

Lösningsförslag till tentamen i SF1683 och SF1629 (del 1)
23 oktober 2017

Tentamen består av sex uppgifter där vardera uppgift ger maximalt fyra poäng.

Preliminära betygsgränser: A–21 poäng, B–19, C–16, D–13, E–11, Fx–10.

Det finns möjlighet att komplettera betyget Fx inom 4 veckor. Kontakta i så fall Maria Saprykina. Inga hjälpmedel är tillåtna vid tentamen.

OBS: För full poäng krävs fullständiga, tydligt presenterade och välmotiverade lösningar som är lätta att följa. Markera dina svar tydligt.

1. Betrakta differentialekvationen

$$\frac{dy}{dt} = y(y - \alpha).$$

a). Bestäm de kritiska punkterna samt rita faslinjen i fallen då $\alpha < 0$, $\alpha = 0$ och $\alpha > 0$.

Lösning. Kritiska punkter:

$$y(y - \alpha) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ eller } y = \alpha.$$

b). Låt $\alpha = 1$. Bestäm explicit den lösning som uppfyller $y(0) = 2$, och ange för vilka positiva t som den är definierad. Bestäm därefter den lösning som uppfyller $y(0) = 1/2$ samt ange för vilka $t > 0$ som den är definierad.

Vilka (vilken) av de två lösningarna ovan är begränsade för alla $t > 0$?

Lösning. Ekvationen är separabel. Vi separerar variablerna och integrerar:

$$t + C = \int \frac{dy}{y(y-1)} = \int \frac{dy}{y-1} - \int \frac{dy}{y} = \ln \left| \frac{y-1}{y} \right|.$$

Detta är ekvivalent med $\left| \frac{y-1}{y} \right| = Ce^t$.

Betrakta lösningen som uppfyller $y(0) = 2$. Vi har $y(0) > 1$ (dvs $y(0)$ ligger i det intervallet där $dy/dt = y(y-1) > 0$). Eftersom systemet är autonom och högerledet $y(y-1)$ är kontinuerligt deriverbar, har vi $y(t) > 2$ för alla $t > 0$. Därför har vi $\left| \frac{y-1}{y} \right| = \frac{y-1}{y}$ för alla $t < 0$. Insättning av begynnelsevärdet ger och $C = 1/2$, och

$$y = \frac{1}{1 - 1/2e^t}.$$

Denna funktion är definierad för $0 \leq t < \ln 2$. Motsvarande lösning är obegränsad (det följer från den explicita formeln eller från faslinjen).

Betrakta lösningen som uppfyller $y(0) = 1/2$. Vi har $0 < y(0) < 1$ ($y(0)$ ligger mellan kritiska punkterna 0 och 1), och därför $0 < y(t) < 1$ för alla $t > 0$. I denna intervall har vi $\left| \frac{y-1}{y} \right| = \frac{1-y}{y}$. Insättning av begynnelsevärdet ger och $C = 1$, och

$$y = \frac{1}{e^t + 1}.$$

Denna funktion är definierad för alla $t > 0$. Motsvarande lösning är begränsad och går mot 0 då $t \rightarrow \infty$ (det följer från den explicita formeln eller från faslinjen).

2. Det är lätt att se att $y(x) = x^3$ är en lösning till ekvationen

$$x^2 y''(x) - xy'(x) - 3y(x) = 0, \quad x > 0,$$

Bestäm den allmänna lösningen till ekvationen

$$x^2 y''(x) - xy'(x) - 3y(x) = 4x^3, \quad x > 0.$$

Lösning. Vi kan använda reduktion av ordning. Då söker vi en lösning på formen $y(x) = x^3 u(x)$. Insättning i ekvationen ger:

$$x^5 u'' + 5u'x^4 = 4x^3.$$

Vi inför en ny variabel $v := u'$. Då $x^5 v' + 5vx^4 = 4x^3$. Observera att detta kan skrivas om:

$$(x^5 v)' = 4x^3 \Leftrightarrow x^5 v = x^4 + C \Leftrightarrow v = \frac{1}{x} + \frac{C}{x^5}$$

Detta ger $u = \ln x + \frac{C_1}{x^4} + C_2$, och

$$y(x) = x^3 u(x) = x^3 \ln x + \frac{C_1}{x} + C_2 x^3.$$

Observera att $y_1 = x^3$ och $y_2 = \frac{1}{x}$ utgör en fundamental lösningsmängd för den homogena ekvationen ovan, eftersom de är lösningar och $W[y_1, y_2] \neq 0$ för $x > 0$ (Verifiera!). Funktionen $y_p(x) = x^3 \ln x$ (som motsvarar $C_1 = C_2$ i formeln ovan) är en partikulär lösning till den inhomogena ekvationen ovan. Därför ges den allmänna lösningen till den inhomogena ekvationen av

$$y(x) = x^3 \ln x + \frac{C_1}{x} + C_2 x^3.$$

3. a). Lös begynnelsevärdesproblemet

2p.

$$X' = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X, \quad X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösning. Matrisen har egenvärden $r_1 = 2$ och $r_2 = 4$ med motsvarande egenvektorer $V_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $V_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Den allmänna lösningen till systemet ges av

$$X(x) = c_1 V_1 e^{r_1 x} + c_2 V_2 e^{r_2 x} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x} + c_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4x}.$$

b). Bestäm den allmänna lösningen till systemet

2p.

$$X' = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} -5x + 2 \\ -x - 3 \end{pmatrix}.$$

Lösning. Vi ansätter en lösning på formen $X = \begin{pmatrix} ax+b \\ cx-d \end{pmatrix}$ och sätter in i systemet. Man får $X_p = \begin{pmatrix} x/4 + 29/16 \\ 5x/4 + 39/16 \end{pmatrix}$. Den allmänna lösningen blir

$$X(x) = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x} + c_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4x} + \begin{pmatrix} x/4 + 29/16 \\ 5x/4 + 39/16 \end{pmatrix}.$$

4. Betrakta systemet

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -ay + ax^3 - x \end{cases}$$

där $a \geq 0$ är en parameter och $x = x(t)$, $y = y(t)$ är beroende variabler. För varje val av $a \geq 0$ klassificera motsvarande kritiska punkter av systemet med avseende på typ av faspotträtt (sadel, nod osv) och stabilitet (stabil, asymptotiskt stabil eller instabil). Man behöver inte ange typ för fallet $a = 2$.

Lösning. De kritiska punkterna ges av

$$\begin{cases} y = 0 \\ ax^3 - x = 0 \end{cases}$$

Om $a = 0$ har vi en kritisk punkt $(0, 0)$. Observera att för $a = 0$ är systemet linjär:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$$

Dess egenvärden är $r_{1,2} = \pm i$ (imaginära). Den kritiska punkten är ett centrum, den är stabil.

Om $a > 0$ har vi tre kritiska punkter: $(0, 0)$, $(\frac{1}{\sqrt{a}}, 0)$ $(-\frac{1}{\sqrt{a}}, 0)$. Jakobianen för systemet har form

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3ax^2 - 1 & -a \end{pmatrix}, \quad J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -a \end{pmatrix}, \quad J(\pm \frac{1}{\sqrt{a}}, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -a \end{pmatrix}.$$

$J(0, 0)$ har egenvärden $r_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}$.

För $0 < a < 2$ är $Im(r_{1,2}) \neq 0$, och $Re(r_{1,2}) = -a < 0$. Kritiska punkten är en stabil spiral.

För $a \geq 2$ är egenvärden reella. Eftersom $\sqrt{a^2 - 4} < a$, har vi $r_{1,2} < 0$. Kritiska punkten är en stabil nod.

Vidare, $J(\pm \frac{1}{\sqrt{a}}, 0)$ har egenvärden $r_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 8}}{2}$. Eftersom $\sqrt{a^2 + 8} > a$, har vi att $r_{1,2}$ har olika tecken. Kritiska punkten är en sadel (instabil).

5. Bestäm rekursionsrelationen för potensserielösningen till Legendres ekvation

$$(1 - x^2)y''(x) - 2xy'(x) + 20y(x) = 0$$

kring punkten $x = 0$.

Bestäm den lösning som uppfyller $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Lösning. Beteckna $P(x) = 1 - x^2$. Eftersom alla koefficienter i den linjära ekvationen ovan är analytiska i en omgivning av origo, och $P(0) \neq 0$, är origo en ordinär punkt för ekvationen. Vi söker en lösning på formen $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Derivering ger:

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n.$$

Insättning ger:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ((n+2)(n+1) a_{n+2} - n(n-1) a_n - 2n a_n + 20 a_n) x^n = 0$$

Denna serie är identiskt lika med 0 om och endast om alla koefficienter är lika med 0. Vi får rekursionsrelationen

$$a_{n+2} = \frac{n^2 + n - 20}{(n+2)(n+1)} a_n = \frac{(n+5)(n-4)}{(n+2)(n+1)} a_n.$$

Villkoret $y(0) = 1$ ger $a_0 = 1$, villkoret $y'(0) = 0$ ger $a_1 = 0$. Rekurrensrelationerna ger: $a_3 = a_5 = \dots = a_{2n+1} = 0$, och

$$a_2 = -10, \quad a_4 = \frac{35}{3}, \quad a_6 = a_8 = \dots = a_{2n} = 0.$$

Alltså, lösningen till begynnelsevärdesproblemet ovan är

$$y(x) = 1 - 10x^2 + \frac{35}{3}x^4.$$

6. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska. Fullständig motivering krävs! Varje korrekt delsvar ger 1p.

a). Lösningar $y_1 = 2e^t + e^{2t}$ och $y_2 = 2e^t + 3e^{3t}$ bildar en fundamental lösningsmängd för ekvationen

$$y''(t) - 5y'(t) + 6y(t) = 4e^t.$$

Lösning. Falskt! Ekvationen är linjär inhomogen, och har därför ingen fundamental lösningsmängd. (Detta begrepp har ingen mening eftersom en linjär kombination av två lösningar behöver inte vara lösning. Till exempel, $y_1 - y_2$ är inte en lösning till ekvationen ovan.

b). Om X_0 är en instabil kritisk punkt till systemet

$$X' = f(X),$$

så för varje $\epsilon > 0$ finns det ett $\delta > 0$ sådan att för varje lösning $X = X(t)$ som uppfyller $|X(0) - X_0| < \delta$ gäller att $|X(t) - X_0| > \epsilon$ för alla tillräckligt stora $t > 0$.

Lösning. Falskt! Om X_0 är en instabil kritisk punkt till systemet ovan, så finns det en $\epsilon > 0$ sådan att för varje $\delta > 0$ finns en lösning $X = X(t)$ som uppfyller $|X(0) - X_0| < \delta$ men $|X(t) - X_0| > \epsilon$ för något $t > 0$.

Man kan också säga så här: Instabilitet behöver inte medföra att alla lösningar som startar nära 0 lämnar en fixerad omgivning. Betrakta systemet $\frac{dx}{dt} = x$, $\frac{dy}{dt} = -y$. Origo är en sadelpunkt, alltså instabil. Tag ett $\epsilon > 0$. Vilken är $\delta > 0$ vi tar, så finns det alltid en lösning (till exempel, med begynnelsevärden $x(0) = 0$, $y(0) = \delta/2$) som konvergerar mot 0 då $t \rightarrow \infty$.

c). För varje kontinuerlig funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ så gäller det att om y_1 och y_2 är lösningar till

$$\frac{dy}{dt}(t) = f(t)y(t)$$

(definierade på $\mathbb{R}$), så är $y_3 = y_1 y_2$ en lösning till $\frac{dy}{dt}(t) = f(t)y(t)$.

Lösning. Falskt! Låt $y_3 = y_1 y_2$. Då gäller för alla t att

$$y_3' = (y_1 y_2)' = y_1' y_2 + y_1 y_2' = 2f y_1 y_2 = 2f y_3.$$

Men om y_3 är en lösning, så måste $y_3' = f y_3$ för alla t . Vi ser att y_3 är en lösning om $f(t)y_3(t) = 2f(t)y_3(t)$ för alla t . Detta krav är inte uppfyllt för alla f och alla lösningar.

Man kan också svara med ett explicit motexempel.

d). Det finns en kontinuerligt deriverbar funktion f sådan att ekvationen

$$\frac{dy}{dt}(t) = f(y(t))$$

har en kontinuerligt deriverbar lösning $y(t)$ definierad på ett öppet intervall I med egenskap att $y'(t_1) < 0$ och $y'(t_2) > 0$ för några $t_1, t_2 \in I$.

Lösning. Falskt! Antag motsatsen: att det finns en kontinuerligt deriverbar lösning $y(t)$ definierad på ett öppet intervall I med egenskap att $y'(t_1) < 0$ och $y'(t_2) > 0$ för några $t_1, t_2 \in I$.

Eftersom både funktionen $f(y)$ och lösningen $y(t)$ är kontinuerliga, så är sammansättningen $f(y(t))$ kontinuerlig. Eftersom $f(y(t_1)) = y'(t_1) < 0$ och $f(y(t_2)) = y'(t_2) > 0$, så finns det en punkt t_0 mellan t_1 och t_2 där $f(y(t_0)) = 0$. Men ekvationen är autonom, och $f(y(t_0)) = 0$ medför att $y(t) = y(t_0)$ för alla $t \in I$ är (ekvilibrum) lösning.

Eftersom f är kontinuerligt deriverbar, kan entydighetssatsen tillämpas. Denna medför att ekvilibrumlösningen $y(t) = y(t_0)$ för alla $t \in I$ är den enda lösningen som uppfyller $y(t) = y(t_0)$. Men för ekvilibrumlösningen har vi $y'(t_1) = y'(t_2) = 0$, vilket strider mot antagandet.

Lösningsförslag till tentamen i SF1683 och SF1629 (del 1)
18 december 2017

Tentamen består av sex uppgifter där vardera uppgift ger maximalt fyra poäng.

Preliminära betygsgränser: A–21 poäng, B–19, C–16, D–13, E–11, Fx–10.

Det finns möjlighet att komplettera betyget Fx inom 4 veckor. Kontakta i så fall Maria Saprykina.

OBS: För full poäng krävs fullständiga, tydligt presenterade och välmotiverade lösningar som är lätta att följa. Markera dina svar tydligt.

1. Betrakta differentialekvationen

$$xy' - y = \frac{1}{y}.$$

a). Bestäm den lösning till differentialekvationen som uppfyller $y(1) = -2$. Bestäm lösningens existensintervall.

Lösning. Ekvationen kan skrivas om som

$$xy' = \frac{y^2 + 1}{y}.$$

Den är separabel, och för $x \neq 0$ är den ekvivalent med

$$\int \frac{y dy}{y^2 + 1} = \int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln(y^2 + 1) = \ln|x| + C_1 \Leftrightarrow (y^2 + 1)^{1/2} = C_2|x|,$$

där $C_2 = e^{C_1} > 0$. Eftersom begynnelsevärdet är angivet i $x = 1 > 0$, betraktar vi intervallet $x > 0$ (och här $x = |x|$). Vi får lösningar $y = \sqrt{Cx^2 - 1}$ eller $y = -\sqrt{Cx^2 - 1}$.

Begynnelsevärdet ger: $-2 = -\sqrt{C - 1} \Leftrightarrow C = 5$. Lösningen till begynnelsevärdesproblemet är $y = -\sqrt{5x^2 - 1}$. Den är definierad för alla $x > \frac{1}{\sqrt{5}}$.

b). Kan man hitta en lösning $y = \phi(x)$, $x > 0$, till differentialekvationen ovan samt positiva tal x_1, x_2 sådana att $\phi(x_1) < 0$ and $\phi(x_2) > 0$?

