uppgift 2

Låt $V = \mathbb{C}^5$ och $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_4 - \mathbf{e}_5, \mathbf{e}_5\}$ där $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5\}$ är standardbasen för $\mathbb{C}^5$. Bestäm den duala basen $\mathcal{B}^*$ för V.

Egen uppgift

Om V är ett ändligdimensionellt reellt inre produktrum kan man definiera[1] en linjär avbildning $\flat : V \to V^*$ genom $\flat(v) = \langle v|$, eller mer konkret, genom att säga att $\flat(v)(w) = \langle v \mid w \rangle$ för alla $v, w \in V$.

(a) Visa att $\flat$ är en isomorfi.

Eftersom $\flat$ är en isomorfi har den en invers $\sharp : V^* \to V$, och tillsammans kallas de två isomorfierna $\sharp$ och $\flat$ de *musikaliska isomorfierna.*

(b) Antag att $\mathcal{B}$ är en bas för V, och att $L : V \to V$ är en linjär operator som med avseende på basen $\mathcal{B}$ representeras av en matris A. Vad blir matrisen för operatorn $L^* := \flat \circ L^\dagger \circ \sharp : V^* \to V^*$ med avseende på den duala basen $\mathcal{B}^*$?

(c) Gäller resultatet från deluppgift (a) om man istället antar att V är ett *komplext* vektorrum? Om inte, förklara vad som blir annorlunda och vilka delar som fortfarande gäller.

(d) Visa att antagandet $\dim(V) < \infty$ inte kan tas bort, dvs. ge exempel på ett oändligdimensionellt reellt inre produktrum V där $\flat$ inte blir en isomorfi.

[1] Notera att $\flat$ beror på inre produkten på V.

SF1681, övning 8

ALA 7.4.5

Not all changes of basis are unitary. Suppose $\mathcal{B}$ is an orthonormal basis and $\mathcal{D}$ is not. Show that $P_{\mathcal{D}\mathcal{B}}$ is not unitary.

ALA 7.4.13

How do the eigenvalues of a unitary operator U compare to those of $H = U + U^\dagger$?

ALA 7.5.4–7.5.8

Let

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

These are called the *Pauli matrices*, and span the vector space su_2 of Hermitian, traceless 2×2 matrices.

7.5.4 Show that any 2×2 Hermitian matrix can be written as a real linear combination of the identity matrix, σ_1, σ_2, and σ_3.

7.5.5 Suppose that $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ and that $|\mathbf{x}| = 1$. Show that $ix_1\sigma_1 + ix_2\sigma_2 + ix_3\sigma_3 + x_4 I$ is unitary, where I is the identity matrix.

7.5.6 Show that $e^{-ix_1\sigma_1}$ is unitary and equals $\cos(x_1)I - i\sin(x_1)\sigma_1$.

7.5.7 More generally, show that, for $k = 1, 2, 3$, $e^{-ix_k\sigma_k}$ is unitary and equals $\cos(x_k)I - i\sin(x_k)\sigma_k$.

7.5.8 Let $\mathbf{v}$ be any unit vector in $\mathbb{R}^3$. Show that $\exp(-i\theta(v_1\sigma_1 + v_2\sigma_2 + v_3\sigma_3))$ is unitary, and equals $\cos(\theta)I - i\sin(\theta)M$, where $M = v_1\sigma_1 + v_2\sigma_2 + v_3\sigma_3$.

Tentamen 2019-04-17, uppgift 2

Låt

$$S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

(a) Avgör vilka av matriserna i S som är Hermiteska och bestäm egenvärdena för någon av dessa.

(b) Avgör vilka av matriserna i S som är unitära och bestäm egenvärdena för någon av dessa.

Tentamen 2020-01-09, uppgift 2

Låt $V = C^\infty([0,1])$ vara de oändligt deriverbara komplexvärda funktionerna på $[0,1]$ med inre produkt

$$\langle f|g\rangle = \int_0^1 \overline{f(t)}g(t)\,dt, \text{ för alla } f,\, g \text{ i } V.$$

Låt $L : V \longrightarrow V$ ges av $L(f(t)) = f(t)e^{it}$. Är L självadjungerad? Är L unitär?

Tentamen 2021-01-11, uppgift 4

Ge exempel på komplexa 2×2-matriser A, B, C och D sådana att

(a) A är Hermitesk men inte unitär.

(b) B är unitär men inte Hermitesk.

(c) C är diagonaliserbar men varken unitär eller Hermitesk.

(d) D är inte diagonaliserbar.

Tentamen 2023-01-11, uppgift 2

Låt V vara vektorrummet av kontinuerliga funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ med kompakt stöd, dvs $f(x) = 0$ för alla $|x| > R$ för något R (beroende på f). Ge V den inre produkten $\langle f|g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}e^x dx$. Låt $L : V \longrightarrow V$ vara operatorn som ges av $L(f)(x) = f(x+1)$.

(a) Bestäm den adjungerade operatorn till L.

(b) Avgör för varje $c \in \mathbb{C}$ om cL är självadjungerad.

(c) Avgör för varje $c \in \mathbb{C}$ om cL är unitär.

Tentamen 2023-01-11, uppgift 5

Låt V vara ett komplext inre produktrum och låt $L : V \to V$ vara en operator.

(a) Definiera vad det innebär att L är *unitär*.

(b) Ge ett exempel på ett inre produktrum V och en linjär operator L så att $\|L(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$ utan att L är unitär.

(c) Visa att alla egenvärden till en unitär operator har absolutbelopp 1.

(d) Visa att egenrummen till olika egenvärden till en unitär operator är ortogonala.

Tentamen 2023-01-11, (del av) uppgift 7

Låt $\ell^2(\mathbb{C})$ vara Hilbertrummet av följder $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots)$ med $|\mathbf{a}|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} |a_i|^2 < \infty$ och den inre produkten $\langle \mathbf{a} \mid \mathbf{b} \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} \overline{a_i} b_i$. Vidare, låt $L : \ell^2(\mathbb{C}) \to \ell^2(\mathbb{C})$ vara operatorn som tar en följd $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ på följden

$$(a_2, a_0, a_1,\ a_5, a_3, a_4,\ a_8, a_6, a_7, \dots).$$

Avgör om L är unitär.

Tentamen 2023-04-11, uppgift 2

Låt $z \in \mathbb{C}$ vara ett komplext tal och betrakta matrisen $A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & z \\ i & 1+2iz \end{bmatrix}$. Bestäm alla värden på z för vilka A är Hermitesk och/eller unitär. Beräkna även egenvärdena för A för alla sådana z.

Egen uppgift

Låt $\mathrm{U}(n)$ beteckna mängden av alla unitära $n \times n$-matriser. Alla sådana matrisers determinant har absolutbelopp 1, och vi låter $\mathrm{SU}(n)$ beteckna delmängden av de vars determinant är **lika med** 1.

(a) Visa att $\mathrm{SU}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a+bi & -c+di \\ c+di & a-bi \end{pmatrix} \,\middle|\, a,b,c,d \in \mathbb{R} \text{ och } a^2+b^2+c^2+d^2 = 1 \right\}$.