Lösning. Antag att $x_1 < x_2$. För $x > 0$ har vi $y' = \frac{y^2 + 1}{xy}$, dvs $y'(x)$ har samma tecken som y . Om $y = \phi(x_1) < 0$, så är $\phi(x)$ avtagande, och därför måste vi ha $\phi(x_2) < \phi(x_1) < 0$. Svaret är Nej.

2. Det är lätt att se att $y(x) = x^2$ är en lösning till ekvationen

$$2x^2y''(x) - xy'(x) - 2y(x) = 0, \quad x > 0,$$

Bestäm den allmänna lösningen till ekvationen

$$2x^2y''(x) - xy'(x) - 2y(x) = 13x^6, \quad x > 0.$$

Lösning. Beteckna $y_1(x) = x^2$. Vi kan använda reduktion av ordning och söka lösningen på formen $y(x) = y_1(x)u(x)$. Vi deriverar ansatsen och sätter in i ekvationen. Efter förenkling får vi:

$$7x^3u'(x) + 2x^4u''(x) = 13x^6 \Leftrightarrow u''(x) + \frac{7}{2x}u'(x) = \frac{13}{2}x^2.$$

Låt $v(x) = u'(x)$. Då får vi en första ordningens ekvation

$$v'(x) + \frac{7}{2x}v(x) = \frac{13}{2}x^2.$$

Multiplicerar med integrerande faktor $x^{7/2}$:

$$(vx^{7/2})' = \frac{13}{2}x^2x^{7/2} = \frac{13}{2}x^{11/2}.$$

Integrering ger:

$$vx^{7/2} = x^{13/2} + C \Leftrightarrow u' = v = x^3 + Cx^{-7/2} \Leftrightarrow u(x) = \frac{1}{4}x^4 + C_1x^{-5/2} + C_2.$$

Den ursprungliga ekvationen har lösningar

$$y(x) = y_1(x)u(x) = C_1x^{-1/2} + C_2x^2 + \frac{1}{4}x^6.$$

Denna formel beskriver den allmänna lösningen till den ursprungliga ekvationen. Motiverig är följande:

Den allmänna lösningen till en inhomogen linjär ekvation är summa av en lösning till denna ekvation och den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvationen.

Både $y_1 = x^2$ och $y_2 = x^{-1/2}$ är lösningar till den homogena ekvationen. De utgör en fundamental lösningsmängd för den homogena ekvationen eftersom

$$W[y_1, y_2] \neq 0 \quad \text{för } x > 0.$$

(Verifiera!) Funktionen $y_p(x) = \frac{1}{4}x^6$ är en lösning till den ursprungliga inhomogena ekvationen.

3. a). Lös begynnelsevärdesproblemet

$$X' = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X, \quad X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b). Skissa några lösningskurvor i en omgivning av origo.

Lösning. Systemets matris har komplexa egenvärden $r_1 = -1 + i$ och $r_2 = -1 - i$. En egenvektor motsvarande $r_1 = -1 + i$ är $V_1 = \begin{pmatrix} 1-i \\ -1 \end{pmatrix}$. En komplex lösning är

$$Z(t) = e^{(-1+i)t} \begin{pmatrix} 1-i \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Eftersom systemets matris är reell, och $r_1 \neq r_2$, vet vi att real- och imaginärdel av $Z(t)$ är två linjärt oberoende lösningar. Dessa ges av

$$X_1(t) := \operatorname{Re}(Z(t)) = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}, \quad X_2(t) := \operatorname{Im}(Z(t)) = e^{-t} \begin{pmatrix} -\cos t + \sin t \\ -\sin t \end{pmatrix}.$$

Den allmänna lösningen ges av $X(t) = c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t)$.

Begynnelsevärdet ger:

$$X(0) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow c_1 = -1, c_2 = -2,$$

och lösningen till begynnelsevärdesproblemet ges av

$$X(t) = -e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} - 2e^{-t} \begin{pmatrix} -\cos t + \sin t \\ -\sin t \end{pmatrix}.$$

b). Eftersom matrisen har komplexa egenvärden med negativ realdel, är lösningskurvorna spiraller riktade mot origo. De roterar "moturs". För att inse det, skissa en riktningsvektor, t.ex., i punkt $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Denna vektor är $X' = AX = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4. (SF1629) Bestäm $y(t)$ då

$$y(t) + 2 \int_0^t \cos(t-u)y(u)du = 1, \quad t \geq 0.$$

Ange även $y(0)$.

Lösning. Observera att integralen ovan kan tolkas som faltning: $(\cos u * y(u))$. Vi laplacetransformerar ekvationen (betecknar $Y(s) := \mathcal{L}[y](s)$):

$$Y(s) + 2 \frac{s}{s^2 + 1} Y(s) = \frac{1}{s}.$$

Vi löser ut $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{s^2 + 1}{s(s+1)^2}.$$

Partialbråksuppdelning ger:

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{(s+1)^2}.$$

Inverstransformering ger

$$y(t) = 1 - 2te^{-t}.$$

$y(0)$ kan bestämmas från den ursprungliga ekvationen: $y(0) = 1$. Detta stämmer överens med lösningen.

4. (SF1683) Använd en lämplig Lyapunov funktion för att avgöra om kritiska punkten $(0, 0)$ för systemet

$$\begin{cases} x' = 2y - x^3 \\ y' = -x - y^3 \end{cases}$$

är stabil, asymptotiskt stabil eller instabil. Tips: Sök en Lyapunov funktion på formen $V(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ med lämpliga konstanter a, b, c . Formulera den sats du använder, motivera alla steg.

Lösning. Antag att ett autonomt system

$$\begin{cases} x' = F(x, y) \\ y' = G(x, y) \end{cases}$$

där $(x, y) = (x(t), y(t))$ har en isolerad kritisk punkt i origo. Antag att det finns en funktion $V(x, y)$ som är kontinuerlig med kontinuerliga första partiella derivator och positivt definit, samt att funktionen

$$W(x, y) = \frac{\partial V}{\partial x} F(x, y) + \frac{\partial V}{\partial y} G(x, y)$$

är negativt definit i en omgivning av origo. Då är origo en asymptotiskt stabil fixpunkt (se Theorem 9.6.1 i boken).

Vi söker Lyapunov funktion på formen $V(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Låt $(x(t), y(t))$ vara en lösning till systemet.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x(t), y(t)) &= \frac{\partial V}{\partial x} x' + \frac{\partial V}{\partial y} y' = (2ax + by)(2y - x^3) + (bx + 2cy)(-x - y^3) \\ &= (4a - 2c)xy - 2ax^4 - 2cy^4 + 2by^2 - byx^3 - bx^2 - bxy^3 \end{aligned}$$

Låt oss välja $b = 0$, $a = 1$, $c = 2a = 2$. Då är funktionen $V(x, y) = x^2 + 2y^2$ positivt definit (dvs $V(x, y) > 0$ för alla $(x, y) \neq (0, 0)$), och $\frac{d}{dt} V(x(t), y(t)) = -2x^4 - 4y^4$ negativt definit. Lyapunovs sats innebär att kritiska punkten $(0, 0)$ är asymptotiskt stabil.

5. Betrakta Bessels ekvation:

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + x^2 y(x) = 0.$$

a). Visa att 0 är en reguljär singulär punkt.

b). Bestäm en potensserielösning $y(x)$ som uppfyller $y(0) = 1$.

Lösning. Vår ekvation har form $P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = 0$ där $P(x)$, $Q(x)$ och $R(x)$ är analytiska funktioner. Eftersom $P(0) = 0$, är $x = 0$ en singulär punkt. Eftersom både $x \frac{Q(x)}{P(x)} = 1$ och $x^2 \frac{R(x)}{P(x)} = x^2$ har ändliga gränsvärden då $x \rightarrow 0$, är detta en reguljär singulär punkt.

Vi gör ansats för en lösning: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ där r och a_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ sökes, och $a_0 \neq 0$.

Vi behöver uttrycket $x^2 y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+2} = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n+r}$.

Deriverar ansatsen och sätter in i ekvationen:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1}, & y''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2} \\ \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r} &+ \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n+r} &= 0 \end{aligned}$$

Jämför koefficienter vid x^{n+r} för $n = 0, 1, 2, \dots$. För $n = 0$ har vi: $r^2 a_0 = 0$. Eftersom $a_0 \neq 0$ enligt antagandet, har vi $r = 0$ (dvs indexekvationen har en dubbelrot $r = 0$).

Vidare, $n = 1$ (och $r = 0$) ger $a_1 = 0$, och för $n = 2, 3 \dots$ har vi

$$n_2 a_n = -a_{n-2}.$$

Med hjälp av induktionsprincipen visar man att för $n = 0, 1, 2, \dots$

$$a_{2n+1} = 0, \quad a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2^n n!)^2} a_0.$$

och vi får lösningar $y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2^n n!)^2} x^{2n}$.

Vi har $y(0) = a_0$. Den lösning som uppfyller $y(0) = 1$ är $y(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n (n!)^2} x^{2n}$.

6. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska. Fullständig motivering krävs! Varje korrekt delsvar ger 1p.

a). Ekvationen

$$y'(x) = \sin y(x) + 2$$

har en begränsad lösning.

Lösning. Falskt. Eftersom $\sin y(x) \geq -1$ för alla $x \in \mathbb{R}$, har vi $y'(x) \geq 1$ för alla $x \in \mathbb{R}$. Därför kan begränsade lösningar inte finnas.

b). Begynnelsevärdesproblemet

$$e^x \frac{dy}{dx} = e^{y^2} \cdot \sin x - \frac{1}{y^2 + 1}, \quad y(0) = 0$$

har en unik lösning definierad i en omgivning av origo.

Lösning. Sannt. Ekvationen har form $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, där $f(x, y) = e^{-x} e^{y^2} \cdot \sin x - e^{-x} \frac{1}{y^2 + 1}$. Observera att både $f(x, y)$ och $\frac{d}{dy} f(x, y)$ är kontinuerliga i en omgivning av origo (faktiskt, för alla (x, y)). Satsen om existens och entydighet av lösningar medför nu att begynnelsevärdesproblemet ovan har en unik lösning definierad i en omgivning av origo.

c). Låt f och g vara två kontinuerliga funktioner från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$. Om ϕ_1 och ϕ_2 är lösningar till

$$\frac{d\phi}{dt}(t) = f(t)\phi(t) + g(t),$$

(definierade på $\mathbb{R}$) så är även $3\phi_1 - 2\phi_2$ en lösning till samma ekvation.

Lösning. Sannt. Låt $y_p(x)$ vara en lösning till ekvationen ovan, och $y_h(x)$ vara en icke-trivial lösning till den homogena ekvationen $\frac{d\phi}{dt}(t) = f(t)\phi(t)$. Varje lösning till den ursprungliga ekvationen har form

$$\phi(x) = c y_h(x) + y_p(x),$$

och alla uttryck av denna form är lösningar till ekvationen. Vidare, låt $\phi_i(x) = c_i y_h(x) + y_p(x)$, $i = 1, 2$, vara de givna lösningarna. Då är

$$3\phi_1 - 2\phi_2 = 3(c_1 y_h(x) + y_p(x)) - 2(c_2 y_h(x) + y_p(x)) = (3c_1 - 2c_2) y_h(x) + y_p(x)$$

har samma form, och är därför en lösning till ekvationen.

d). Det finns ett $\delta > 0$ sådant att om $|a| < \delta$, så uppfyller lösningen $x = \phi(t)$ till begynnelsevärdesproblemet

$$x'' + 2x' - 3(x')^2 + x - 2x^3 = 0, \quad x(0) = a, \quad x'(0) = 0$$

att $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = 0$.

Lösning. Sannt. Detta problem handlar om stabilitet. Skriv om ekvationen som system: låt $y := x'$. Då $y' = x''$, och vi får systemet

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -2y + 3y^2 - x + 2x^3. \end{cases}$$

Vi linjäriserar systemet i origo. Det linjäriserade systemet har form $X' = AX$ där

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Matrisen A har egenvärden $r_1 = r_2 = -1 < 0$. Detta medför att det ursprungliga systemet är asymptotiskt stabil. Därför finns det $\delta > 0$ sådant att om $(x(0)^2 + y^2(0))^{1/2} < \delta$, så $(x(t), y(t)) \rightarrow (0, 0)$ då $t \rightarrow \infty$. Detta medför påståendet ovan som specialfall.

Tentamen

**Differentialekvationer och transformmetoder, del 1, SF1683,
och Differentialekvationer och transformer II, del 1, SF1629.
Måndagen den 22:a oktober 2018 kl. 8.00–12.00**

Inga hjälpmedel är tillåtna (ej heller miniräknare).

Råd för att undvika poängavdrag: Skriv lösningar med fullständiga meningar och utförliga motiveringar.

Betygsgränser inklusive bonuspoäng: E 12, D 14, C 16, B 19 och A 21 poäng.

Del A, som består av de fyra första uppgifterna, ger maximalt 16 poäng inklusive bonuspoäng.

Minst 10 poäng, men ej godkänt, ger resultat Fx, som innebär rätt till komplettering.

Det finns två alternativa uppgifter 5; bara en av dem får lämnas in.

1.(4p) En bagare, med en gammaldags ugn, behöver uppskatta tiden det tar att baka ett stort bröd. Bagaren bestämmer baktiden till den tid det tar att nå temperaturen 98 grader i brödets centrum. Bagaren använder en förenklad modell, nämligen att temperaturändringen per tidsenhet i brödets centrum är proportionell mot differensen av ugnens temperatur och brödets centrumtemperatur. Ugnens temperatur är konstant 200 grader. Brödets centrumtemperatur är 25 grader när bakningen börjar. Efter 7 minuter har temperaturen i brödets centrum stigit till 35 grader. Hur lång baktid ger en korrekt uppskattning med bagarens förenklade modell?

Låt $T(t)$ vara temperaturen i centrum av brödet vid tiden t . Vi har enligt förutsättningarna

$$\frac{dT(t)}{dt} = k(T^* - T(t))$$

där $T^* = 200$, $T(0) = 25$ och $T(7) = 35$. Denna ekvation är separabel och vi har

$$\int \frac{dT}{T^* - T} = \int k dt = kt + C$$

som har lösningen $\ln \frac{1}{T^* - T} = kt + C$ för en godtycklig konstant C . Vi har två konstanter k och C som bestäms av $T(0) = T_0 = 25$ och $T(7) = T_1 = 35$. Låt $t_1 = 7$. Vi får $C = \ln \frac{1}{T^* - T_0}$ och $\ln \frac{T^* - T_0}{T^* - T_1} = kt_1$. Vi söker t_s så att $T(t_s) = T_s = 98$ och får svaret

$$t_s = t_1 \frac{\ln \frac{T^* - T_0}{T^* - T_s}}{\ln \frac{T^* - T_0}{T^* - T_1}} = 7 \frac{\ln \frac{175}{102}}{\ln \frac{175}{165}}.$$

2.(4p) Antag att temperaturen $T(x)$ i position x i en stav uppfyller differentialekvationen

$$(1+x)T''(x) + T'(x) = 1, \quad 0 < x < 1,$$

med randvärdena $T(0) = 1$ och $T(1) = 3$. Bestäm funktionen T , som är kontinuerlig på $[0, 1]$ och två gånger deriverbar på $(0, 1)$.

Vi ser att $((1+x)T')' = (1+x)T'' + T'$ (eller alternativt att $T'' + \frac{1}{1+x}T' = \frac{1}{1+x}$ har integrerande faktorn $e^{\ln(1+x)} = 1+x$, d.v.s. $((1+x)T')' = 1$). Integration ger $(1+x)T'(x) = x + C$ och

$$T' = \frac{x+C}{x+1} = \frac{x+1+C'}{1+x} = 1 + \frac{C'}{1+x},$$

så $T(x) = x + C' \ln(1+x) + D$ för godtyckliga konstanter C' och D . Randvillkoren ger

$$1 = T(0) = D$$

$$3 = T(1) = 1 + C' \ln 2 + 1$$

Svar: $T(x) = 1 + x + \frac{\ln(1+x)}{\ln 2}$.