(b) Låt $\mathfrak{su}(2)$ vara vektorrummet av hermiteska 2×2-matriser X som uppfyller $\operatorname{Tr} X = 0$. Visa att avbildningen $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathfrak{su}(2)$ som definieras av

$$\Phi(x,y,z) = \begin{pmatrix} z & x-iy \\ x+iy & -z \end{pmatrix}$$

är en isomorfi (mellan reella vektorrum). Kan du definiera en inre produkt på $\mathfrak{su}(2)$ sådan att $\|\Phi(v)\| = \|v\|$ för alla $v \in \mathbb{R}^3$? Skriv ner ett koncist uttryck för normen som induceras av denna inre produkt.

(c) Antag att $A \in \mathrm{SU}(2)$ och $X \in \mathfrak{su}(2)$. Visa att $AXA^\dagger \in \mathfrak{su}(2)$, och dra slutsatsen att varje $A \in \mathrm{SU}(2)$ definierar en linjär avbildning $L_A : \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{su}(2)$ enligt $L_A(X) = AXA^\dagger$.

(d) Visa att avbildningen $\Phi^{-1} \circ L_A \circ \Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ är ortogonal med avseende på den vanliga inre produkten på $\mathbb{R}^3$.

SF1681, övning 9

Egen uppgift

Låt $\mathfrak{o}(n)$ beteckna vektorrummet av (reella) antisymmetriska $n \times n$-matriser, och låt M_n beteckna vektorrummet av reella $n \times n$-matriser. Antag att $A \in M_n$, och definiera en linjär avbildning $L : \mathfrak{o}(n) \oplus \mathfrak{o}(n) \to M_n$ enligt

$$L((X, Y)) = XA + AY.$$

Bestäm $\dim(\mathrm{im}(L))$ i följande fall.

(a) När $A = I$.

(b) När A är inverterbar och har n distinkta singulärvärden.

(c) När A är inverterbar, och har $n - 2$ distinkta singulärvärden och ett upprepat singulärvärde.

(d) När $\dim(\ker(A)) = m > 0$, och A har $n - m$ distinkta nollskilda singulärvärden.

Övningar på singulärvärdesuppdelning

Uppgift 1. Låt L vara en operator på ett inre produktrum V.

(a) Visa att $L^\dagger L$ och $LL^\dagger$ har samma egenvärden. Rättning: I deluppgift (a) antar vi att $\dim(V) < \infty$.

(b) Visa att alla egenvärden till $L^\dagger L$ och $LL^\dagger$ är icke-negativa reella tal.

(c) Visa att om V är ändligt-dimensionellt så finns det en självadjungerad operator K_1 så att $(K_1)^2 = L^\dagger L$ och en självadjungerad operator K_2 så att $(K_2)^2 = LL^\dagger$.

(d) Om L i en ortonormal bas $\mathscr{B}$ ges av matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

bestäm matriserna för K_1 och K_2 i samma bas.

Uppgift 2. Bestäm en 2×3-matris A så att A har singulärvärdena 2 och 3 med motsvarande höger- och vänstersingulära vektorer $\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\end{bmatrix}^T$ och $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}^T$, respektive $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\end{bmatrix}^T$ och $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2 & -1\end{bmatrix}^T$.

Uppgift 3. Bestäm Moore–Penrose inversen A^+ till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

Uppgift 4. Använd Moore–Penrose inversen för att lösa ekvationssystemet

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

i minsta kvadratmening.

Uppgift 5. Visa att om A är en reell 2×2-matris kan vi alltid välja X eller Y som en symmetrisk matris i singulärvärdesuppdelningen $A = Y\Sigma X^T$. När kan vi välja både X och Y som symmetriska matriser?

Uppgift 6 (Uppgift 3 på tentamen 2019-04-17)**.** Bestäm det största singulärvärdet och motsvarande höger- och vänstersingulära vektorer som hör till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Uppgift 7 (Uppgift 3 på tentamen 2018-04-05)**.** Bestäm singulärvärden och singulärvektorer till matriserna

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}.$$

SF1681, övning 10

Tentamen 2020-04-16, uppgift 4

(a) Ge ett exempel på en 3×3-sannolikhetsmatris (ej identitetsmatrisen).

(b) Visa att en sannolikhetsmatris alltid har en egenvektor med egenvärde 1.

(c) Antag att A är en sannolikhetsmatris sådan att alla element i matrisen A^3 är positiva. Vad kan vi då säga om egenvärden med absolutbelopp 1 och deras algebraiska multipliciter?

Tentamen 2020-04-16, uppgift 8

Betrakta följande stokastiska process i diskret tid. Tillstånden ges av $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$, dvs heltalen modulo 3, och om tillståndet vid tiden t är $n \in \mathbb{Z}_3$ så är tillståndet vid tiden $t + 1$

- $n^2 \in \mathbb{Z}_3$ med sannolikheten $1 - 2\alpha$,
- $n^2 - 1 \in \mathbb{Z}_3$ med sannolikheten α, och
- $n^2 + 1 \in \mathbb{Z}_3$ med sannolikheten α,

där $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$ är en konstant. Modellera detta som en Markovkedja. Avgör för vilka α som processen konvergerar mot en sannolikhetsfördelning som inte beror på tillståndet vid tiden $t = 0$. Bestäm den stationära sannolikhetsfördelningen för dessa α.

Övningar på Perron–Frobenius sats och sannolikhetsmatriser

Uppgift 1. Bestäm egenvektorn med egenvärde 1 till matrisen

$$A = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

och avgör om $\lim_{t\to\infty} \mathbf{p}(t)$ existerar för alla val av sannolikhetsvektorn $\mathbf{p}(0)$ om $\mathbf{p}(t+1) = A\mathbf{p}(t)$ för alla $t \in \mathbb{N}$.

Uppgift 2. En *permutationsmatris* är en kvadratisk matris där varje rad och varje kolonn innehåller precis en etta och resten nollor.

(a) Visa att alla potenser av en permutationsmatris också är permutationsmatriser.
(b) Visa att permutationsmatriser är ortogonala.
(c) Visa att om P är en permutationsmatris av storlek $n \times n$ och $p(x)$ är ett polynom med reella ickenegativa koefficienter med $p(1) = 1$ så är $p(P)$ en sannolikhetsmatris.
(d) Vilka permutationsmatriser har en unik egenvektor med egenvärde 1?

Uppgift 3. Visa att om A och B är två kommuterande sannolikhetsmatriser och båda har en unik egenvektor (upp till multiplikation med skalär) med egenvärde 1 så är det en gemensam egenvektor.

Uppgift 4. (Uppgift 5 på tentamen 2018-01-10)

(a) Vad är en *sannolikhetsmatris*? **(1 p)**
(b) Alla sannolikhetsmatriser har 1 som ett egenvärde. Hur bevisar man det? **(1 p)**
(c) Formulera någon version av Perron–Frobenius sats. **(1 p)**
(d) Ge ett exempel som visar att $\lim_{n\to\infty} A^n$ inte behöver existera även om A är en irreducibel sannolikhetsmatris. **(1 p)**

Uppgift 5. (Seminarieuppgift 3.2, HT18)

För varje heltal $N > 0$ kan vi studera den slumpvandringsprocess som ges av en linjär graf, dvs en graf med hörnen $1, 2, \ldots, N$ med kanter mellan efterföljande hörn. Sannolikheten att gå från hörn i till hörn $i+1$ eller hörn $i-1$ är $1/2$ utom om $i = 1$ eller N då sannolikheten är 1 att gå till det enda intilliggande hörnet. Låt A_N vara den sannolikhetsmatris (stokastiska matris) som beskriver denna Markovkedja.

(a) Använd lämplig programvara för att bestämma egenvärdena till A_N för ett antal olika N. Hur stora N fungerar?
(b) Plotta egenvärdena och ställ upp en hypotes för hur de beror på N.
(c) Är A_N reguljär?
(d) Bilda nya stokastiska matriser $B_N = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A^2$ och $C_N = \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}A$. Är B_N och/eller C_N reguljära?
(e) Hur förhåller sig egenvärdena till B_N och C_N till egenvärdena till A_N?
(f) Hur kan vi tolka processerna som ges av B_N och C_N i termer av processen om ges av A_N?

Uppgift 6. (Uppgift 3 på tentamen 2019-01-09)

I en Markovkedja ges fördelningen vid tidpunkt $t = n+1$ av fördelningen vid tidpunkt $t = n$ genom den stokastiska matrisen

$$A = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 7 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Avgör om $\lim_{n\to\infty} A^n$ existerar och bestäm i så fall gränsvärdet. **(4 p)**

Uppgift 7. (Uppgift 9 på tentamen 2019-04-17)

Bestäm alla unitära stokastiska matriser (sannolikhetsmatriser) och avgör om de bildar en grupp[3] under matrismultiplikation. **(3 p)**

[3]Dvs: om A och B är unitära stokastiska matriser så är även A^{-1} och AB unitära stokastiska matriser.

SF1681, övning 11 och 12

Intressant läsning om tensorer (länkar)

- How to Conquer Tensorphobia
- Tensorphobia and the Outer Product
- The Tensor Product, Demystified
- En annan framställning av tensorprodukter över reella vektorrum (s. 304–316, bara det som är innan *Tensors and Tensor Fields on Manifolds)*

Egen uppgift

(a) Antag att V är ett reellt vektorrum och att $W \subseteq V$ är ett delrum. Visa att en linjär funktional $\phi : V \to \mathbb{R}$ som uppfyller $W \subseteq \ker(\phi)$ på ett naturligt sätt definierar ett element i $(V/W)^*$.

Låt $V_{(0,0)}$ vara det reella vektorrummet av C^1-kurvor $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ som uppfyller $\gamma(0) = (0,0)$, och låt $V^1_{(0,0)} \subseteq V_{(0,0)}$ vara delrummet av de $\gamma \in V_{(0,0)}$ som uppfyller $\gamma'(0) = (0,0)$. Vidare, låt $\mathbb{R}[x,y]$ vara det reella vektorrummet av polynom i två variabler med reella koefficienter. Ett sådant polynom kan ses som en funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, och vi definierar en avbildning $B : \mathbb{R}[x,y] \times V_{(0,0)} \to \mathbb{R}$ enligt

$$B(f,\gamma) = \frac{d}{dt}(f(\gamma(t)))\bigg|_{t=0}.$$

(b) Visa att B är bilinjär, och därmed ger upphov till en linjär avbildning $\tilde{B} : \mathbb{R}[x,y] \otimes V_{(0,0)} \to \mathbb{R}$. Är B degenererad?

(c) Låt $\mathbb{R}_{\geq 2}[x,y] \subseteq \mathbb{R}[x,y]$ vara delrummet av polynom utan termer av grad 0 eller 1. Visa att $W \subseteq \ker(\tilde{B})$, där

$$W := \mathbb{R}_{\geq 2}[x,y] \otimes V_{(0,0)} + \mathbb{R}[x,y] \otimes V^1_{(0,0)} \subseteq \mathbb{R}[x,y] \otimes V_{(0,0)}.$$

(d) Visa att $\tilde{B}$ på ett naturligt sätt ger upphov till en icke-degenererad bilinjär form

$$\hat{B} : (\mathbb{R}[x,y]/\mathbb{R}_{\geq 2}[x,y]) \times (V_{(0,0)}/V^1_{(0,0)}) \to \mathbb{R},$$

samt en isomorfi $\left(V_{(0,0)}/V^1_{(0,0)}\right)^* \cong \mathbb{R}[x,y]/\mathbb{R}_{\geq 2}[x,y]$.

ÖVNINGAR PÅ TENSORPRODUKT

Uppgift 1. Låt $V = \mathbb{R}^3$ och låt $L\colon V \otimes V \longrightarrow V$ vara den linjära avbildningen som ges av den bilinjära avbildningen $f\colon V \times V \longrightarrow V$ som ges av kryssprodukten, dvs:

$$f(v,w) = v \times w, \qquad \text{för alla } v,w \in V.$$

Bestäm en bas för $\ker L$.

Uppgift 2. Visa att $w := 1 \otimes 1 + x \otimes y \in \mathbb{C}[x] \otimes \mathbb{C}[y]$ inte är en ren tensor, dvs inte går att skriva som $w = p(x) \otimes q(y)$.

Uppgift 3. Kontrollera att avbildningen $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}\colon V^* \times W^* \longrightarrow k$ som ges av

$$(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y})(\phi, \psi) = \phi(\mathbf{x})\psi(\mathbf{y}), \quad \forall (\phi, \psi) \in V^* \times W^*$$

verkligen är bilinjär.

Uppgift 4. Visa att $\mathrm{tr}\colon V^* \otimes V \longrightarrow k$ svarar mot spåret av matrisen för avbildningar i $V^* \otimes V \cong \mathrm{Hom}_k(V,V)$ oberoende av val av bas för V så länge den duala basen väljs för V^*.

Uppgift 5. Låt $\{\mathbf{e}_i\}$ och $\{\mathbf{f}_i\}$ vara baser för V där basbytet ges av matrisen $A = (a_{ij})$ med $\mathbf{f}_i = \sum_{j=1}^n a_{ji}\mathbf{e}_j$.

(a) Vilken matris $B = (b_{ij})$ ger basbytet mellan de duala baserna $\{\mathbf{e}_i^*\}$ och $\{\mathbf{f}_i^*\}$ för V^*?

(b) Hur ser basbytet ut på $V^* \otimes V$?

Uppgift 6. Bevisa Sats 2.23, dvs att $V \otimes V = \mathrm{Sym}^2(V) \oplus \mathrm{Alt}^2(V)$ om $1 + 1 \neq 0$ i k.

Uppgift 7. Om V är ett reellt vektorrum kan vi bilda ett komplext vektorrum genom $V_{\mathbb{C}} = V \otimes \mathbb{C}$ där vi ser $\mathbb{C}$ som ett tvådimensionellt reellt vektorrum. Kontrollera att $V_{\mathbb{C}}$ uppfyller definitionen för ett vektorrum över $\mathbb{C}$ om vi använder multiplikation med skalär på den andra faktorn i tensorprodukten.

Uppgift 8 (Uppgift 7 på modelltentamen)**.** Låt $L\colon V \longrightarrow V$ vara en operator på ett reellt vektorrum som med basen $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ för V ges av matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Med hjälp av L får vi en avbildning $L \otimes L^*\colon V \otimes V^* \longrightarrow V \otimes V^*$ från den bilinjära avbildningen $V \times V^* \longrightarrow V \otimes V^*$ som ges av $(\mathbf{x}, \phi) \mapsto L(\mathbf{x}) \otimes L^*(\phi)$, för $\mathbf{x} \in V$ och $\phi \in V^*$.