3.(4p) Bestäm den allmänna lösningen till systemet av differentialekvationer

$$x'(t) = 2x(t) + 3y(t) - 7,$$

$$y'(t) = -x(t) - 2y(t) + 5.$$

Låt $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$. Den homogena lösningen till $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ bestäms av egenvärdena r och egenvektorena ξ till A . Vi har

$$0 = \det \begin{bmatrix} 2-r & 3 \\ -1 & -2-r \end{bmatrix} = -(2-r)(2+r) + 3 = r^2 - 4 + 3 = r^2 - 1$$

så $r = \pm 1$. Låt $\xi = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$. Egenvektorn som hör till $r = 1$ uppfyller

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

som ger $a + 3b = 0$ och en egenvektor $\xi = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$. Det andra egenvärdet ger

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

så $a + b = 0$ och $\xi = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Vi får den allmänna homogena lösningen

$$\mathbf{x}_h(t) = c_1 e^t \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ansatsen $\mathbf{x}_p = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ ger $\mathbf{x}'_p = 0$ och

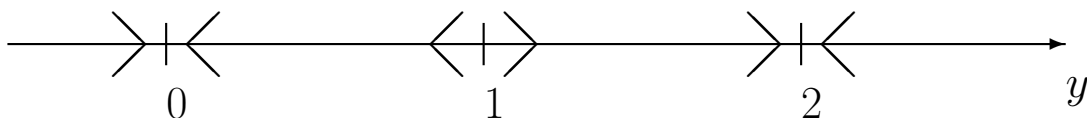
$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

vars lösning är $\beta = 3$ och $\alpha = -1$. Svar: $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 e^t \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$, där c_1 och c_2 är godtyckliga reella konstanter.

4. (4p) Betrakta differentialekvationen

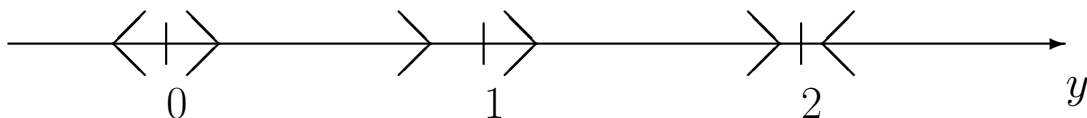
$$y'(x) = f(y(x)), \quad x \geq 0.$$

a. Bestäm en funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ så att fasporträttet för $y : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ges av Figur 1, där $y = 0$, $y = 1$ och $y = 2$ är jämviktslösningar.



Figur 1: Fasporträtt för $y' = f(y)$.

b. Bestäm en funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ så att fasporträttet för $y : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ges av Figur 2, där $y = 0$, $y = 1$ och $y = 2$ är jämviktslösningar.



Figur 2: Fasporträtt för $y' = f(y)$.

a. Fasporträttet visar att y är växande för $y < 0$, avtagande för $0 < y < 1$, växande för $1 < y < 2$ och avtagande för $y > 2$, så funktionen f är positiv för $y < 0$, noll för $y = 0$, negativ för $0 < y < 1$, noll för $y = 1$, positiv för $1 < y < 2$, noll för $y = 2$ och negativ för $y > 2$. Detta kan åstakommas med t.ex. ett polynom av grad tre med nollställena i 0, 1 och 2, nämligen $f(y) = -y(y-1)(y-2)$.

b. Fasporträttet visar att y är avtagande för $y < 0$, växande för $0 < y < 1$, växande för $1 < y < 2$ och avtagande för $y > 2$, så funktionen f är negativ för $y < 0$, noll för $y = 0$, positiv för $0 < y < 1$, noll för $y = 1$, positiv för $1 < y < 2$, noll för $y = 2$ och negativ för $y > 2$. Kring jämviktspunkterna $y = 0$ och $y = 2$ byter f tecken men kring jämviktspunkten $y = 1$ skall f inte byta tecken och uppfylla $f(2) = 0$ eftersom $y = 2$ är en jämviktslösning. Detta kan lösas med ett dubbelt nollställe i $y = 1$. Detta kan åstakommas med t.ex. ett polynom av grad fyra med nollställena i 0, 1 och 2, nämligen $f(y) = -y(y-1)^2(y-2)$.

5. (4p) Låt $u : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ och $v : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ vara lösningar till systemet av differentialekvationer

$$(1) \quad \begin{aligned} u'(t) &= u(t) + v(t) - u(t)(u^2(t) + v^2(t)), \quad t \geq 0 \\ v'(t) &= -u(t) + v(t) - v(t)(u^2(t) + v^2(t)), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

a. Avgör stabilitet eller instabilitet av jämviktsläget $u = v = 0$.

b. Låt $E(t) = u^2(t) + v^2(t)$. Bestäm en differentialekvation för $E(t)$ och visa att $E'(t) = 0$, för $t > 0$, om $E(0) = 1$.

c. Bestäm till ekvationen för E i uppgift 5b alla jämviktspunkter för E samt deras karaktär.

a. Låt $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$ och $\mathbf{f}(u, v) = \begin{bmatrix} u + v - u(u^2 + v^2) \\ -u + v - v(u^2 + v^2) \end{bmatrix}$. Vi får $\mathbf{f}(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ och Jacobianen

$$\mathbf{f}'(u, v) = \begin{bmatrix} 1 - 3u^2 - v^2 & 1 - 2uv \\ -1 - 2uv & 1 - 3v^2 - u^2 \end{bmatrix}$$

så

$$\mathbf{f}'(0, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Denna matris har egenvärden r som uppfyller

$$0 = \det \begin{bmatrix} 1-r & 1 \\ -1 & 1-r \end{bmatrix} = (1-r)^2 + 1$$

vilket ger $r = 1 \pm i$. Vi ser att det linjariserade problemets jämviktsläget $(0, 0)$ är en instabil spiral, eftersom realdelen av egenvärdena är positiva och imaginärdelen är skild från noll. Svar: Eftersom minst ett (här alla) egenvärde (för den kritiska punkten $(0, 0)$) har positiv realdel har även det icke-linjära problemet en instabil jämviktspunkt i $(0, 0)$.

b. Låt $E(t) = u^2(t) + v^2(t)$. Vi får

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E(t) &= 2(u'u + v'v) \\ &= 2(u + v - u(u^2 + v^2))u + 2(-u + v - v(u^2 + v^2))v \\ &= 2(u^2 + v^2 - (u^2 + v^2)^2) \\ &= 2(E(t) - E^2(t)).\end{aligned}$$

c. Vi ser att $E = 0$ och $E = 1$ är jämviktslägen för $E'(t) = 2(E(t) - (E(t))^2) =: g(E(t))$, $t > 0$. Vi får $g'(E) = 2(1 - 2E)$ och $g'(1) = -2$ och $g'(0) = 2$. Jämviktsläget $E = 0$ är därför instabilt och $E = 1$ är asymptotiskt stabilt.

Alternativ uppgift 5.(4p) Formulera och bevisa en sats om asymptotisk stabilitet för skalära differentialekvationer $y'(t) = g(y(t))$ med $g'(y_1) < 0$ i en jämviktspunkt y_1 .

6. (4p) Anta att spridningen av en sjukdom för $t \geq 0$ beskrivs av

$$(2) \quad \begin{aligned}u'(t) &= -au(t)v(t), \\ v'(t) &= au(t)v(t) - bv(t),\end{aligned}$$

där $v(t)$ är antalet sjuka, i tusental, vid tiden t och $u(t)$ är antalet friska (som ej varit sjuka) i tusental vid tiden t . Den positiva konstanten $b > 0$ anger takten att bli immun och den positiva konstanten a anger smittotakten.

Bestäm det maximala antalet sjuka, d.v.s. $\max\{v(t) : t \geq 0\}$, för givna godtyckliga värden $a, b, u(0) > b/a$ och $v(0) > 0$.

Låt $\bar{v}(u(t)) = v(t)$. Fasplansmetoden ger att

$$\frac{d\bar{v}}{du} = \frac{\frac{dv}{dt}}{\frac{du}{dt}} = \frac{v(au - b)}{-auv} = \frac{b}{au} - 1$$

och integration visar att

$$\bar{v}(u) = -u + \frac{b}{a} \ln u + C,$$

där C är en godtycklig konstant. Konstanten C bestäms av begynnelsevillkoret $C = v(0) + u(0) - \frac{b}{a} \ln u(0)$ vilket ger

$$(3) \quad \bar{v}(u) = -u + \frac{b}{a} \ln u + v(0) + u(0) - \frac{b}{a} \ln u(0) = v(0) + u(0) - u - \frac{b}{a} \ln \frac{u(0)}{u}.$$

Vi ser att $\bar{v}''(u) = -\frac{b}{au^2} < 0$, så $\bar{v}$ är konkav med $\lim_{u \rightarrow 0+} \bar{v}(u) = \lim_{u \rightarrow \infty} \bar{v}(u) = -\infty$. Vi söker $\max_{u \geq 0} \bar{v}(u)$. Maximum kan ej vara för $u = 0$ eller när $u \rightarrow \infty$ eftersom $\bar{v} \rightarrow -\infty$ då. Det finns

därför precis en punkt $u_* \in (0, \infty)$ som maximerar $\bar{v}(u)$. Vi får $0 = \frac{dv(u_*)}{du_*} = -1 + \frac{b}{au_*}$, som ger $u_* = b/a$. Eftersom $u' = -auv < 0$ är u avtagande och $u_* = b/a$ kan antas vid någon tid. Sambandet (3) ger nu svaret: $\max_{t>0} v(t) = v(0) + u(0) - \frac{b}{a}(1 + \ln \frac{u(0)}{b/a})$. Vi kan studera värdemängden $\{u(t) : t > 0\}$. Vi ser att $u(t)$ är avtagande eftersom $u' = -auv < 0$. Om $(u(t), v(t)) \rightarrow (u_\infty, v_\infty)$ när $t \rightarrow \infty$ är (u_∞, v_∞) en jämviktspunkt till (2). Dessa ges av $v = 0$ och u godtycklig. Vi får $\{u(t) : t > 0\} = (u_-, u(0))$, där $u_- < b/a$ löser $\bar{v}(u_-) = 0$.

Tentamen

**Differentialekvationer och transformmetoder, del 1, SF1683,
och Differentialekvationer och transformer II, del 1, SF1629.
Måndagen den 17:e december 2018 kl. 8.00–12.00**

Inga hjälpmedel är tillåtna (ej heller miniräknare).

Råd för att undvika poängavdrag: Skriv lösningar med fullständiga meningar och utförliga motiveringar.

Betygsgränser inklusive bonuspoäng: E 12, D 14, C 16, B 19 och A 21 poäng.

Del A, som består av de fyra första uppgifterna, ger maximalt 16 poäng inklusive bonuspoäng.

Minst 10 poäng, men ej godkänt, ger resultat Fx, som innebär rätt till komplettering.

Det finns två alternativa uppgifter 2; bara en av dem får lämnas in.

1. (4p) Vid tiden $t = 0$ innehåller en tank 100 liter vatten i vilket 500 gram salt är löst. Genom ett rör fylls tanken med 1 liter saltvatten per minut, som har koncentrationen 10 gram per liter. Genom ett annat rör töms den väl omrörda saltlösningen i tanken med samma flöde 1 liter per minut. Bestäm saltkoncentrationen som funktion av tiden $t \geq 0$. Ange speciellt vad koncentrationen blir när $t \rightarrow \infty$.

Låt $x(t)$ vara antalet gram salt i tanken vid tiden t . Koncentrationen blir då $x(t)/100$ gram per liter. Tanken tillförs 10 gram salt per minut och töms med $x(t)/100$ gram per minut. Vi får då ekvationen

$$x'(t) = 10 - \frac{x(t)}{100}.$$

Ekvationen kan lösas med integrerande faktor, som separabel ekvation eller med homogen och partikulär lösning. En partikulär lösning är $x_p = 1000$ och den homogena lösningen blir $x_h(t) = ce^{-t/100}$. Vi får $x(t) = 1000 + ce^{-t/100}$ och begynnelsevärdet $x(0) = 500$ ger $x(t) = 1000 - 500e^{-t/100}$. Koncentrationen vid tiden t är $\frac{x(t)}{100} = 10 - 5e^{-t/100}$ gram per liter med gränsvärdet 10 när $t \rightarrow \infty$, d.v.s. efter lång tid närmar sig tankkoncentrationen inflödets koncentration.

2. (4p) Bestäm en potensserie, $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, som uppfyller differentialekvationen

$$\begin{aligned} y''(x) - xy'(x) - y(x) &= 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ y(0) &= 1, \quad y'(0) = 0, \end{aligned}$$

och avgör seriens konvergensradie.

Vi får

$$\begin{aligned}y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \\y'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \\y''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.\end{aligned}$$

Detta ger

$$\begin{aligned}y''(x) - xy'(x) - y(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\&= 2a_2 - a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} ((n+2)(n+1)a_{n+2} - (n+1)a_n) x^n,\end{aligned}$$

vilket medför

$$\begin{aligned}2a_2 - a_0 &= 0, \\a_{n+2}(n+2)(n+1) - a_n(n+1) &= 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots\end{aligned}$$

Vi får $a_0 = y(0) = 1$ och $a_1 = y'(0) = 0$ och $a_{n+2} = a_n/(n+2)$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Detta implicerar $a_{2k+1} = 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$, och $a_2 = 1/2$, $a_4 = a_2/4 = a_0/(2^2 \cdot 1 \cdot 2)$, $a_6 = a_4/6 = a_0/(2^3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3)$, vilket ger

$$a_{2k} = \frac{a_0}{2^k k!},$$

och svaret $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2^k k!}$.

Vi har

$$\frac{a_{2k+2}}{a_{2k}} = \frac{1}{(k+1)2} \rightarrow 0 \quad \text{när } k \rightarrow \infty$$

så

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{2k+2} x^{2k+2}}{a_{2k} x^{2k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(k+1)2} = 0$$

för alla $x \in \mathbb{R}$, så kvotkriteriet visar att seriens konvergensradie är oändlig.

Alternativ uppgift 2. (4p) Visa att lösningen till differentialekvation $x'(t) = f(x(t))$ med givet begynnelsevärde $x(0) = x_0$ är entydig om f är Lipschitzkontinuerlig.

3. (4p) Bestäm den allmänna lösningen till systemet av differentialekvationer

$$\begin{aligned}x'(t) &= 4x(t) - 3y(t), \\y'(t) &= 8x(t) - 6y(t), \\z'(t) &= 3z(t).\end{aligned}$$

Vi ser att x och y inte beror på z och z beror inte på x och y . Funktionen z kan därför lösas oberoende av x och y : integrerande faktor eller karakteristiska ekvationen ger $z(t) = c_1 e^{3t}$. Låt $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{bmatrix}$. Lösningen till $\frac{d}{dt}[x, y]^T = A[x, y]^T$, där T betyder transponat, kan bestämas med hjälp av egenvärdena r och egenvektorerna ξ till A :

$$0 = \det \begin{bmatrix} 4-r & -3 \\ 8 & -6-r \end{bmatrix} = (4-r)(-6-r) + 24 = r^2 + r(6-4) = r(r+2)$$

så $r = 0$ och $r = -2$. Låt $\xi = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$. Egenvektorn som hör till $r = 0$ uppfyller

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

som ger $4a - 3b = 0$ och en egenvektor $\xi = \begin{bmatrix} 1 \\ 4/3 \end{bmatrix}$. Det andra egenvärdet ger

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 8 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

så $2a - b = 0$ och $\xi = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Vi får den allmänna lösningen

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{3t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{4}{3} \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

där c_1, c_2, c_3 är godtyckliga reella konstanter.