(a) Bestäm matrisen för $L \otimes L^*$ med avseende på basen $\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j^*\}$. **(2 p)**

(b) Bestäm $\det(L \otimes L^*)$. (Ledning: $\det(L) = 7$.) **(2 p)**

Uppgift 9 (Uppgift 7 på tentamen 2018-01-10)**.** Låt $V \subseteq \mathbb{C}^3$ vara delrummet som ges av ekvationen $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ och betrakta tensorprodukten $V \otimes V$ som ett delrum i $\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3$. Avgör om någon av tensorerna

$$\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2$$

eller

$$\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3$$

ligger i $V \otimes V$, där $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ är standardbasvektorerna för $\mathbb{C}^3$. **(4 p)**

Uppgift 10 (Uppgift 5 på tentamen 2018-04-05)**.** Låt V och W vara ändligdimensionella vektorrum.

(a) Definiera tensorprodukten $V \otimes W$. **(1 p)**

(b) Visa att $\dim(V \otimes W) = (\dim V)(\dim W)$. **(1 p)**

(c) Visa att det det finns en naturlig bilinjär avbildning $\Phi\colon V \times W \longrightarrow V \otimes W$. **(1 p)**

(d) Tensorprodukten $V \otimes W$ har tillsammans med den bilinjära avbildningen från del (c) en universell egenskap med avseende på bilinjära avbildningar $V \times W \longrightarrow U$, nämligen att alla sådana faktoriserar på ett entydigt sätt via Φ. Förklara vad detta innebär och skissera ett bevis för att detta gäller. **(1 p)**

Uppgift 11 (Uppgift 7 på tentamen 2018-04-05)**.** För en linjär operator L på V kan vi bilda en linjär operator på $V \otimes V$ genom $I \otimes L - L \otimes I$, där I är identitetsoperatorn på V.

(a) Bestäm rangen för $I \otimes L - L \otimes I$ om L ges av matrisen **(2 p)**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

(b) Visa att $I \otimes L - L \otimes I$ är nilpotent om L är nilpotent, men att det omvända inte alltid gäller. **(2 p)**

SF1681, övning 13

Tentamen 2019-04-17, uppgift 8

Bestäm A^{2019} då
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$
har koefficienter i $\mathbb{Z}_7$.

Tentamen 2020-01-09, uppgift 6

Låt A vara 4×4-matrisen med element i $\mathbb{Z}_2$ (dvs heltalen modulo 2) som ges av:
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
Låt S vara delrummet av 4×4-matriser som ges av $S = \{p(A) : p(x)$ är ett polynom med koefficienter i $\mathbb{Z}_2\}$. Bestäm antalet element i S. Utgör S en kropp?

Egen uppgift

Låt K vara en ändlig kropp av karakteristik p, där p är ett primtal. Notera att detta innebär att primkroppen $k \subseteq K$ är isomorf med $\mathbb{Z}_p$, och att $|K| = p^n$ för något n, där $n := \dim_k(K)$ är dimensionen av K som k-vektorrum.

Betrakta mängden
$$V = \{L : K \to K \mid L \text{ är } k\text{-linjär}\},$$
som bildar ett vektorrum över k.

(a) Visa att V blir ett K-vektorrum, om vi för $\alpha, r \in K$ definierar $(\alpha L)(r) = \alpha L(r)$. Vad blir dimensionerna $\dim_k(V)$ respektive $\dim_K(V)$ då vi betraktar V som k-vektorrum respektive K-vektorrum?

Vi betraktar nu mängden[1] $\mathrm{Gal}(K/k)$, beståendes av alla (kropps)isomorfier $\phi : K \to K$ som fixerar k, det vill säga uppfyller $\phi(r) = r$ för $r \in k$.

(b) Visa att $\mathrm{Gal}(K/k)$ är en linjärt oberoende delmängd (observera: **inte** delrum) av K-vektorrummet V.

(c) Visa att $F \in \mathrm{Gal}(K/k)$, där $F : K \to K$ är avbildningen som definieras enligt $F(r) = r^p$. Vidare, visa att $F^m \in \mathrm{Gal}(K/k)$ för $m \geq 0$, och dra slutsatsen att $F^m = \mathrm{id}$ för något m med $0 < m \leq n$.

(d) Visa att $\mathrm{Gal}(K/k) = \{F^m \mid 0 \leq m < n\}$.

Ledning: Antag att $F^m = \mathrm{id}$ *för något* m *med* $0 < m < n$, *och visa att det leder till motsägelsen* $|K| \leq 1 + p + p^2 + \cdots + p^{n-1} < p^n$.

[1] Detta kallas för *Galoisgruppen* till kroppsutvidgningen $k \subseteq K$.

Övningar på ändliga kroppar och kroppsutvidgningar

Uppgift 1. Beräkna inversen till 4 i $\mathbb{Z}_{11}$.

Uppgift 2. Lös om möjligt ekvationen $x^2-4x+5=0$ i $\mathbb{Z}_{11}$ respektive i $\mathbb{Z}_{13}$.

Uppgift 3. Visa att $\mathbb{C}$ kan fås som 2×2-matriser med koefficienter i $\mathbb{R}$ med hjälp av en godtycklig 2×2-matris J med karakteristiskt polynom som saknar reella nollställen.

Uppgift 4. Hitta ett irreducibelt andragradspolynom med koefficienter i $\mathbb{Z}_3$ och använd det för att konstruera en kropp med nio element som 2×2-matriser över $\mathbb{Z}_3$.

Uppgift 5 (Uppgift 8 på tentamen 2018-01-10)**.** Låt K vara delmängden av $M_2(\mathbb{Z}_7)$ som ges av

$$K=\left\{\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} : a,b\in\mathbb{Z}_7\right\}.$$

Visa att K bildar en kropp med 49 element och lös ekvationerna $x^2+2x+2=0$ respektive $x^6=1$ i K. **(4 p)**

Uppgift 6 (Uppgift 1 på tentamen 2018-04-05)**.** Låt $k=\{0,1,a,1+a\}$ vara kroppen med fyra element.

(a) Skriv upp additions- och multiplikationstabellerna för k. **(2 p)**

(b) Bestäm en matris A med koefficienter i $\mathbb{Z}_2$ sådan att k kan representaras av matriserna $\{0,I,A,A+I\}$. **(2 p)**

Uppgift 7 (Uppgift 1 på modelltentamen 2017)**.** Följden $\{x_i\}_{i\geq 0}$ definieras genom den linjära rekursionen $x_{i+2}=x_{i+1}+x_i$, för $i\geq 0$ och $x_0=x_1=1$. Bestäm x_{2017} om räkningarna sker i $\mathbb{Z}_{11}$. **(4 p)**

Uppgift 8 (Uppgift 1 på tentamen 2018-05-02)**.** Låt $k=\{0,1,-1\}$ vara kroppen med tre element.

(a) Bestäm alla andragradspolynom x^2+ax+b med koefficienter i k som inte har några nollställen i k. **(2 p)**

(b) Bestäm en matris A sådan att matriserna $\{aI+bA:\ a,b\in k\}$ bildar en kropp med nio element. **(2 p)**

SF1681, övning 14

Uppgifter om tensorer och tensorprodukter

Tentamen 2021-01-11, uppgift 3

Låt $\mathbb{C}$ vara de komplexa talen betraktat som ett reellt vektorrum.

(a) Vad är dimensionen av tensorprodukten $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$?

(b) Visa att det finns en unik linjär avbildning $L\colon \mathbb{C} \otimes \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ sådan att $L(z \otimes w) = zw$ för alla $z, w \in \mathbb{C}$.

(c) Bestäm en bas för kärnan till L.

Tentamen 2022-01-11, uppgift 7

Låt V vara ett komplext vektorrum och definiera en avbildning $f : V \times V \longrightarrow V \otimes V$ genom $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \otimes \mathbf{y} - \mathbf{y} \otimes \mathbf{x}$. Visa att det finns en unik operator L på $V \otimes V$ sådan att $L(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Visa att $V \otimes V = \operatorname{im} L \oplus \ker L$ är en inre direkt summa.

Tentamen 2024-01-10, uppgift 6

Låt $V = \mathbb{C}^3$ och låt $L : V \to V$ ges av $L(x_1, x_2, x_3) = (x_3, x_1, x_2)$.

(a) Visa att detta ger en linjär avbildning $L \otimes L : V \otimes V \to V \otimes V$.

(b) Bestäm egenvärden och egenrum för $L \otimes L$.

Tentamen 2024-04-04, uppgift 3

Låt $V = \mathbb{R}^3$ och $W = V \oplus \mathbb{R}$. Den bilinjära avbildningen $\Phi : V \times V \longrightarrow W$ som ges av kryssprodukt och skalärprodukt genom $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x} \times \mathbf{y}, \mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$ ger upphov till en linjär avbildning $L : V \otimes V \to W$.

(a) Bestäm rangen av L.

(b) Bestäm en bas för $\ker L$.

Uppgifter om kroppar och kroppsutvidgningar

Tentamen 2024-04-04, uppgift 6

Låt $\mathbb{F}_q$ vara kroppen med q element där q är en primtalspotens. Bestäm antalet matriser i $M_{m,n}(\mathbb{F}_q)$ som har rang 1 för positiva heltal m och n.

Tentamen 2024-01-10, uppgift 3

Låt $\mathbb{F}_5 = \{0, \pm 1, \pm 2\}$ vara kroppen med fem element. Välj en matris A i $M_{2,2}(\mathbb{F}_5)$ sådan att $K = \{aI + bA : a, b \in \mathbb{F}_5\}$ bildar en kropp med 25 element och bestäm alla lösningarna till ekvationen $x^3 = 1$ i K.

Tentamen 2025-01-13, uppgift 3

Avgör om $K = \{aI + bA : a, b \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}\}$ är en kropp för var och en av matriserna A i mängden

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \subseteq M_2(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}).$$

Uppgifter om Moore–Penroseinverser

Tentamen 2025-01-13, uppgift 9

Avgör för vilka par av komplexa matriser A och B av rang 1 som Moore–Penroseinversen uppfyller att $(AB)^+ = B^+A+$. Observera att matriserna inte behöver vara kvadratiska, men produkten AB behöver vara definierad.

SF1681 Linjär algebra, fk
Tentamen
24 april 2025

1. En Hammingkod C av längd 7 ges av nollrummet till matrisen
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
med koefficienter i kroppen $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
   (a) Bestäm en bas för C.
   (b) Bestäm ett delrum $W \subseteq \mathbb{F}_2^7$ som uppfyller $W \oplus C = \mathbb{F}_2^7$ som inre direkt summa.

2. Låt $V = \mathbb{C}^5$ och
$$\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4,\ \mathbf{e}_4 - \mathbf{e}_5,\ \mathbf{e}_5\}$$
där $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5\}$ är standardbasen för $\mathbb{C}^5$. Bestäm den duala basen $\mathcal{B}^*$ för V^*.

3. Bestäm singulärvärden och en ortonormal bas av vänstersingulära vektorer till den reella matrisen
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. (a) Definiera begreppet *adjungerad operator*.
   (b) Ge ett exempel på en operator som saknar adjungerad operator.
   (c) Visa att alla egenvärden till en självadjungerad operator på ett komplext inre produktrum är reella.
   (d) Visa att egenvektorer som tillhör olika egenrum till en självadjungerad operator är ortogonala mot varandra.

5. (a) Definiera begreppet *primkropp*.
   (b) Visa att primkroppen i en kropp måste vara isomorf med $\mathbb{Q}$ eller med $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ för något primtal p.
   (c) Ge ett explicit exempel på en kropp med precis nio element.

6. Avgör vilka karaktäristiska polynom som är möjliga för 4×4-matriser A med koefficienter i $\mathbb{C}$ med minimalpolynom $q_A(x) = x^3 + 2x^2 + x$. Ge exempel på en matris för varje sådant polynom.

7. Matrisen B är nilpotent och har två Jordanblock av storlek 2×2 och tre Jordanblock av storlek 1×1. Matrisen A uppfyller $A^2 = B$. Avgör vilka möjligheter det finns för Jordanformen för A.

8. Låt V och W vara ändligtdimensionella komplexa inre prouktrum. Visa att det finns en inre produkt på $V \otimes W$ som uppfyller att
   (a) $\langle \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{w}_1 | \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{w}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 \rangle \langle \mathbf{w}_1 | \mathbf{w}_2 \rangle$, för $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ i V och $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ i W,
   och att
   (b) $L_1 \otimes L_2$ är en unitär operator på $V \otimes W$ om L_1 är en unitär operator på V och L_2 är en unitär operator på W.

9. Låt V vara ett komplext vektorrum av dimension n och låt $X \subseteq V \otimes V$ och $Y \subseteq V \otimes V \otimes V$ vara mängderna som ges av
$$X = \{\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{u} : \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V\}$$
och
$$Y = \{2\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{w} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{w} \otimes \mathbf{u} - \mathbf{w} \otimes \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} : \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V\}.$$
   (a) Bestäm dimensionen av $\operatorname{span} X \subseteq V \otimes V$.
   (b) Bestäm dimensionen av $\operatorname{span} Y \subseteq V \otimes V \otimes V$.

SF1681, ytterligare uppgifter om tensorer och tensorprodukter

Egen uppgift 1

Låt V vara ett reellt inre produktrum med $\dim(V) = n < \infty$. Inre produkten är en bilinjär form $V \times V \to \mathbb{R}$, och kan betraktas som ett element $g \in V^* \otimes V^*$, där $g(v, w) = \langle v \mid w \rangle_V$.

(a) Visa att g kan skrivas som $g = \phi_1 \otimes \phi_1 + \cdots + \phi_n \otimes \phi_n$, för några $\phi_1, \ldots, \phi_n \in V^*$.

(b) Går det att skriva g som i deluppgift (a), men med färre än n termer?

(c) Antag att $B : V \times V \to \mathbb{R}$ är en symmetrisk bilinjär form, det vill säga ett element i $V^* \otimes V^*$. Visa att det går att skriva $B = s_1\phi_1 \otimes \phi_1 + \cdots + s_m\phi_m \otimes \phi_m$ för några $s_1, \ldots, s_m \in \mathbb{R}$ och några $\phi_1, \ldots, \phi_m \in V^*$, där $m \leq n$.

(d) Visa att talen $s_1, \ldots, s_n$ i deluppgift (c) alltid kan väljas till ± 1. När kan alla väljas till 1?

Egen uppgift 2

Låt V vara ett reellt vektorrum med $\dim(V) = n < \infty$, och låt W beteckna mängden av alla $\mathbb{R}$-linjära avbildningar $V \to \mathbb{C}$, där vi betraktar $\mathbb{C}$ som ett reellt vektorrum.

(a) Om vi definierar $(c\phi)(v) = c\phi(v)$ för $c \in \mathbb{C}$, $\phi \in W$ och $v \in V$, visa att detta gör W till ett komplext vektorrum.