4. (4p) Antag att positionen $x(t) \in \mathbb{R}$, vid tiden t , av en icke linjär fjäder uppfyller differentialekvationen

$$x''(t) + \frac{e^{x(t)} - e^{-x(t)}}{2} = 0, \quad t \geq 0.$$

- Bestäm alla jämviktslägen (d.v.s. kritiska punkter) för $x(t)$.
- Avgör för varje jämviktsläge om det är stabilt eller instabilt.
- Om $x(0) = 0$ och $x'(0) = 1$, vad blir den maximal positionen $\max_{t \geq 0} x(t)$?

Låt $y(t) = x'(t)$, vilket ger

$$(1) \quad \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t) \\ -\sinh x(t) \end{bmatrix}.$$

Jämviktslägen (x, y) uppfyller $y = 0$ och $\sinh x = 0$, som ger $(x, y) = (0, 0)$. Jacobianen blir

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cosh x & 0 \end{bmatrix}$$

som för $(x, y) = (0, 0)$ har egenvärdena r där

$$0 = \det \begin{bmatrix} -r & 1 \\ -\cosh 0 & -r \end{bmatrix} = r^2 + 1$$

vilket ger $r = \pm i$. Eftersom realdelen av egenvärdena är noll ger den linjariserade stabilitetsanalysen inte någon utsaga för det icke-linjära problemet (1). Fasplansmetoden med $\bar{y}(x(t)) = y(t)$ ger

$$(2) \quad \frac{d\bar{y}}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{-\sinh x}{\bar{y}(x)}$$

som har separabel lösning

$$\int \bar{y} d\bar{y} = - \int \sinh x dx$$

och

$$(3) \quad \frac{\bar{y}^2}{2} + \cosh x = C$$

där C är en konstant. Detta ger $\bar{y} = \pm \sqrt{2(C - \cosh x)}$. Vi ser att $\bar{y}$ är en jämn funktion, dvs $\bar{y}(x) = \bar{y}(-x)$ och (2) ger

$$\bar{y}'(x) = -\frac{\sinh x}{\bar{y}(x)}$$

så $\bar{y}$ är därför avtagande för $\bar{y} > 0$ och $x > 0$ medan funktionen $\bar{y}$ är växande om $\bar{y} < 0$ och $x > 0$. Vi ser då att $\bar{y}(x) = \sqrt{2(C - \cosh x)}$ och $\bar{y}(x) = -\sqrt{2(C - \cosh x)}$ bildar slutna banor för $C > 1$ och för små värden av $C - 1 > 0$ har vi cirkelapproximationen

$$\frac{\bar{y}^2}{2} + \frac{x^2}{2} \simeq C - 1.$$

Den maximal positionen x_{max} med $x(0) = 0$ och $x'(0) = 1$ fås med hjälp av (3) när $\bar{y} = 0$ så

$$\cosh x_{max} = \frac{1}{2} + \cosh 0 = \frac{3}{2}$$

dvs $x_{max} = (\cosh)^{-1}(\frac{3}{2})$.

5. (4p) Bestäm alla funktioner $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ med kontinuerlig andraderivata som löser differentialekvationen

$$(y'(x))^2 + (y(x))^2 = 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Vi får

$$(4) \quad y'(x) = \pm \sqrt{1 - y^2(x)}$$

som har jämviktslösningarna $y(x) = \pm 1$. Om $-1 < y(x) < 1$ får vi i fallet + i (4) den separabla ekvationen:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \int dx$$

som ger $\arcsin y(x) = x + c_+$, där c_+ är en konstant och $|x + c_+| \leq \pi/2$. Inversen medför $y(x) = \sin(x + c_+)$. På samma sätt ger $y'(x) = -\sqrt{1 - y^2(x)}$ att $y(x) = \sin(c_- - x)$ där c_- är en konstant och $|c_- - x| \leq \pi/2$. Vi noterar att $\sqrt{1 - y^2}$ inte är Lipschitzkontinuerlig kring $y = 1$; men för $|y| < \alpha < 1$ är $\sqrt{1 - y^2}$ Lipschitzkontinuerlig så när $|y| < \alpha < 1$ finns en entydig lösning till begynnelsevärdesproblemet $y' = \sqrt{1 - y^2}$, $y(0) = y_0$, så länge $|y(x)| < \alpha < 1$. När $x + c_+ \rightarrow \frac{\pi}{2}-$ har vi $y(x) \rightarrow 1-$ och $y''(x) = -\sin(x + c_+) \rightarrow -1$. Eftersom y'' är kontinuerlig blir y strängt avtagande för $\frac{\pi}{2} < x + c_+ < 3\pi/2$ och $y(x) = \sin(\pi - (x + c_+)) = \sin(x + c_+)$, dvs $c_- = \pi - c_+$. På samma sätt har vi $y(x) = \sin(x + c_+)$ när $x + c_+ \rightarrow -\pi/2$, så $y(x) = \sin(x + c_+)$ för $-\pi + c_+ \leq x \leq \pi + c_+$. Eftersom sinusfunktionen är periodisk med period 2π får vi svaret: De två gånger deriverbara lösningarna ges av de tre uttrycken

$$\begin{aligned} y(x) &= 1, & x \in \mathbb{R}, \\ y(x) &= -1, & x \in \mathbb{R}, \\ y(x) &= \sin(x + c), & x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

för alla reella konstanter c .

Om uppgiften istället varit att bestämma alla lösningar med kontinuerlig derivata finns många fler lösningar, t.ex.

$$y(x) = \begin{cases} \sin x & x \leq \pi/2, \\ 1 & x > \pi/2. \end{cases}$$

En alternativ lösning är att derivera ekvationen som ger $0 = 2y'(y'' + y)$, dvs. $y' = 0$ eller $y'' + y = 0$. Här använder vi att y har kontinuerlig andraderivata. Vi får från $y' = 0$ lösningarna $y = C$, för konstant C , och ursprungsekvationen ger att bara $y = \pm 1$ är lösningar. Den andra ekvationen $y'' + y = 0$ kan lösas med karakteristiska ekvationen, som ger $y(x) = a \sin x + b \cos x$ för godtyckliga konstanter a, b . Insatt i den ursprungliga ekvationen får vi villkoret

$$1 = (a \cos x - b \sin x)^2 + (a \sin x + b \cos x)^2 = a^2 + b^2$$

som kan skrivas $y(x) = \sin(x + c)$ för en godtycklig reell konstant c .

6. (4p) Antag att $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är två gånger deriverbar och strängt konvex, d.v.s. det finns en konstant c så att $\min\{f''(y) \mid y \in \mathbb{R}\} > c > 0$. Ekvationen

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial f(u(x, t))}{\partial x} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

är en model för kompressibel strömning. Ekvationen har lösningar på formen

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \varphi(x - st), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ \lim_{\xi \rightarrow \infty} \varphi(\xi) &= \varphi_+, \\ \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \varphi(\xi) &= \varphi_-, \\ \lim_{\xi \rightarrow \infty} \varphi'(\xi) &= 0, \\ \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \varphi'(\xi) &= 0, \end{aligned}$$

där s, φ_+, φ_- är reellvärda konstanter. Dessa lösningar φ kallas vågor.

- Bestäm vågens fart s , som funktion av f och $\varphi_{\pm}$, då $\varphi_- > \varphi_+$.
- Visa att ingen våglösning φ finns då $\varphi_- < \varphi_+$.
- Visa att det finns en våglösning φ då $\varphi_- > \varphi_+$.

Insättning i ekvationen ger

$$-s\varphi'(x - st) + f'(\varphi(x - st))\varphi'(x - st) = \varphi''(x - st).$$

Låt $\xi = x - st$. Integrera för att få

$$-s\varphi(\xi) + f(\varphi(\xi)) = \varphi'(\xi) + C$$

där C är en godtycklig konstant. Randvillkoren ger när $\xi \rightarrow \infty$

$$C = -s\varphi_+ + f(\varphi_+)$$

och när $\xi \rightarrow -\infty$

$$-s\varphi_- + f(\varphi_-) = -s\varphi_+ + f(\varphi_+).$$

a. Svar: $s = \frac{f(\varphi_+) - f(\varphi_-)}{\varphi_+ - \varphi_-}$.

Vi får

$$(5) \quad \varphi'(\xi) = f(\varphi(\xi)) - f(\varphi_+) - \frac{f(\varphi_+) - f(\varphi_-)}{\varphi_+ - \varphi_-}(\varphi(\xi) - \varphi_+) =: F(\varphi(\xi)).$$

Vi ser att $F(\varphi_{\pm}) = 0$, d.v.s. φ_+ och φ_- är jämviktspunkter. Funktionen F är strängt konvex, ty

$$F''(\varphi) = f''(\varphi) > c > 0.$$

Detta medför att $F(\varphi) < 0$ för φ mellan φ_- och φ_+ .

Svar b: Vi får då att $\varphi' = F(\varphi) < 0$, d.v.s. φ är avtagande och $\varphi_- < \varphi_+$ blir omöjligt.

c. Ekvation (5) är separabel och definierar därmed φ implicit som funktion av $\xi = x - st$ enligt

$$\xi = \int_{\bar{\varphi}}^{\varphi} \frac{dp}{F(p)}$$

där $\bar{\varphi}$ är en konstant mellan φ_- och φ_+ , t.ex. $\bar{\varphi} = (\varphi_+ + \varphi_-)/2$. Eftersom $F(p) < 0$ för $\varphi_+ < p < \varphi_-$ och F är kontinuerlig är integralen väldefinierad.

Det återstår att verifiera gränsvärdena $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \varphi(\xi) = \varphi_{\pm}$. Vi vet att $F(\varphi_{\pm}) = 0$ och F är strängt konvex, så F har en unik minimipunkt p_0 där $F(p_0) = \min_{\varphi_+ \leq p \leq \varphi_-} F(p)$. Vi får

$$F'(\varphi) - \underbrace{F'(p_0)}_{=0} = \underbrace{F''(p')}_{>c}(\varphi - p_0)$$

för något p' mellan φ och p_0 , vilket medför att

$$F'(\varphi_+) < 0,$$

$$F'(\varphi_-) > 0.$$

Jämviktsläget φ_+ är då asymptotiskt stabilt framåt, d.v.s. $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \varphi(\xi) = \varphi_+$, och jämviktsläget φ_- är instabilt framåt och asymptotiskt stabilt bakåt så $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \varphi(\xi) = \varphi_-$.



Tentamen 2019-10-21, 8:00-12:00

Institutionen för Matematik

SF1683 Differentialekvationer och transformeringar

Läsåret 2019/2020

Examinator: John Andersson

Endast skrivdon (penna, linjal, gradskiva et.c.) är tillåtna. Specifikt så är miniräknare och formelsamling inte tillåtna.

Motivera alla dina lösningar om inget annat anges.

Uppgift 1. I den här uppgiften betraktar vi följande differentialekvation

$$(1) \quad y'(x) = \pm(y(x) - a)(y(x) - b).$$

a) Välj $a, b \in \mathbb{R}$ samt tecknet plus eller minus i (1) så att lösningen uppfyller $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 1$ om $y(0) > -2$ och $y(x) \rightarrow -\infty$ för alla lösningar så att $y(0) < -2$.

[2 poäng]

b) Med a och b samt tecken $\pm$ som i föregående deluppgift beräkna lösningen som uppfyller $y(0) = -5$.

[2 poäng]

Uppgift 2. I den här uppgiften betraktar vi systemet av differentialekvationer

$$(2) \quad \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}.$$

a) Välj $a \in \mathbb{R}$ så att differentialekvationen i (2) har ett center i origo.

[2 poäng]

b) Hitta lösningen till (2), med a som i föregående deluppgift, som uppfyller

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

[2 poäng]

Uppgift 3. En lösning till

$$(3) \quad y''(t) - (2t + 2)y'(t) + 2y(t) = 0$$

ges av $y_1(t) = t + 1$. Hitta den lösning som uppfyller $y(0) = 1$ samt $y'(0) = -1$. Din lösning får innehålla en oberäknad integral.

[4 poäng]

Var god vänd!

Uppgift 4. Gör ansättningen att en lösning till

$$(4) \quad y''(x) + (x-1)y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-1)^n,$$

med initialdata $y(1) = A$ och $y'(1) = B$, är på formen $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$.

a) Beräkna värdena för a_0 , a_1 samt a_2 i termer av A , B och b_n .

[1 poäng]

b) Härled den rekursiva relationen för a_n , $n \geq 2$. D.v.s. hitta en formel för att beräkna a_n , $n \geq 2$, i termer av a_{n-1} , a_{n-2} , ..., a_0 samt $b_0, b_1, b_2, \dots$

[3 poäng]

Uppgift 5. Hitta den allmänna lösningen, för $t > 0$, till följande system

$$(5) \quad \begin{bmatrix} tx'(t) \\ t^2y''(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}.$$

LEDTRÅD: Ansätt att lösningen har någon "naturlig" form som vi gör för andra ordningens ekvationer med konstanta koefficienter och för Eulers ekvationer. Det räcker (vilket du inte behöver bevisa) med att du hittar tre oberoende lösningar.

[4 poäng]

Uppgift 6.

a) I beviset av existens och entydighet för ekvationer av första ordningen:

$$(6) \quad y'(x) = F(x, y(x)) \quad \text{och} \quad y(x_0) = y_0$$

så skapar man en följd av approximativa lösningar $y_0(x), y_1(x), \dots, y_k(x), \dots$. Ange hur man ansätter $y_0(x)$ och hur man definierar $y_{k+1}(x)$ utifrån $y_k(x)$. Ingen motivering krävs.

b) Låt $\phi(t)$ vara en deriverbar funktion så att $y_1(t) = \phi(t)$ och $y_2(t) = t\phi(t)$ är lösningar till

$$(7) \quad y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = 0.$$

Vilket villkor på $\phi(t)$ garanterar att vi kan skriva lösningen (i en omgivning av $t = 3$) till (7), med givna initialdata $y(3) = A$ och $y'(3) = B$, som $y(t) = ay_1(t) + by_2(t)$ för $a, b \in \mathbb{R}$.

c) Antag att $\mathbf{x}^1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} te^t$ är en lösning till

$$(8) \quad \mathbf{x}'(t) = P(t)\mathbf{x}(t).$$

Hur många lösningar, $\mathbf{x}(t)$, till (8) existerar det som uppfyller (för något t_0)

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{x}(t_0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}?$$

d) Antag att $\phi(t) > 0$ är en funktion så att $y_1(t) = \phi(t)$ och $y_2(t) = \frac{1}{2}\phi^2(t)$ är lösningar till

$$(9) \quad y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = 0.$$

Vad är $q(t)$?

[1 poäng per delfråga.]

Lycka till!



Tentamen 2019-12-16, 8:00-12:00

Institutionen för Matematik

SF1629 Differentialekvationer och transformer Ten1

16e December 2019

Examinator: John Andersson

Endast skrivdon (penna, linjal, gradskiva et.c.) är tillåtna. Specifikt så är miniräknare och formelsamling inte tillåtna.

Motivera alla dina lösningar om inget annat anges.

Preliminära betygsgränser: E: 12p, D: 14p, C: 16p, B: 19p, A: 21p.

Del 1.