(b) Betrakta det reella vektorrummet $V_{\mathbb{C}} := V \otimes \mathbb{C}$, där $\mathbb{C}$ betraktas som ett reellt vektorrum. Visa att det går att göra $V_{\mathbb{C}}$ till ett komplext vektorrum, på ett sådant sätt att multiplikationen med komplexa skalärer uppfyller $c(v \otimes 1) = v \otimes c$ för $c \in \mathbb{C}$ och $v \in V$.

(c) Visa det finns en unik bilinjär form $B : V_{\mathbb{C}} \times W \to \mathbb{C}$ som uppfyller $B(v \otimes 1, \phi) = \phi(v)$.

(d) Visa att B är ickedegenererad, och dra slutsatsen att $W \cong (V_{\mathbb{C}})^*$.

Egen uppgift 3

Betrakta ett reellt vektorrum V med $\dim(V) = n < \infty$, och antag att $J : V \to V$ är en linjär avbildning som uppfyller $J^2 = -I$.

(a) Visa att V blir ett komplext vektorrum om komplex skalärmultiplikation definieras enligt $(a + bi)v = av + bJv$. Vad säger detta om n?

Vi låter V_J beteckna V betraktat som komplext vektorrum med denna skalärmultiplikation. Ett annat sätt att få ett komplext vektorrum från V är ett betrakta den så kallade *komplexifikationen* $V_{\mathbb{C}} := V \otimes \mathbb{C}$, som vi i uppgift 2 definierade en komplex vektorrumsstruktur på.

(b) Visa att det finns en unik (komplext) linjär avbildning $J_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$ som uppfyller $J_{\mathbb{C}}(v \otimes 1) = Jv \otimes 1$, och att denna uppfyller $J_{\mathbb{C}}^2 = -I : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$.

(c) Visa att $J_{\mathbb{C}}$ är diagonaliserbar med egenvärden $\pm i$, och beskriv egenrummen E_i och E_{-i}.

(d) Visa att V_J är isomorf med egenrummet E_i, och antiisomorf med egenrummet E_{-i}.

Egen uppgift 4

Låt V vara ett ändligdimensionellt reellt inre produktrum, och låt $W \subseteq V$ vara ett delrum. Vidare, låt $\iota : W \to V$ vara inklusionen, det vill säga $\iota(v) = v$ för alla $v \in W$.

(a) Visa att den duala avbildningen $\iota^* : V^* \to W^*$ är surjektiv, och dra slutsatsen att $W^* \cong V^*/W^\circ$, där $W^\circ = \ker(\iota^*)$. Beskriv ι^* och W° explicit.

(b) Betrakta den ortogonala projektionsavbildningen $p := \mathrm{proj}_W : V \to W$. Visa att den duala avbildningen $p^* : W^* \to V^*$ uppfyller $\iota^* \circ p^* = \mathrm{id} : W^* \to W^*$, och därmed ger en isomorfi[1] mellan W^* och delrummet $\mathrm{im}(p^*) \subseteq V^*$. Kan du beskriva explicit vad isomorfin gör?

(c) Visa att $V^* = \mathrm{im}(p^*) \oplus W^\circ$, och dra slutsatsen att

$$V^* \otimes V^* = (\mathrm{im}(p^*) \otimes \mathrm{im}(p^*)) \oplus (W^\circ \otimes \mathrm{im}(p^*)) \oplus (\mathrm{im}(p^*) \otimes W^\circ) \oplus (W^\circ \otimes W^\circ)$$

(d) Inre produkten kan betraktas som ett element $g \in V^* \otimes V^*$. Visa att g ligger i delrummet

$$(\mathrm{im}(p^*) \otimes \mathrm{im}(p^*)) \oplus (W^\circ \otimes W^\circ) \subseteq V^* \otimes V^*.$$

[1] Notera att denna isomorfi beror på valet av inre produkt på V, och att det i allmänhet inte finns någon naturlig sådan isomorfi.

Egen uppgift 5

Antag att V är ett ändligdimensionellt reellt inreproduktrum.

(a) Visa att det finns en linjär avbildning

$$\tau : V^* \otimes V^* \otimes V^* \otimes V^* \to V^* \otimes V^* \otimes V^* \otimes V^*$$

som uppfyller

$$\tau(\phi_1 \otimes \phi_2 \otimes \phi_3 \otimes \phi_4) = \phi_1 \otimes \phi_3 \otimes \phi_2 \otimes \phi_4.$$

(b) Den inre produkten på V kan betraktas som ett element $g \in V^* \otimes V^*$. Visa att elementet

$$\tau(g \otimes g) \in V^* \otimes V^* \otimes V^* \otimes V^* \cong (V \otimes V)^* \otimes (V \otimes V)^*$$

definierar en inre produkt på $V \otimes V$.

(c) Med avseende på denna inre produkt, bestäm ortogonala komplementet till $\mathrm{Sym}^2(V) = \mathrm{span}\{v \otimes v \mid v \in V\}$.

(d) Låt $u \in V$ vara en fix vektor, och visa att det finns en unik linjär avbildning $i_u : V \otimes V \to V$ som uppfyller $i_u(v \otimes w) = \langle u \mid v \rangle\, w$ för alla $v, w \in V$. Bestäm den adjungerade operatorn $i_u^\dagger : V \to V \otimes V$, med avseende på de inre produkterna på V och $V \otimes V$.

Egen uppgift 6

Låt V vara ett reellt inre produktrum med $\dim(V) = 4$, och betrakta tensorprodukten $V^{\otimes 4} = V \otimes V \otimes V \otimes V$.

(a) Visa att det finns linjära avbildningar $L_1, L_2, L_3 : V^{\otimes 4} \to V^{\otimes 4}$ som uppfyller

$$L_1(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 \otimes v_4) = \frac{1}{3}(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 \otimes v_4 + v_2 \otimes v_3 \otimes v_1 \otimes v_4 + v_3 \otimes v_1 \otimes v_2 \otimes v_4),$$

och

$$L_2(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 \otimes v_4) = (v_1 \otimes v_2 + v_2 \otimes v_1) \otimes v_3 \otimes v_4,$$

samt

$$L_3(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 \otimes v_4) = v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 \otimes v_4 - v_3 \otimes v_4 \otimes v_1 \otimes v_2,$$

för alla $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$.

(b) Bestäm dimensionen hos delrummet[2] $\mathcal{C} := \ker(L_1) \cap \ker(L_2) \cap \ker(L_3) \subseteq V^{\otimes 4}$.

(c) Visa att det finns[3] en unik linjär avbildning $r : \mathcal{C} \to V \otimes V$ som uppfyller $r(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 \otimes v_4) = \langle v_2 \mid v_3 \rangle\, v_1 \otimes v_4$ för alla $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$. Bestäm dimensionen hos delrummet[4] $\mathcal{W} := \ker(r) \subseteq \mathcal{C}$.

I uppgift 5 såg vi att en inre produkt på V definierar en inre produkt på $V \otimes V$, och detta ger (som vi har sett innan) en isomorfi $V \otimes V \cong (V \otimes V)^*$. Därmed kan $V^{\otimes 4}$ identifieras med rummet $(V \otimes V)^* \otimes (V \otimes V) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V \otimes V, V \otimes V)$.

(d) Antag att $T \in \mathcal{W} \subseteq V^{\otimes 4}$; enligt diskussionen ovan svarar T mot en linjär avbildning $\tilde{T} : V \otimes V \to V \otimes V$. Visa att $\tilde{T}$ är spårfri (det vill säga $\mathrm{Tr}(\tilde{T}) = 0$) och självadjungerad (med avseende på inre produkten på $V \otimes V$).

Egen uppgift 7

Låt V vara ett reellt ändligdimensionellt inre produktrum med inre produkt $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_V$. Antag att $J : V \to V$ är en linjär avbildning som uppfyller $J^2 = -I$ och $\langle Jv \mid Jw \rangle_V = \langle v \mid w \rangle_V$, det vill säga J är en isometri med avseende på $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_V$.

(a) Om V betraktas som ett komplext vektorrum V_J som i uppgift 3, är $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_V$ då en (komplex) inre produkt på V_J?

(b) Betrakta nu komplexifikationen $V_{\mathbb{C}} = V \otimes \mathbb{C}$, och visa att det finns en unik (komplext) bilinjär form $g_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ som uppfyller $g_{\mathbb{C}}(v \otimes 1, w \otimes 1) = \langle v | w \rangle$ för alla $v, w \in V$.

(c) Från uppgift 3 vet vi att det finns en isomorfi $L_1 : V_J \to E_i \subseteq V_{\mathbb{C}}$ och en antiisomorfi $L_2 : V_J \to E_{-i} \subseteq V_{\mathbb{C}}$, där $E_{\pm i}$ är egenrummen för avbildningen $J_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$ som beskrivs i den uppgiften. Visa att $\langle v \mid w \rangle_{V_J} := g_{\mathbb{C}}(L_1(v), L_2(w))$ definierar en inre produkt på V_J.

(d) Antag att $T : V \to V$ är en (reellt) linjär operator, och att T är en isometri med avseende på den *reella* inre produkten $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_V$, och antag även att T kommuterar med J, $JT = TJ$. Visa att T, betraktad som avbildning $V_J \to V_J$, är en unitär (med avseende på inre produkten $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_{V_J}$) operator.

---

[2] Rummet $\mathcal{C}$ är rummet av så kallade *algebraiska krökningstensorer på V*.

[3] Avbildningen r kallas för *Riccikontraktionen*, och förekommer bland annat i Einsteins fältekvationer inom allmän relativitetsteori.

[4] Rummet $\mathcal{W}$ är rummet av så kallade *algebraiska Weyltensorer på V*. Inom allmän relativitetsteori studerar man *krökningstensorn* R, som är ett element i $V^{\otimes 4}$, där V är ett vektorrum som representerar möjliga riktningar i rumtiden. Krökningstensorn beror i allmänhet på vilken punkt i rumtiden man mäter den i, och är ett så kallat *tensorfält*. I områden med vakuum gäller att $R \in \mathcal{W}$ i alla punkter, och $\mathcal{W}$ beskriver hur gravitationsvågor propagerar genom sådana områden.

SF1681, uppgifter om yttre algebran (extramaterial)

Tidigare års kursomgångar av SF1681 har innefattat *yttre algebran* som moment. Detta moment var ursprungligen planerat att ingå i denna kursomgång, men det har i efterhand beslutats att **materialet om yttre algebran inte kommer examineras (dvs det kommer inte på tentan) i kursomgång HT25**, och att det heller inte kommer ges några föreläsningar om det. När jag fick detta besked hade jag redan förberett detta övningsblad om yttre algebran, som jag publicerar här för dem som är intresserade och vill ha ytterligare material inom linjär algebra utöver kursen.

Yttre algebran gås igenom i förra årets föreläsningsanteckningar av Mats Boij, som ger en kortfattad introduktion till begreppen. Dessa anteckningar ger två ekvivalenta (naturligt isomorfa) definitioner av den yttre algebran: en definition via baser, och en definition som en kvot av tensoralgebran.

Ett annat synsätt på yttre algebran ges i första avsnittet i kapitel 14 i boken *Introduction to Smooth Manifolds* av John M. Lee (tillgänglig gratis för KTH-studenter via KTHB här). I detta avsnitt ges en kortfattad och elegant genomgång av den yttre algebran för ändligdimensionella reella vektorrum, och yttre algebran definieras i termer av alternerande tensorer (vilket inte fungerar över godtyckliga kroppar, men kan vara enklare att förstå). Boken har även en bra genomgång av tensorer och tensorprodukter i de två första avsnitten i kapitel 12, och har även en kortfattad referens/genomgång av grundläggande begrepp i linjär algebra i appendix B. Boken handlar egentligen om differentialtopologi, men just dessa avsnitt är bara linjär algebra och kräver inga förkunskaper inom topologi eller geometri.

För er som kan tyska är också avsnitt 5.1 i dessa föreläsningsanteckningar en bra introduktion till både tensorer och yttre algebran.

Tentamen 2020-01-09, uppgift 3

Låt $V = \mathbb{C}^3$ och låt $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Visa att det finns en unik linjär avbildning $L : \bigwedge^2 V \longrightarrow \mathbb{C}$ sådan att $L(x \wedge y) = x^T A y$ för alla $x, y \in V$.

(b) Bestäm en bas för kärnan till L.

Egen uppgift

Från flervariabelanalysen minns vi att ett *skalärfält* är en C^∞-funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, att ett *vektorfält* är en C^∞-avbildning $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, och att vektorfält kan uttryckas som

$$F(x, y, z) = F_1(x, y, z)\, e_1 + F_2(x, y, z)\, e_2 + F_3(x, y, z)\, e_3,$$

där $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ är standardbasen för $\mathbb{R}^3$, och F_1, F_2, F_3 är reellvärda C^∞-funktioner.

(a) För ett vektorfält F på formen ovan definierar vi en avbildning $dF : \mathbb{R}^3 \to \bigwedge^2(\mathbb{R}^3)$ enligt

$$dF(x, y, z) = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\, e_1 + \frac{\partial F_1}{\partial y}\, e_2 + \frac{\partial F_1}{\partial z}\, e_3\right) \wedge e_1 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\, e_1 + \frac{\partial F_2}{\partial y}\, e_2 + \frac{\partial F_2}{\partial z}\, e_3\right) \wedge e_2 + \left(\frac{\partial F_3}{\partial x}\, e_1 + \frac{\partial F_3}{\partial y}\, e_2 + \frac{\partial F_3}{\partial z}\, e_3\right) \wedge e_3.$$

Om vi fixerar $\mathcal{E}$ som utvald bas har vi Hodge-isomorfin $\star : \bigwedge^2(\mathbb{R}^3) \to \bigwedge^1(\mathbb{R}^3)$, vilket ger upphov till en avbildning $\star dF : \mathbb{R}^3 \to \bigwedge^1(\mathbb{R}^3) \cong \mathbb{R}^3$, alltså ett vektorfält. Skriv upp ett uttryck för detta vektorfält i termer av F. Känner du igen detta från någonstans?