Uppgift 1. I den här uppgiften betraktar vi ekvationssystemet

$$(1) \quad \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}.$$

a) Hitta lösningen som uppfyller

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

[2 poäng]

b) Gör en tydlig skiss av fasporträttet. Ingen motivering krävs.

[1 poäng]

c) Klassificera den kritiska punkten (d.v.s. ange om det är en nod, en spiral, ett center et.c. samt ange om den är stabil eller instabil). Ingen motivering krävs.

[1 poäng]

Uppgift 2 a). Hitta en lösning på serieform som uppfyller

$$x^2 y''(x) + x y'(x) + x^2 y(x) = 0,$$

$$y(0) = 1 \text{ samt } y'(0) = 0.$$

[2 poäng]

b) Hitta den lösning till

$$x^2 y''(x) + x y'(x) + y(x) = 0$$

som uppfyllet $y(1) = 0$ och $y'(1) = 1$. Din lösning skall inte vara på serieform.

[2 poäng]

Var god vänd!

Uppgift 3. Givet att $y_1(t) = t$ och $y_2(t) = t \ln(t)$ är oberoende lösningar till

$$t^2 y''(t) - t y'(t) + y(t) = 0$$

använd variation av parametrar för att hitta lösningen till följande initialvärdesproblem

$$\begin{aligned} t^2 y''(t) - t y'(t) + y(t) &= \frac{3}{t} \quad \text{för } t > 0 \\ y(1) &= 0 \text{ och } y'(1) = 2. \end{aligned}$$

[4 poäng]

Uppgift 4. Hitta den lösning till

$$2 \cos(x)(x + y) + \sin(x) + \sin(x)y'(x) = 0$$

som uppfyller $y(\pi/2) = 0$.

LEDTRÅD: Är, eller kan du göra, ekvationen exakt?

[4 poäng]

Del 2.

Uppgift 5. Låt $r^2 = (x + y)^2 + 4(x - y)^2$ och betrakta systemet

$$\begin{aligned} (2) \quad x'(t) &= (3x - 5y) + (1 - r^2)(5x - 3y) \\ y'(t) &= (5x - 3y) + (1 - r^2)(-3x + 5y). \end{aligned}$$

a) Visa att det existerar ett $M > 0$ så att för varje $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ så existerar det ett $T > 0$ så att lösningen till (2) som uppfyller initialdata

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

uppfyller

$$\sqrt{x^2(t) + y^2(t)} < M \text{ för alla } t > T.$$

[2 poäng]

b) Hitta attraktionspolen till systemet (2).

[2 poäng]

Var god vänd!

Uppgift 6.

a) Givet en matris $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ som har två reella egenvärden $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ och två kontinuerligt deriverbara funktioner $f(x)$ och $g(x)$.

Argumentera för eller emot att det finns en lösning till följande ekvationssystem

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x) \\ g(x) \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{bmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

I ditt argument får du inte använda några existensbevis för system av ekvationer - du får dock hänvisa till existensbevis för differentialekvationer.

[2 poäng]

b) Låt $F(x, y)$ vara en given kontinuerligt deriverbar funktion och antag att $y_1(x) = e^{-x^2}$ är en lösning på $\mathbb{R}$ till differentialekvationen

$$y'(x) = F(x, y).$$

Konstruera en lösning $y(x)$, eller visa att ingen lösning existerar, så att $y(0) = -1$ och $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) > 0$.

[1 poäng]

c) Låt $y(t)$ vara en lösning till

$$y'(t) = \arctan(y(t)) \quad \text{och} \quad y(0) = a > 0.$$

Beräkna $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{t}$.

[1 poäng]

Lycka till!



Tentamen SF1683, 2020-10-20, 8:00-12:00

Institutionen för Matematik

SF1683 Differentialekvationer och transformier Ten1

20e Oktober 2020

Examinator: John Andersson

Endast skrivdon (penna, linjal, gradskiva et.c.) är tillåtna. Specifikt så är miniräknare och formelsamling **inte** tillåtna.

Motivera alla dina lösningar om inget annat anges.

Preliminära betygsgränser: FX: 11, E: 12p, D: 14p, C: 16p, B: 19p, A: 21p.

Del 1.

Uppgift 1. a) Lös följande initialvärdesproblem:

$$\begin{aligned}y'(x) &= \frac{x^3}{y^3(1+x^4)} \\ y(0) &= 1.\end{aligned}$$

[2 poäng]

b) Skissa ett fasporträtt till

$$y'(t) = y(t)(y(t) - 1)(y(t) + 1),$$

och avgör om ekvationens kritiska punkter är stabila, instabila eller semistabila.

[2 poäng]

Uppgift 2 . I den här uppgiften studerar vi följande differentialekvation

$$y''(t) - 2ay'(t) + a^2y(t) = 0,$$

där $a \in \mathbb{R}$ är en given konstant.

a) Använd det karakteristiska polynomet till ekvationen för att hitta en homogen lösning $y_1(t)$.

[1 poäng]

b) Använd reduktion av ordning för att hitta den andra homogena lösningen $y_2(t)$.

[2 poäng]

c) Visa att $\{y_1, y_2\}$ är en fundamental mängd av lösningar till ekvationen.

[1 poäng]

Var god vänd!

Uppgift 3. I den här uppgiften betraktar vi följande differentialekvation i en omgivning kring punkten $x = 1$:

$$xy''(x) + \ln(x)y(x) = 0.$$

a) Hitta två linjärt oberoende lösningar y_1 och y_2 på serieform. Du skall beräkna koefficienterna upp till och med tredje ordningen (d.v.s. upp till koefficienten framför x^3 termen) samt ange den rekursiva ekvationen för att beräkna övriga koefficienter.

[3 poäng]

b) Använd dina lösningar från a) för att lösa initialvärdesproblemet med initialdata $y(1) = 1$ och $y'(1) = 2$. Ange konvergensradien för din lösning.

[1 poäng]

Uppgift 4. En fundamental mängd av lösningar till

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 2/t & -1/t \\ 3/t & -2/t \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \quad \text{för } t > 0$$

ges av

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} t \text{ och } \mathbf{x}_2(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} t^{-1}.$$

Använd detta och variation av parametrar för att hitta en partikulärlösning, för $t > 0$, till

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 2/t & -1/t \\ 3/t & -2/t \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix}.$$

[4 poäng]

Var god vänd!

Del 2.

Uppgift 5. Skissa ett fasporträtt till systemet

$$\begin{aligned}x'(t) &= y(t)^2 - x(t) \\ y'(t) &= 2 - x(t) - y(t).\end{aligned}$$

För full poäng så skall:

- i) Alla kritiska punkter noga markeras.
- ii) Flödeslinjerna skall vara extra noga inritade kring de kritiska punkterna (det ska gå att se vilken typ av kritisk punkt det rör sig om, sadelpunkt, stabil/instabil nod, spiral et.c.).
- iii) De områden av planet där $x', y' > 0$, $x', y' < 0$, $x' > 0$ och $y' < 0$ samt $x' < 0$ och $y' > 0$ skall vara noga utmärkta.

För övrigt så skall fasporträttet vara väsentligen rätt med flera (och representativa) flödeslinjer inritade. Full poäng kommer att kunna ges även om porträttet har vissa mindre felaktigheter så länge porträttet i stort sätt är rätt ritat.

[4 poäng]

Uppgift 6. Betrakta initialvärdesproblemet

$$\begin{aligned}y'(t) &= f(t, y) \\ y(0) &= 1,\end{aligned}$$

där $f(t, y)$ är en given funktion som är kontinuerligt deriverbar för alla t och y .

a) Gör en ansättning $y_0(t)$ och skriv ner en iterativ algoritm, såsom i beviset för existens av lösningar, för hur man kan beräkna en approximativ lösning $y_{k+1}(t)$ utifrån $y_k(t)$ så att följderna $\{y_k\}_{k=0}^\infty$ konvergerar till en lösning. Du behöver inte bevisa att y_k konvergerar utan endast skriva ner din ansättning av y_0 samt hur y_{k+1} beräknas ur y_k .

[1 poäng]

b) Antag att $f(t, y) = \frac{1}{10} \arctan(ty)$ och låt $y_e(t)$ vara den exakta lösningen. Hitta ett $k \geq 0$ så att du kan vara säker på att

$$|y_e(1/2) - y_k(1/2)| \leq 10^{-6}.$$

Fullständig motivering krävs.

[3 poäng]

Lycka till!



Tentamen SF1683, 2020-12-14, 8:00-12:00

Institutionen för Matematik

SF1683 Differentialekvationer och transformers Ten1

14e December 2020

Examinator: John Andersson

Endast skrivdon (penna, linjal, gradskiva et.c.) är tillåtna. Specifikt så är miniräknare och formelsamling **inte** tillåtna.

Motivera alla dina lösningar om inget annat anges.

Preliminära betygsgränser: FX: 11, E: 12p, D: 14p, C: 16p, B: 19p, A: 21p.

Del 1.

Uppgift 1. a) Lös följande initialvärdesproblem

$$\begin{aligned}y'(t) + \sin(2t)y(t) &= 3\sin(2t) \\ y(1) &= 0.\end{aligned}$$

[2 poäng]

b) Avgör om följande differentialekvation är exakt

$$\begin{aligned}\frac{y^2}{x} + 2x + (2y \ln(x) + 4y) y'(x) &= 0 \\ y(2) &= 2.\end{aligned}$$

Om ekvationen är exakt hitta en lösning. Om lösningen kan skrivas på explicit form så skall den skrivas på explicit form, annars så skall den skrivas på implicit form.

[2 poäng]

Uppgift 2. Givet att $y_1(t) = t$ och $y_2(t) = te^t$ är homogena lösningar till

$$t^2 y''(t) - t(t+2)y'(t) + (t+2)y(t) = 0$$

använd variation av parametrar för att hitta en lösning till följande initialvärdesproblem

$$\begin{aligned}t^2 y''(t) - t(t+2)y'(t) + (t+2)y(t) &= t^3 \\ y(1) = y'(1) &= 0.\end{aligned}$$

[4 poäng]

Var god vänd!

Uppgift 3. I den här uppgiften betraktar vi följande differentialekvation:

$$(1) \quad (x-3)y''(x) + (x-5)y'(x) + \frac{5}{4(x-3)}y(x) = 0.$$

a) Hitta ekvationens singulära punkter.

[1 poäng]

b) Avgör om dessa punkter är reguljärt singulära.

[1 poäng]

c) För varje reguljär singulär punkt x_0 skriv ner de första tre termerna i en icke-trivial serielösning till (1), i ett litet område $x_0 < x < x_0 + h$, som uppfyller $y(x_0) = 0$ och $y'(x_0) = 0$.

[2 poäng]

Uppgift 4. a) Välj $\alpha \in \mathbb{R}$ så att systemet

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\alpha \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

har en spiral i origo.

[3 poäng]

b) Skissa ett fasporträtt för systemet, med det α du valde i uppgift a). Var noga med att indikera om lösningskurvorna går medurs eller moturs.

[1 poäng]

Var god vänd!

Del 2.

Uppgift 5. En fysiker vet att positionen av en viss partikel i planet vid tiden t befinner sig i punkten

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

uppfyller följande differentialekvation

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ -\alpha & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

där α är en okänd parameter som uppfyller $\alpha \geq 0$.

Fysikern gör två mätningar:

i) Då $t = 0$ så är partikelns position $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

ii) Då $t = \ln(2)$ så är partikelns avstånd till y -axeln mindre än (eller lika med) 1.

Hitta en undre begränsning α_0 så att fysikern kan dra slutsatsen att $\alpha \geq \alpha_0$. För full poäng så måste α_0 vara optimal (d.v.s. så stor som möjligt).

[4 poäng]

Uppgift 6. a) En kropp som i tiden t befinner sig i punkten $x(t)$ längs x -axeln uppfyller följande differentialekvation

$$(2) \quad \begin{aligned} x''(t) - 2x'(t) - 3x(t) &= f(t) \\ x(0) &= x'(0). \end{aligned}$$

där $f(t)$ är en kraft som verkar på kroppen.

Skriv ner lösningsformeln till (2). Ingen motivering krävs.

[1 poäng]

En vetenskapsman är intresserad av ett liknande problem, men istället för en kraft som verkar på kroppen så träffas kroppen i tiden $t = k\delta$, för $k \in \mathbb{N}$ och $\delta > 0$, av en partikel med rörelsemängden $f(k\delta)$, där $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ är en given kontinuerlig funktion.

Under dessa förutsättningar så kommer lösningen $y(t)$ till vetenskapsmannens problem att uppfylla

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k(t)$$

där $y_k(t)$ uppfyller följande

$$y_k(t) = 0 \text{ för } t \leq k\delta$$

och för $t > k\delta$ så

$$\begin{aligned} y_k''(t) - 2y_k'(t) - 3y_k(t) &= 0 \\ y_k(k\delta) &= 0 \\ y_k'(k\delta) &= \delta f(k\delta). \end{aligned}$$

b) Skriv ner en formel för att räkna ut $y(t)$ givet som bara beror på δ och f .

[1 poäng]

c) Om vi skriver $y_\delta(t)$ för lösningen för ett visst $\delta > 0$. Härled en formel för $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} y_\delta(t)$.

Jämför din formel från c) med din lösningsformel för $x(t)$ från a). Kan du dra några fysikaliska slutsatser?

[2 poäng]

Lycka till!



SF1683 Differentialekvationer och transformmetoder, del 1
Tentamen
Tisdag den 26 oktober 2021

Skrivtid: 08:00-12:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: Mattias Dahl

Tentamen består av sex uppgifter uppdelade i två delar. Del I utgörs av de fyra första uppgifterna som testar förmågan att lösa grundläggande problem. Del II utgörs av de två sista uppgifterna och testar förmågan att lösa mer avancerade problem som även kan vara av teoretisk karaktär och är avsedda främst för högre betyg. Varje uppgift ger maximalt fyra poäng. Bonuspoäng från inlämningsuppgifterna adderas till erhållna poäng på del I upp till maximalt 16 poäng.

Betygsgränserna vid tentamen ges av följande tabell.

Fx	E	D	C	B	A
11	12	14	16	19	21

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Lös följande initialvärdesproblem och bestäm lösningarnas existensintervall.

(a) $(1 - t^2)y' + 4ty = 9t(1 - t^2)^{-1}$, $y(2) = 4$.

(b) $y' = (1 + y^2)t$, $y(0) = 1$.

(4 p)

2. För vilka värden på parametern $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, har initialvärdesproblemet

$$9y''(t) + a^2y(t) = \sin(2t), \quad y(0) = 0, y'(0) = 0,$$

en obegränsad lösning? Bestäm lösningarna i dessa fall.

(4 p)

3. Hitta den allmänna lösningen till det homogena systemet

$$t\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t), \quad t > 0,$$

1

genom en ansats av typen $\mathbf{x}(t) = t^r \xi$, där r är ett tal och ξ är en vektor. Motivera varför du har hittat den allmänna lösningen till systemet. Lös därefter initialvärdesproblemet

$$t\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 2\cos t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(\pi) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(4 p)

4. Utslagsvinkeln θ för en viss pendel uppfyller differentialekvationen

$$\theta''(t) = -10 \sin \theta(t) - 2\theta'(t), \quad t \geq 0.$$

Sätt $\psi(t) = \theta'(t)$ och hitta ett första ordningens system

$$\begin{pmatrix} \theta \\ \psi \end{pmatrix}' = \mathbf{f} \begin{pmatrix} \theta \\ \psi \end{pmatrix}$$

för $(\theta(t), \psi(t))$. Vilka punkter i $\theta\psi$ -planet svarar mot lösningar där pendeln står still? Bestäm linjäriseringen till systemet i dessa punkter. Vilken typ av lösningar har de linjäriserade systemen? Hur beter sig lösningar till pendelekvationen med initialvillkor $(\theta(0), \theta'(0)) = (\theta(0), \psi(0))$ nära dessa punkter?