(b) Ett 2-*vektorfält* är en C^∞-avbildning $G : \mathbb{R}^3 \to \bigwedge^2(\mathbb{R}^3)$, och sådana kan uttryckas på formen

$$G(x, y, z) = G_1(x, y, z)\, e_2 \wedge e_3 + G_2(x, y, z)\, e_3 \wedge e_1 + G_3(x, y, z)\, e_1 \wedge e_2,$$

där G_1, G_2, G_3 är reellvärda C^∞-funktioner. För ett 2-vektorfält G definierar vi $dG : \mathbb{R}^3 \to \bigwedge^3(\mathbb{R}^3)$ på liknande sätt som för vektorfält:

$$dG(x, y, z) = \left(\frac{\partial G_1}{\partial x}\, e_1 + \frac{\partial G_1}{\partial y}\, e_2 + \frac{\partial G_1}{\partial z}\, e_3\right) \wedge e_2 \wedge e_3 + \left(\frac{\partial G_2}{\partial x}\, e_1 + \frac{\partial G_2}{\partial y}\, e_2 + \frac{\partial G_2}{\partial z}\, e_3\right) \wedge e_3 \wedge e_1 + \left(\frac{\partial G_3}{\partial x}\, e_1 + \frac{\partial G_3}{\partial y}\, e_2 + \frac{\partial G_3}{\partial z}\, e_3\right) \wedge e_1 \wedge e_2.$$

Likt deluppgift (a) får vi en avbildning $\star dG : \mathbb{R}^3 \to \bigwedge^0(\mathbb{R}^3) \cong \mathbb{R}$, alltså ett skalärfält.

Antag nu att $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \cong \bigwedge^1(\mathbb{R}^3)$ är ett vektorfält, så att $\star F : \mathbb{R}^3 \to \bigwedge^2(\mathbb{R}^3)$ är ett 2-vektorfält. Skriv upp ett uttryck för skalärfältet $\star d(\star F)$ i termer av vektorfältet F. Känner du igen detta från någonstans?

Mer allmänt är ett k-*vektorfält* en C^∞-avbildning $H : \mathbb{R}^3 \to \bigwedge^k(\mathbb{R}^3)$. För ett k-vektorfält H kan ett $(k+1)$-vektorfält dH definieras enligt samma mönster som ovan.

(c) Låt $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ vara ett skalärfält; eftersom $\mathbb{R} \cong \bigwedge^0(\mathbb{R}^3)$ kan vi betrakta f som ett 0-vektorfält. Vi får en avbildning $df : \mathbb{R}^3 \to \bigwedge^1(\mathbb{R}^3) \cong \mathbb{R}^3$, alltså ett vektorfält. Skriv upp ett uttryck för detta vektorfält i termer av f. Känner du igen detta från någonstans?

(d) Det går att visa att $d(dT) = 0$ för alla k-vektorfält T (för alla k). Dessutom går det att visa att om $dT = 0$, så finns ett $(k-1)$-vektorfält S sådant att $T = dS$. Tolka dessa resultat för alla relevanta värden på k, med hjälp av resultaten från de tidigare deluppgifterna.

Uppgift 12. Låt $\mathrm{Alt}^2(V) \subset V \otimes V$ vara de alternerande tensorerna (Definition 2.21). Visa att det finns en naturlig isomorfi $\bigwedge^2 V \cong \mathrm{Alt}^2(V)$.

Uppgift 13. (a) Visa att multiplikationen i Sats 3.27 för $\ell = 1$ motsvarar Laplaceutvecklingen av determinanten av en matris efter en rad eller kolonn.

(b) Visa att multiplikationen i Sats 3.27 för $\ell > 1$ motsvarar en generalisering av Laplaceutvecklingen av determinanten av en matris efter flera rader rad eller flera kolonner.

(c) Skriv upp den explicita Laplaceutvecklingen av en 4×4-determinant efter de två första raderna.

Uppgift 14. Verifiera att det är *kryssprodukten* som fås för $V = \mathbb{R}^3$ med den vanliga inre produkten som indikeras i Exempel 3.28 där vi får multiplikation

$$\wedge \colon V \times V \longrightarrow \bigwedge^2 V \cong V^* \cong V.$$

Uppgift 15. Genomför första steget i beviset av Sats 3.21 explicit för fallen $n = 2$ och $n = 3$, dvs utveckla uttrycken

$$(a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2) \wedge (a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2)$$

och

$$(a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + a_{31}\mathbf{e}_3) \wedge (a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + a_{32}\mathbf{e}_3) \wedge (a_{13}\mathbf{e}_1 + a_{23}\mathbf{e}_2 + a_{33}\mathbf{e}_3).$$

Uppgift 16 (Uppgift 7 på tentamen 2019-01-09)**.** Låt $V = \mathbb{C}^n$ med bas $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Bestäm rangen av den linjära avbildningen

$$L \colon \bigwedge^2 V \longrightarrow \bigwedge^3 V$$

som ges av $L(x) = x \wedge (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \cdots + \mathbf{e}_n)$, för $x \in \bigwedge^2 V$. **(4 p)**

Definition 2.21. Delrummet $\mathrm{Sym}^2(V) \subseteq V \otimes V$ av *symmetriska* tensorer ges av

$$\mathrm{Sym}^2(V) = \mathrm{Span}\{\mathbf{x} \otimes \mathbf{x} \colon \mathbf{x} \in V\}.$$

Delrummet $\mathrm{Alt}^2(V) \subseteq V \otimes V$ av *alternerande* tensorer ges av

$$\mathrm{Alt}^2(V) = \mathrm{Span}\{\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} - \mathbf{y} \otimes \mathbf{x} \colon \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V\}.$$

Sats 3.21. *Om $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ är vektorer i V där $\mathbf{f}_i = \sum a_{ji}\mathbf{e}_j$ är*

$$\mathbf{f}_1 \wedge \mathbf{f}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{f}_n = \det(A)\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_n.$$

Bevis. Genom att utveckla vänsterledet

$$\mathbf{f}_1 \wedge \mathbf{f}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{f}_n = \left(\sum a_{j1}\mathbf{e}_j\right) \wedge \left(\sum a_{j2}\mathbf{e}_j\right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum a_{jn}\mathbf{e}_j\right)$$

får vi n^n termer, men alla termer som innehåller upprepade basvektorer blir noll. Därmed blir det en summa av $n!$ termer där alla är $a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}\mathbf{e}_{i_1} \wedge \mathbf{e}_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_{i_n}$. Enligt ovan kommer tecknet bero på hur många par som står i fel ordning i listan $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ och det är precis så determinanten är definierad. $\square$

Sats 3.27. *Om vi har en volymform ω så är multiplikationen $\bigwedge^\ell V \times \bigwedge^{n-\ell} V \longrightarrow \bigwedge^n V \cong k$ en icke-degenererad[3] bilinjär form och vi kan identifiera*

$$\bigwedge^\ell V \cong \left(\bigwedge^{n-\ell} V\right)^*.$$

Sats 1.14 säger att avbildningen $\flat : V \to V^*$, där $\flat(v) = \langle v|$, är en isomorfi när $\dim(V) < \infty$.

Exempel 3.28. Om V är ett reellt inre produktrum kan vi identifiera V med V^* (via Sats 1.14) och även $(\bigwedge^{n-\ell} V)^*$ med $\bigwedge^{n-\ell} V$. Väljer vi en ortonormal bas och volymformen $\omega = \mathbf{e}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_n$ så ger Sats 3.27 precis Hodge $\star$-isomorfi.

Speciellt, om $V = \mathbb{R}^3$ med den vanliga inre produkten så ger den yttre produkten en multiplikation

$$\wedge \colon V \times V \longrightarrow \bigwedge^2 V \cong V^* \cong V.$$

Denna multiplikation är det vi känner som *vektorprodukt* eller *kryssprodukt*.