(4 p)

DEL II – AVANCERADE PROBLEM

5. Differentialekvationen

$$(x^2 + 4)y'' - 6y = 0, \quad y = y(x),$$

har två lösningar y_1, y_2 som uppfyller $y_1(0) = 1, y_1'(0) = 0$ respektive $y_2(0) = 0, y_2'(0) = 1$. Bestäm dessa lösningar på serieform vid $x = 0$,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

För detta ska du ange den rekursionsrelation som ger koefficienterna a_n samt beräkna termer till minst ordning 3 i vardera serie. Hur stor är konvergensradien för de två serierna?

(4 p)

6. Denna uppgift gäller entydighet för lösningar $y = y(t)$ till initialvärdesproblemet

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0, \tag{1}$$

där $f(t, y)$ är en kontinuerlig funktion definierad på något område R i ty -planet som innehåller punkten (t_0, y_0) .

- (a) Ge ett exempel på ett initialvärdesproblem som (1) med två olika funktioner som lösningar. Ge en noggrann förklaring varför de funktioner du anger är lösningar.
 (b) Antag nu att funktionen $f(t, y)$ i (1) dessutom uppfyller ett Lipschitz-villkor i y , alltså att det finns en konstant $C > 0$ så att

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq C|y_1 - y_2|$$

för alla $(t, y_1), (t, y_2)$ i området R . Visa att om $\phi(t)$ och $\psi(t)$ båda löser problemet (1) så är $\phi(t) = \psi(t)$.

(4 p)



SF1683 Differentialekvationer och transformmetoder, del 1
Tentamen
Måndag den 20 december 2021

Skrivtid: 08:00-12:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: Mattias Dahl

Tentamen består av sex uppgifter uppdelade i två delar. Del I utgörs av de fyra första uppgifterna som testar förmågan att lösa grundläggande problem. Del II utgörs av de två sista uppgifterna och testar förmågan att lösa mer avancerade problem som även kan vara av teoretisk karaktär och är avsedda främst för högre betyg. Varje uppgift ger maximalt fyra poäng. Bonuspoäng från inlämningsuppgifterna adderas till erhållna poäng på del I upp till maximalt 16 poäng.

Betygsgränserna vid tentamen ges av följande tabell.

Fx	E	D	C	B	A
11	12	14	16	19	21

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. (a) Bestäm den lösning till ekvationen

$$y' + 2xy = 0, \quad y = y(x),$$

som uppfyller $y(0) = 1$.

- (b) Ekvationen

$$(2xy^2 - 3) + (2x^2y + 4)y' = 0, \quad y = y(x),$$

är exakt. Bestäm den lösning som uppfyller $y(1) = 1$. Lösningen får ges på implicit form.

(4 p)

2. Bestäm den lösning till systemet

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - 4y(t) \\ y'(t) = 4x(t) + y(t) \end{cases}$$

som uppfyller $x(0) = 0, y(0) = 1$.

(4 p)

3. Ekvationen

$$x^2 y''(x) + xy'(x) - y(x) = 0, \quad x > 0$$

har två lösningar $y_1(x) = x$ och $y_2(x) = x^{-1}$. Använd metoden med variation av parametrar för hitta den allmänna lösningen till ekvationen

$$x^2 y''(x) + xy'(x) - y(x) = 2x^2 e^{-x}.$$

(4 p)

4. Systemet

$$\begin{cases} x' = -2xy \\ y' = y - x + xy - y^3 \end{cases}$$

för $(x, y) = (x(t), y(t))$ har tre kritiska punkter och konstanta lösningar

$$(x(t), y(t)) = (0, 0), \quad (0, 1), \quad (0, -1).$$

Förklara vad det betyder att en kritisk punkt är (asymptotiskt) stabil respektive instabil. Använd metoden med linjärisering för att avgöra om dessa kritiska punkter är stabila eller instabila, i de fall det går.

(4 p)

DEL II – AVANCERADE PROBLEM

5. Visa att ekvationen

$$2xy'' - y' + 2y = 0$$

för $y = y(x)$ har en reguljär singular punkt vid $x = 0$. Bestäm två linjärt oberoende serielösningar vid $x = 0$ till ekvationen. För detta ska du ange den rekursionsrelation som ger koefficienterna i dessa serielösningar, samt beräkna minst tre termer i vardera serie. För vilka x konvergerar dessa serier?

(4 p)

6. Denna uppgift gäller lösningar till den andra ordningens linjära homogena differentialekvationen

$$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = 0 \tag{1}$$

där $p(t), q(t)$ är kontinuerliga funktioner definierade på ett intervall I . Om $y_1(t), y_2(t)$ är lösningar till (1) så definieras deras Wronskian som funktionen

$$W[y_1, y_2](t) = \det \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix}.$$

(a) Formulera existens- och entydighetssatsen för lösningar till (1). Visa med hjälp av denna att alla lösningar till (1) ges av

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

för olika val av c_1, c_2 om och endast om $W[y_1, y_2](t_0) \neq 0$ för något $t_0 \in I$.

(b) Visa att om $y_1(t), y_2(t)$ är lösningar till (1) så är antingen $W[y_1, y_2](t) = 0$ för alla $t \in I$ eller $W[y_1, y_2](t) \neq 0$ för alla $t \in I$.

(4 p)

**SF1683 Differentialekvationer och transformmetoder HT22, del 1**
Övningstentamen 1

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Differentialekvationen

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}, \quad y = y(x),$$

är en homogen första ordningens ekvation. Hitta den allmänna lösningen till ekvationen. **(4 p)**

2. Bestäm lösningen till initialvärdesproblemet

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + 8y(t) \\ y'(t) = -x(t) - 2y(t) \end{cases}, \quad \begin{cases} x(0) = 2 \\ y(0) = -1 \end{cases}.$$

(Ledning: matrisen $\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ har komplexa egenvärden $m = \pm 2i$.)

(4 p)

3. Ekvationen

$$x^2 y'' + x(x-2)y' + (2-x)y = 0, \quad y = y(x)$$

har en lösning $y_1(x) = x$. Använd detta för att bestämma den allmänna lösningen till ekvationen. **(4 p)**

DEL II – AVANCERADE PROBLEM

4. Den homogena ekvationen

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$$

har två lösningar

$$y_1(x) = x^{-1/2} \cos x, \quad y_2(x) = x^{-1/2} \sin x.$$

Använd metoden med variation av parametrar för att hitta den allmänna lösningen till ekvationen

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = x^{3/2}.$$

(4 p)

5. Det autonoma systemet

$$\begin{cases} x' = y^3 - x^3 \\ y' = -2xy^2 - 4x^2y - 2y^3 \end{cases}$$

för $(x, y) = (x(t), y(t))$ har en kritisk punkt i origo. Visa att denna kritiska punkt är asymptotiskt stabil genom att hitta en lämplig Lyapunovfunktion. **(4 p)**

6. Differentialekvationen

$$xy'' + y = 0, \quad y = y(x),$$

har en reguljär singulär punkt vid $x = 0$. Använd en ansats med en serie av Frobeniustyp för att hitta en lösning till ekvationen. För detta ska du ange den rekursionsrelation som ger koefficienterna i serien samt beräkna minst 4 nollskiljda termer.

Visa att denna serieansats inte kan ge en andra linjärt oberoende lösning (du behöver heller inte bestämma en andra lösning). Bestäm konvergensraden för den lösning du har hittat. **(4 p)**



SF1683 Differentialekvationer och transformmetoder, del 1
Tentamen
Tisdag den 25 oktober 2022

Skrivtid: 08:00-12:00

Tillåtna hjälpmedel: inga (förutom det bifogade formelbladet)

Examinator: Mattias Dahl

Tentamen består av sex uppgifter uppdelade i två delar. Del I utgörs av de tre första uppgifterna som testar förmågan att lösa grundläggande problem. Del II utgörs av de tre sista uppgifterna och testar förmågan att lösa mer avancerade problem som även kan vara av teoretisk karaktär och är avsedda främst för högre betyg. Varje uppgift ger maximalt fyra poäng. Bonuspoäng från lappskrivningarna adderas till erhållna poäng på del I upp till maximalt 12 poäng.

Betygsgränserna vid tentamen ges av följande tabell.

Fx	E	D	C	B	A
11	12	14	16	19	21

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Lös följande initialvärdesproblem.

(a) $y' - (\tan x)y = e^{-x}$, $y(0) = 1$.

(b) $2xydx + (x^2 - 1)dy = 0$, $y(0) = 1$.

(4 p)

2. Följande linjära system av differentialekvationer har en parameter $a \in \mathbb{R}$ som en av koefficienterna,

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + ay(t) \\ y'(t) = 4x(t) + y(t) \end{cases}.$$

Bestäm ett värde på a för vilket systemet har någon lösning med $(x(t), y(t)) \rightarrow (0, 0)$ då $t \rightarrow \infty$. (Detta värde är inte unikt.) För ditt valda värde på parametern a , bestäm alla lösningar som uppfyller $(x(t), y(t)) \rightarrow (0, 0)$ då $t \rightarrow \infty$.

(4 p)

3. Den homogena ekvationen

$$y'' - 2y' + y = 0$$

har två lösningar $y_1(x) = e^x$ och $y_2(x) = xe^x$. Bestäm den allmänna lösningen till ekvationen

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(4 p)

DEL II – AVANCERADE PROBLEM

4. Ekvationen

$$y = cx^5,$$

där $c \in \mathbb{R}$ är en parameter, beskriver en familj av kurvor i planet. Bestäm den differentialekvation (som inte innehåller parametern c) vars lösningsmängd är denna familj av kurvor. Bestäm familjen av ortogonala trajektorier till dessa kurvor, alltså den familj av kurvor som skär de givna kurvorna vinkelrätt i alla punkter.

(4 p)

5. Visa att ekvationen

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0, \quad y = y(x),$$

har en reguljär singulär punkt vid $x = 0$. Använd en serieansats av Frobeniustyp för att hitta en lösning till ekvationen. För detta ska du ange den rekursionsrelation som ger koefficienterna i serien samt beräkna minst 3 nollskiljda termer. Visa dessutom att denna serieansats inte kan ge en andra linjärt oberoende lösning (du behöver heller inte bestämma en andra lösning).

(4 p)

6. (a) Antag att det autonoma systemet av differentialekvationer

$$\begin{cases} x' = F(x, y) \\ y' = G(x, y) \end{cases}$$

för $(x, y) = (x(t), y(t))$ har en kritisk punkt i $(0, 0)$. Bevisa att existensen av en lämplig Lyapunovfunktion $E(x, y)$ medför att den kritiska punkten är asymptotiskt stabil. (Du behöver inte behandla det allmänna stabila fallet.)

- (b) Systemet

$$\begin{cases} x' = -x^3 + xy \\ y' = -2x^2 - y^3 \end{cases}$$

har en kritisk punkt i $(0, 0)$. Visa att denna kritiska punkt är asymptotiskt stabil genom att hitta en lämplig Lyapunovfunktion.

(4 p)

Table of Integrals*

Basic Forms

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \quad (1)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| \quad (2)$$

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (3)$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b| \quad (4)$$

Integrals of Rational Functions

$$\int \frac{1}{(x+a)^2} dx = -\frac{1}{x+a} \quad (5)$$

$$\int (x+a)^n dx = \frac{(x+a)^{n+1}}{n+1}, n \neq -1 \quad (6)$$

$$\int x(x+a)^n dx = \frac{(x+a)^{n+1}((n+1)x-a)}{(n+1)(n+2)} \quad (7)$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x \quad (8)$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} \quad (9)$$

$$\int \frac{x}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln |a^2+x^2| \quad (10)$$

$$\int \frac{x^2}{a^2+x^2} dx = x - a \tan^{-1} \frac{x}{a} \quad (11)$$

$$\int \frac{x^3}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}a^2 \ln |a^2+x^2| \quad (12)$$

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \tan^{-1} \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} \quad (13)$$

$$\int \frac{1}{(x+a)(x+b)} dx = \frac{1}{b-a} \ln \frac{a+x}{b+x}, a \neq b \quad (14)$$

$$\int \frac{x}{(x+a)^2} dx = \frac{a}{a+x} + \ln |a+x| \quad (15)$$

$$\int \frac{x}{ax^2+bx+c} dx = \frac{1}{2a} \ln |ax^2+bx+c| - \frac{b}{a\sqrt{4ac-b^2}} \tan^{-1} \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} \quad (16)$$

Integrals with Roots

$$\int \sqrt{x-a} dx = \frac{2}{3} (x-a)^{3/2} \quad (17)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x \pm a}} dx = 2\sqrt{x \pm a} \quad (18)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x}} dx = -2\sqrt{a-x} \quad (19)$$

$$\int x\sqrt{x-a} dx = \frac{2}{3}a(x-a)^{3/2} + \frac{2}{5}(x-a)^{5/2} \quad (20)$$

$$\int \sqrt{ax+b} dx = \left(\frac{2b}{3a} + \frac{2x}{3} \right) \sqrt{ax+b} \quad (21)$$

$$\int (ax+b)^{3/2} dx = \frac{2}{5a} (ax+b)^{5/2} \quad (22)$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x \pm a}} dx = \frac{2}{3} (x \mp 2a) \sqrt{x \pm a} \quad (23)$$

$$\int \sqrt{\frac{x}{a-x}} dx = -\sqrt{x(a-x)} - a \tan^{-1} \frac{\sqrt{x(a-x)}}{x-a} \quad (24)$$

$$\int \sqrt{\frac{x}{a+x}} dx = \sqrt{x(a+x)} - a \ln [\sqrt{x} + \sqrt{x+a}] \quad (25)$$

$$\int x\sqrt{ax+bdx} = \frac{2}{15a^2} (-2b^2 + abx + 3a^2x^2) \sqrt{ax+b} \quad (26)$$

$$\int \sqrt{x(ax+b)} dx = \frac{1}{4a^{3/2}} \left[(2ax+b) \sqrt{ax(ax+b)} - b^2 \ln |a\sqrt{x} + \sqrt{a(ax+b)}| \right] \quad (27)$$

$$\int \sqrt{x^3(ax+b)} dx = \left[\frac{b}{12a} - \frac{b^2}{8a^2x} + \frac{x}{3} \right] \sqrt{x^3(ax+b)} + \frac{b^3}{8a^{5/2}} \ln |a\sqrt{x} + \sqrt{a(ax+b)}| \quad (28)$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{1}{2}a^2 \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| \quad (29)$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2}a^2 \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (30)$$

$$\int x\sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{3} (x^2 \pm a^2)^{3/2} \quad (31)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| \quad (32)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \sin^{-1} \frac{x}{a} \quad (33)$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \sqrt{x^2 \pm a^2} \quad (34)$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = -\sqrt{a^2 - x^2} \quad (35)$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 \pm a^2} \mp \frac{1}{2}a^2 \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| \quad (36)$$

$$\int \sqrt{ax^2+bx+cdx} = \frac{b+2ax}{4a} \sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{4ac-b^2}{8a^{3/2}} \ln |2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}| \quad (37)$$

$$\int x\sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{1}{48a^{5/2}} \left(2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c} \times (-3b^2+2abx+8a(c+ax^2)) + 3(b^3-4abc) \ln |b+2ax+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}| \right) \quad (38)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln |2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}| \quad (39)$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = \frac{1}{a} \sqrt{ax^2+bx+c} - \frac{b}{2a^{3/2}} \ln |2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}| \quad (40)$$

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}} \quad (41)$$

Integrals with Logarithms

$$\int \ln ax dx = x \ln ax - x \quad (42)$$

$$\int \frac{\ln ax}{x} dx = \frac{1}{2} (\ln ax)^2 \quad (43)$$

$$\int \ln(ax+b) dx = \left(x + \frac{b}{a} \right) \ln(ax+b) - x, a \neq 0 \quad (44)$$

$$\int \ln(x^2+a^2) dx = x \ln(x^2+a^2) + 2a \tan^{-1} \frac{x}{a} - 2x \quad (45)$$

$$\int \ln(x^2-a^2) dx = x \ln(x^2-a^2) + a \ln \frac{x+a}{x-a} - 2x \quad (46)$$

$$\int \ln(ax^2+bx+c) dx = \frac{1}{a} \sqrt{4ac-b^2} \tan^{-1} \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} - 2x + \left(\frac{b}{2a} + x \right) \ln(ax^2+bx+c) \quad (47)$$

$$\int x \ln(ax+b) dx = \frac{bx}{2a} - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{b^2}{a^2} \right) \ln(ax+b) \quad (48)$$

$$\int x \ln(a^2-b^2x^2) dx = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{a^2}{b^2} \right) \ln(a^2-b^2x^2) \quad (49)$$

Integrals with Exponentials

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} \quad (50)$$

$$\int \sqrt{x} e^{ax} dx = \frac{1}{a} \sqrt{x} e^{ax} + \frac{i\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}} \operatorname{erf}(i\sqrt{ax}), \text{ where } \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (51)$$

$$\int x e^x dx = (x-1)e^x \quad (52)$$

$$\int x e^{ax} dx = \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \right) e^{ax} \quad (53)$$

$$\int x^2 e^x dx = (x^2 - 2x + 2) e^x \quad (54)$$

$$\int x^2 e^{ax} dx = \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right) e^{ax} \quad (55)$$

$$\int x^3 e^x dx = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) e^x \quad (56)$$

$$\int x^n e^{ax} dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx \quad (57)$$

$$\int x^n e^{ax} dx = \frac{(-1)^n}{a^{n+1}} \Gamma[1+n, -ax], \text{ where } \Gamma(a, x) = \int_x^\infty t^{a-1} e^{-t} dt \quad (58)$$

$$\int e^{ax^2} dx = -\frac{i\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \operatorname{erf}(i\sqrt{a}x) \quad (59)$$

$$\int e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \operatorname{erf}(x\sqrt{a}) \quad (60)$$

$$\int x e^{-ax^2} dx = -\frac{1}{2a} e^{-ax^2} \quad (61)$$

$$\int x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{a^3}} \operatorname{erf}(x\sqrt{a}) - \frac{x}{2a} e^{-ax^2} \quad (62)$$

*© 2014. From <http://integral-table.com>, last revised June 14, 2014. This material is provided as is without warranty or representation about the accuracy, correctness or suitability of the material for any purpose, and is licensed under the Creative Commons Attribution-Noncommercial-ShareAlike 3.0 United States License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/> or send a letter to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.

Integrals with Trigonometric Functions

$$\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax \quad (63)$$

$$\int \sin^2 ax dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a} \quad (64)$$

$$\int \sin^n ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax {}_2F_1 \left[\frac{1}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{3}{2}, \cos^2 ax \right] \quad (65)$$

$$\int \sin^3 ax dx = -\frac{3 \cos ax}{4a} + \frac{\cos 3ax}{12a} \quad (66)$$

$$\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax \quad (67)$$

$$\int \cos^2 ax dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a} \quad (68)$$

$$\int \cos^p ax dx = -\frac{1}{a(1+p)} \cos^{1+p} ax \times {}_2F_1 \left[\frac{1+p}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3+p}{2}, \cos^2 ax \right] \quad (69)$$

$$\int \cos^3 ax dx = \frac{3 \sin ax}{4a} + \frac{\sin 3ax}{12a} \quad (70)$$

$$\int \cos ax \sin bxdx = \frac{\cos[(a-b)x]}{2(a-b)} - \frac{\cos[(a+b)x]}{2(a+b)}, a \neq b \quad (71)$$

$$\int \sin^2 ax \cos bxdx = -\frac{\sin[(2a-b)x]}{4(2a-b)} + \frac{\sin bx}{2b} - \frac{\sin[(2a+b)x]}{4(2a+b)} \quad (72)$$

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \frac{1}{3} \sin^3 x \quad (73)$$

$$\int \cos^2 ax \sin bxdx = \frac{\cos[(2a-b)x]}{4(2a-b)} - \frac{\cos bx}{2b} - \frac{\cos[(2a+b)x]}{4(2a+b)} \quad (74)$$

$$\int \cos^2 ax \sin ax dx = -\frac{1}{3a} \cos^3 ax \quad (75)$$

$$\int \sin^2 ax \cos^2 bxdx = \frac{x}{4} - \frac{\sin 2ax}{8a} - \frac{\sin[2(a-b)x]}{16(a-b)} + \frac{\sin 2bx}{8b} - \frac{\sin[2(a+b)x]}{16(a+b)} \quad (76)$$

$$\int \sin^2 ax \cos^2 ax dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4ax}{32a} \quad (77)$$

$$\int \tan ax dx = -\frac{1}{a} \ln \cos ax \quad (78)$$

$$\int \tan^2 ax dx = -x + \frac{1}{a} \tan ax \quad (79)$$

$$\int \tan^n ax dx = \frac{\tan^{n+1} ax}{a(1+n)} \times {}_2F_1 \left(\frac{n+1}{2}, 1, \frac{n+3}{2}, -\tan^2 ax \right) \quad (80)$$

$$\int \tan^3 ax dx = \frac{1}{a} \ln \cos ax + \frac{1}{2a} \sec^2 ax \quad (81)$$

$$\int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| = 2 \tanh^{-1} \left(\tan \frac{x}{2} \right) \quad (82)$$

$$\int \sec^2 ax dx = \frac{1}{a} \tan ax \quad (83)$$

$$\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \tan x| \quad (84)$$

$$\int \sec x \tan x dx = \sec x \quad (85)$$

$$\int \sec^2 x \tan x dx = \frac{1}{2} \sec^2 x \quad (86)$$

$$\int \sec^n x \tan x dx = \frac{1}{n} \sec^n x, n \neq 0 \quad (87)$$

$$\int \csc x dx = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| = \ln |\csc x - \cot x| + C \quad (88)$$

$$\int \csc^2 ax dx = -\frac{1}{a} \cot ax \quad (89)$$

$$\int \csc^3 x dx = -\frac{1}{2} \cot x \csc x + \frac{1}{2} \ln |\csc x - \cot x| \quad (90)$$

$$\int \csc^n x \cot x dx = -\frac{1}{n} \csc^n x, n \neq 0 \quad (91)$$

$$\int \sec x \csc x dx = \ln |\tan x| \quad (92)$$

Products of Trigonometric Functions and Monomials

$$\int x \cos x dx = \cos x + x \sin x \quad (93)$$

$$\int x \cos ax dx = \frac{1}{a^2} \cos ax + \frac{x}{a} \sin ax \quad (94)$$

$$\int x^2 \cos x dx = 2x \cos x + (x^2 - 2) \sin x \quad (95)$$

$$\int x^2 \cos ax dx = \frac{2x \cos ax}{a^2} + \frac{a^2 x^2 - 2}{a^3} \sin ax \quad (96)$$

$$\int x^n \cos x dx = -\frac{1}{2} (i)^{n+1} [\Gamma(n+1, -ix) + (-1)^n \Gamma(n+1, ix)] \quad (97)$$

$$\int x^n \cos ax dx = \frac{1}{2} (ia)^{1-n} [(-1)^n \Gamma(n+1, -iax) - \Gamma(n+1, iax)] \quad (98)$$

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \sin x \quad (99)$$

$$\int x \sin ax dx = -\frac{x \cos ax}{a} + \frac{\sin ax}{a^2} \quad (100)$$

$$\int x^2 \sin x dx = (2 - x^2) \cos x + 2x \sin x \quad (101)$$

$$\int x^2 \sin ax dx = \frac{2 - a^2 x^2}{a^3} \cos ax + \frac{2x \sin ax}{a^2} \quad (102)$$

$$\int x^n \sin x dx = -\frac{1}{2} (i)^n [\Gamma(n+1, -ix) - (-1)^n \Gamma(n+1, -ix)] \quad (103)$$

Products of Trigonometric Functions and Exponentials

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) \quad (104)$$

$$\int e^{bx} \sin ax dx = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{bx} (b \sin ax - a \cos ax) \quad (105)$$

$$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) \quad (106)$$

$$\int e^{bx} \cos ax dx = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{bx} (a \sin ax + b \cos ax) \quad (107)$$

$$\int x e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\cos x - x \cos x + x \sin x) \quad (108)$$

$$\int x e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (x \cos x - \sin x + x \sin x) \quad (109)$$

Integrals of Hyperbolic Functions

$$\int \cosh ax dx = \frac{1}{a} \sinh ax \quad (110)$$

$$\int e^{ax} \cosh bxdx = \begin{cases} \frac{e^{ax}}{a^2 - b^2} [a \cosh bx - b \sinh bx] & a \neq b \\ \frac{e^{2ax}}{4a} + \frac{x}{2} & a = b \end{cases} \quad (111)$$

$$\int \sinh ax dx = \frac{1}{a} \cosh ax \quad (112)$$

$$\int e^{ax} \sinh bxdx = \begin{cases} \frac{e^{ax}}{a^2 - b^2} [-b \cosh bx + a \sinh bx] & a \neq b \\ \frac{e^{2ax}}{4a} - \frac{x}{2} & a = b \end{cases} \quad (113)$$

$$\int e^{ax} \tanh bxdx = \begin{cases} \frac{e^{(a+2b)x}}{(a+2b)} {}_2F_1 \left[1 + \frac{a}{2b}, 1, 2 + \frac{a}{2b}, -e^{2bx} \right] - \frac{1}{a} e^{ax} {}_2F_1 \left[\frac{a}{2b}, 1, 1E, -e^{2bx} \right] & a \neq b \\ \frac{e^{ax} - 2 \tan^{-1}[e^{ax}]}{a} & a = b \end{cases} \quad (114)$$

$$\int \tanh ax dx = \frac{1}{a} \ln \cosh ax \quad (115)$$

$$\int \cos ax \cosh bxdx = \frac{1}{a^2 + b^2} [a \sin ax \cosh bx + b \cos ax \sinh bx] \quad (116)$$

$$\int \cos ax \sinh bxdx = \frac{1}{a^2 + b^2} [b \cos ax \cosh bx + a \sin ax \sinh bx] \quad (117)$$

$$\int \sin ax \cosh bxdx = \frac{1}{a^2 + b^2} [-a \cos ax \cosh bx + b \sin ax \sinh bx] \quad (118)$$

$$\int \sin ax \sinh bxdx = \frac{1}{a^2 + b^2} [b \cosh bx \sin ax - a \cos ax \sinh bx] \quad (119)$$

$$\int \sinh ax \cosh bxdx = \frac{1}{4a} [-2ax + \sinh 2ax] \quad (120)$$

$$\int \sinh ax \cosh bxdx = \frac{1}{b^2 - a^2} [b \cosh bx \sinh ax - a \cosh ax \sinh bx] \quad (121)$$



SF1683 Differentialekvationer och transformmetoder HT22, del 1
Övningstentamen 2

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Bestäm den allmänna lösningen till systemet

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) - y(t) \\ y'(t) = 9x(t) - 3y(t) \end{cases}.$$

(Ledning: matrisen $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}$ har $m = 0$ som ett dubbelt egenvärde.) (4 p)

2. Differentialekvationen

$$y^2 y'' + (y')^3 = 0$$

för $y = y(x)$ innehåller inte variabeln x explicit. Använd metoden med reduktion av ordningen för att lösa ekvationen.

(4 p)

3. Differentialekvationen

$$y'' - xy = 0, \quad y = y(x),$$

har en lösning y_1 som uppfyller $y_1(0) = 1, y_1'(0) = 0$. Bestäm denna lösning på serieform vid $x = 0$,

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

För detta ska du ange den rekursionsrelation som ger koefficienterna a_n samt beräkna termer till minst ordning 6.

(4 p)

DEL II – AVANCERADE PROBLEM

4. Bestäm de kritiska punkterna till det autonoma systemet

$$\begin{cases} x' = -2xy \\ y' = y - x + xy - y^3 \end{cases}.$$

Använd linjärisering för att avgöra (i de fall det är möjligt) om dessa är stabila och vilket utseende de har. **(4 p)**

5. Ekvationen

$$(x - c)^2 + y^2 = c^2$$

där $c \in \mathbb{R}$ är en parameter beskriver en familj av cirklar med centrum i punkterna $x = c$ på x -axeln och radie c .

- (a) De ortogonala trajektorierna till denna familj är den familj av kurvor som skär cirk-larna vinkelrätt i alla punkter. Visa att de ortogonala trajektorierna ges av lösningarna till differentialekvationen

$$2xy + (y^2 - x^2) \frac{dy}{dx} = 0.$$

- (b) Ekvationen ovan kan göras exakt genom att multiplicera med en integrerande faktor. Använd detta för att bestämma de ortogonala trajektorierna. (*Ledning: det finns en integrerade faktor som bara beror på y .*)

(4 p)

6. Antag att det homogena linjära systemet

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a_1(t) & b_1(t) \\ a_2(t) & b_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

har den allmänna lösningen $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}.$

- (a) Härled de ekvationer som $\begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}$ måste uppfylla för att ansatsen (variation av parametrar)

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = v_1(t) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} + v_2(t) \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}.$$

ska ge en lösning till det inhomogena systemet

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a_1(t) & b_1(t) \\ a_2(t) & b_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}.$$

- (b) Använd denna metod för att hitta den allmänna lösningen till systemet

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ t \end{pmatrix}.$$

(*Ledning: egenvärdena till matrisen här är $m_1 = 0$, $m_2 = 1$.*)

(4 p)



SF1683 Differentialekvationer och transformmetoder, del 1
Tentamen
Måndag den 19 december 2022

Skrivtid: 08:00-12:00

Tillåtna hjälpmedel: inga (förutom det bifogade formelbladet)

Examinator: Mattias Dahl

Tentamen består av sex uppgifter uppdelade i två delar. Del I utgörs av de tre första uppgifterna som testar förmågan att lösa grundläggande problem. Del II utgörs av de tre sista uppgifterna och testar förmågan att lösa mer avancerade problem som även kan vara av teoretisk karaktär och är avsedda främst för högre betyg. Varje uppgift ger maximalt fyra poäng. Bonuspoäng från lappskrivningarna adderas till erhållna poäng på del I upp till maximalt 12 poäng.

Betygsgränserna vid tentamen ges av följande tabell.

Fx	E	D	C	B	A
11	12	14	16	19	21

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Lös följande initialvärdesproblem för $y = y(x)$.

(a) $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = \sin x$, $y(\pi) = 1$, (b) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \left(y + \sqrt{y^2 + 3x^2} \right)$, $y(1) = 1$.

Lösningarna får ges på implicit form.

(4 p)

2. Använd metoden med variation av parametrar för att hitta alla lösningar till ekvationen

$$x^2 y'' - xy' + y = 2x$$

för $y = y(x)$, $x > 0$.

(4 p)

3. Följande linjära system av differentialekvationer har koefficienter som beror på en parameter $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) + (2a+1)y(t) \\ y'(t) = -x(t) - 2y(t) \end{cases}.$$

Bestäm ett värde på a för vilket systemet har lösningar $(x(t), y(t))$ som är begränsade, men inte går mot noll då $t \rightarrow \infty$. (Det finns precis ett sådant värde.) För detta värde på parametern a , bestäm alla lösningar till systemet.

(4 p)

DEL II – AVANCERADE PROBLEM

4. Bestäm två linjärt oberoende serielösningar vid $x = 0$ till ekvationen

$$(x^2 + 1)y'' + 2xy' - 2y = 0, \quad y = y(x).$$

För detta ska du ange den rekursionsrelation som ger koefficienterna i dessa serier samt beräkna termer till och med ordning 8. Bestäm även konvergensraden för dessa lösningar.

(4 p)

5. Följande autonoma system för $(x, y) = (x(t), y(t))$ har båda en kritisk punkt i origo. Använd linjärisering eller metoden med Lyapunovfunktion för att visa att denna kritiska punkt är asymptotiskt stabil.

$$(a) \quad \begin{cases} x' = -x^3 + 3xy^2 \\ y' = -2x^2y - y^3 \end{cases}, \quad (b) \quad \begin{cases} x' = -8x - 2y + x \sin y \\ y' = -y - 2x - 3xy^2 \end{cases}.$$

(4 p)

6. Denna uppgift gäller existens och entydighet för lösningar $y = y(x)$ till initialvärdesproblemet

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad (1)$$

där $f(x, y)$ är en kontinuerlig funktion definierad på något område R i xy -planet som innehåller punkten (x_0, y_0) .

- (a) Ge ett exempel på ett initialvärdesproblem som (1) med två olika funktioner som lösningar. Ge en noggrann förklaring varför de funktioner du anger är lösningar.
- (b) Formulera Picards sats som garanterar att problemet (1) har en unik lösning. Var noggrann när du anger villkoren i satsen.
- (c) Beviset av Picards sats använder sig av ett iterationsförfarande för att konstruera en följd av $y = y_n(x)$ av approximativa lösningar, där $y_0(x)$ är konstant. Förklara hur detta går till samt beräkna $y_3(x)$ för systemet (1) då $f(x, y) = x + y$, $(x_0, y_0) = (0, 1)$.

(4 p)

Table of Integrals*

Basic Forms

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \quad (1)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| \quad (2)$$

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (3)$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b| \quad (4)$$

Integrals of Rational Functions

$$\int \frac{1}{(x+a)^2} dx = -\frac{1}{x+a} \quad (5)$$

$$\int (x+a)^n dx = \frac{(x+a)^{n+1}}{n+1}, n \neq -1 \quad (6)$$

$$\int x(x+a)^n dx = \frac{(x+a)^{n+1}((n+1)x-a)}{(n+1)(n+2)} \quad (7)$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x \quad (8)$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} \quad (9)$$

$$\int \frac{x}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln |a^2+x^2| \quad (10)$$

$$\int \frac{x^2}{a^2+x^2} dx = x - a \tan^{-1} \frac{x}{a} \quad (11)$$

$$\int \frac{x^3}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}a^2 \ln |a^2+x^2| \quad (12)$$

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \tan^{-1} \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} \quad (13)$$

$$\int \frac{1}{(x+a)(x+b)} dx = \frac{1}{b-a} \ln \frac{a+x}{b+x}, a \neq b \quad (14)$$

$$\int \frac{x}{(x+a)^2} dx = \frac{a}{a+x} + \ln |a+x| \quad (15)$$

$$\int \frac{x}{ax^2+bx+c} dx = \frac{1}{2a} \ln |ax^2+bx+c| - \frac{b}{a\sqrt{4ac-b^2}} \tan^{-1} \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} \quad (16)$$

Integrals with Roots

$$\int \sqrt{x-a} dx = \frac{2}{3} (x-a)^{3/2} \quad (17)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x \pm a}} dx = 2\sqrt{x \pm a} \quad (18)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x}} dx = -2\sqrt{a-x} \quad (19)$$

$$\int x\sqrt{x-a} dx = \frac{2}{3}a(x-a)^{3/2} + \frac{2}{5}(x-a)^{5/2} \quad (20)$$

$$\int \sqrt{ax+b} dx = \left(\frac{2b}{3a} + \frac{2x}{3} \right) \sqrt{ax+b} \quad (21)$$

$$\int (ax+b)^{3/2} dx = \frac{2}{5a} (ax+b)^{5/2} \quad (22)$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x \pm a}} dx = \frac{2}{3} (x \mp 2a) \sqrt{x \pm a} \quad (23)$$

$$\int \sqrt{\frac{x}{a-x}} dx = -\sqrt{x(a-x)} - a \tan^{-1} \frac{\sqrt{x(a-x)}}{x-a} \quad (24)$$

$$\int \sqrt{\frac{x}{a+x}} dx = \sqrt{x(a+x)} - a \ln [\sqrt{x} + \sqrt{x+a}] \quad (25)$$

$$\int x\sqrt{ax+bdx} = \frac{2}{15a^2} (-2b^2 + abx + 3a^2x^2) \sqrt{ax+b} \quad (26)$$

$$\int \sqrt{x(ax+b)} dx = \frac{1}{4a^{3/2}} \left[(2ax+b) \sqrt{ax(ax+b)} - b^2 \ln |a\sqrt{x} + \sqrt{a(ax+b)}| \right] \quad (27)$$

$$\int \sqrt{x^3(ax+b)} dx = \left[\frac{b}{12a} - \frac{b^2}{8a^2x} + \frac{x}{3} \right] \sqrt{x^3(ax+b)} + \frac{b^3}{8a^{5/2}} \ln |a\sqrt{x} + \sqrt{a(ax+b)}| \quad (28)$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{1}{2}a^2 \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| \quad (29)$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2}a^2 \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (30)$$

$$\int x\sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{3} (x^2 \pm a^2)^{3/2} \quad (31)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| \quad (32)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \sin^{-1} \frac{x}{a} \quad (33)$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \sqrt{x^2 \pm a^2} \quad (34)$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = -\sqrt{a^2 - x^2} \quad (35)$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 \pm a^2} \mp \frac{1}{2}a^2 \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| \quad (36)$$

$$\int \sqrt{ax^2+bx+cdx} = \frac{b+2ax}{4a} \sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{4ac-b^2}{8a^{3/2}} \ln |2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}| \quad (37)$$

$$\int x\sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{1}{48a^{5/2}} \left(2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c} \times (-3b^2+2abx+8a(c+ax^2)) + 3(b^3-4abc) \ln |b+2ax+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}| \right) \quad (38)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln |2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}| \quad (39)$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = \frac{1}{a} \sqrt{ax^2+bx+c} - \frac{b}{2a^{3/2}} \ln |2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}| \quad (40)$$

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}} \quad (41)$$

Integrals with Logarithms

$$\int \ln ax dx = x \ln ax - x \quad (42)$$

$$\int \frac{\ln ax}{x} dx = \frac{1}{2} (\ln ax)^2 \quad (43)$$

$$\int \ln(ax+b) dx = \left(x + \frac{b}{a} \right) \ln(ax+b) - x, a \neq 0 \quad (44)$$

$$\int \ln(x^2+a^2) dx = x \ln(x^2+a^2) + 2a \tan^{-1} \frac{x}{a} - 2x \quad (45)$$

$$\int \ln(x^2-a^2) dx = x \ln(x^2-a^2) + a \ln \frac{x+a}{x-a} - 2x \quad (46)$$

$$\int \ln(ax^2+bx+c) dx = \frac{1}{a} \sqrt{4ac-b^2} \tan^{-1} \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} - 2x + \left(\frac{b}{2a} + x \right) \ln(ax^2+bx+c) \quad (47)$$

$$\int x \ln(ax+b) dx = \frac{bx}{2a} - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{b^2}{a^2} \right) \ln(ax+b) \quad (48)$$

$$\int x \ln(a^2-b^2x^2) dx = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{a^2}{b^2} \right) \ln(a^2-b^2x^2) \quad (49)$$

Integrals with Exponentials

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} \quad (50)$$

$$\int \sqrt{x} e^{ax} dx = \frac{1}{a} \sqrt{x} e^{ax} + \frac{i\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}} \operatorname{erf}(i\sqrt{ax}), \text{ where } \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (51)$$

$$\int x e^x dx = (x-1)e^x \quad (52)$$

$$\int x e^{ax} dx = \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \right) e^{ax} \quad (53)$$

$$\int x^2 e^x dx = (x^2 - 2x + 2) e^x \quad (54)$$

$$\int x^2 e^{ax} dx = \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right) e^{ax} \quad (55)$$

$$\int x^3 e^x dx = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) e^x \quad (56)$$

$$\int x^n e^{ax} dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx \quad (57)$$

$$\int x^n e^{ax} dx = \frac{(-1)^n}{a^{n+1}} \Gamma[1+n, -ax], \text{ where } \Gamma(a, x) = \int_x^\infty t^{a-1} e^{-t} dt \quad (58)$$

$$\int e^{ax^2} dx = -\frac{i\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \operatorname{erf}(i\sqrt{a}x) \quad (59)$$

$$\int e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \operatorname{erf}(x\sqrt{a}) \quad (60)$$

$$\int x e^{-ax^2} dx = -\frac{1}{2a} e^{-ax^2} \quad (61)$$

$$\int x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{a^3}} \operatorname{erf}(x\sqrt{a}) - \frac{x}{2a} e^{-ax^2} \quad (62)$$

*© 2014. From <http://integral-table.com>, last revised June 14, 2014. This material is provided as is without warranty or representation about the accuracy, correctness or suitability of the material for any purpose, and is licensed under the Creative Commons Attribution-Noncommercial-ShareAlike 3.0 United States License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/> or send a letter to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.

Integrals with Trigonometric Functions

$$\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax \quad (63)$$

$$\int \sin^2 ax dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a} \quad (64)$$

$$\int \sin^n ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax {}_2F_1 \left[\frac{1}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{3}{2}, \cos^2 ax \right] \quad (65)$$

$$\int \sin^3 ax dx = -\frac{3 \cos ax}{4a} + \frac{\cos 3ax}{12a} \quad (66)$$

$$\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax \quad (67)$$

$$\int \cos^2 ax dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a} \quad (68)$$

$$\int \cos^p ax dx = -\frac{1}{a(1+p)} \cos^{1+p} ax \times {}_2F_1 \left[\frac{1+p}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3+p}{2}, \cos^2 ax \right] \quad (69)$$

$$\int \cos^3 ax dx = \frac{3 \sin ax}{4a} + \frac{\sin 3ax}{12a} \quad (70)$$

$$\int \cos ax \sin bxdx = \frac{\cos[(a-b)x]}{2(a-b)} - \frac{\cos[(a+b)x]}{2(a+b)}, a \neq b \quad (71)$$

$$\int \sin^2 ax \cos bxdx = -\frac{\sin[(2a-b)x]}{4(2a-b)} + \frac{\sin bx}{2b} - \frac{\sin[(2a+b)x]}{4(2a+b)} \quad (72)$$

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \frac{1}{3} \sin^3 x \quad (73)$$

$$\int \cos^2 ax \sin bxdx = \frac{\cos[(2a-b)x]}{4(2a-b)} - \frac{\cos bx}{2b} - \frac{\cos[(2a+b)x]}{4(2a+b)} \quad (74)$$

$$\int \cos^2 ax \sin ax dx = -\frac{1}{3a} \cos^3 ax \quad (75)$$

$$\int \sin^2 ax \cos^2 bxdx = \frac{x}{4} - \frac{\sin 2ax}{8a} - \frac{\sin[2(a-b)x]}{16(a-b)} + \frac{\sin 2bx}{8b} - \frac{\sin[2(a+b)x]}{16(a+b)} \quad (76)$$

$$\int \sin^2 ax \cos^2 ax dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4ax}{32a} \quad (77)$$

$$\int \tan ax dx = -\frac{1}{a} \ln \cos ax \quad (78)$$

$$\int \tan^2 ax dx = -x + \frac{1}{a} \tan ax \quad (79)$$

$$\int \tan^n ax dx = \frac{\tan^{n+1} ax}{a(1+n)} \times {}_2F_1 \left(\frac{n+1}{2}, 1, \frac{n+3}{2}, -\tan^2 ax \right) \quad (80)$$

$$\int \tan^3 ax dx = \frac{1}{a} \ln \cos ax + \frac{1}{2a} \sec^2 ax \quad (81)$$

$$\int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| = 2 \tanh^{-1} \left(\tan \frac{x}{2} \right) \quad (82)$$

$$\int \sec^2 ax dx = \frac{1}{a} \tan ax \quad (83)$$

$$\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \tan x| \quad (84)$$

$$\int \sec x \tan x dx = \sec x \quad (85)$$

$$\int \sec^2 x \tan x dx = \frac{1}{2} \sec^2 x \quad (86)$$

$$\int \sec^n x \tan x dx = \frac{1}{n} \sec^n x, n \neq 0 \quad (87)$$

$$\int \csc x dx = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| = \ln |\csc x - \cot x| + C \quad (88)$$

$$\int \csc^2 ax dx = -\frac{1}{a} \cot ax \quad (89)$$

$$\int \csc^3 x dx = -\frac{1}{2} \cot x \csc x + \frac{1}{2} \ln |\csc x - \cot x| \quad (90)$$

$$\int \csc^n x \cot x dx = -\frac{1}{n} \csc^n x, n \neq 0 \quad (91)$$

$$\int \sec x \csc x dx = \ln |\tan x| \quad (92)$$

Products of Trigonometric Functions and Monomials

$$\int x \cos x dx = \cos x + x \sin x \quad (93)$$

$$\int x \cos ax dx = \frac{1}{a^2} \cos ax + \frac{x}{a} \sin ax \quad (94)$$

$$\int x^2 \cos x dx = 2x \cos x + (x^2 - 2) \sin x \quad (95)$$

$$\int x^2 \cos ax dx = \frac{2x \cos ax}{a^2} + \frac{a^2 x^2 - 2}{a^3} \sin ax \quad (96)$$

$$\int x^n \cos x dx = -\frac{1}{2} (i)^{n+1} [\Gamma(n+1, -ix) + (-1)^n \Gamma(n+1, ix)] \quad (97)$$

$$\int x^n \cos ax dx = \frac{1}{2} (ia)^{1-n} [(-1)^n \Gamma(n+1, -iax) - \Gamma(n+1, iax)] \quad (98)$$

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \sin x \quad (99)$$

$$\int x \sin ax dx = -\frac{x \cos ax}{a} + \frac{\sin ax}{a^2} \quad (100)$$

$$\int x^2 \sin x dx = (2 - x^2) \cos x + 2x \sin x \quad (101)$$

$$\int x^2 \sin ax dx = \frac{2 - a^2 x^2}{a^3} \cos ax + \frac{2x \sin ax}{a^2} \quad (102)$$

$$\int x^n \sin x dx = -\frac{1}{2} (i)^n [\Gamma(n+1, -ix) - (-1)^n \Gamma(n+1, -ix)] \quad (103)$$

Products of Trigonometric Functions and Exponentials

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) \quad (104)$$

$$\int e^{bx} \sin ax dx = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{bx} (b \sin ax - a \cos ax) \quad (105)$$

$$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) \quad (106)$$

$$\int e^{bx} \cos ax dx = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{bx} (a \sin ax + b \cos ax) \quad (107)$$

$$\int x e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\cos x - x \cos x + x \sin x) \quad (108)$$

$$\int x e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (x \cos x - \sin x + x \sin x) \quad (109)$$

Integrals of Hyperbolic Functions

$$\int \cosh ax dx = \frac{1}{a} \sinh ax \quad (110)$$

$$\int e^{ax} \cosh bxdx = \begin{cases} \frac{e^{ax}}{a^2 - b^2} [a \cosh bx - b \sinh bx] & a \neq b \\ \frac{e^{2ax}}{4a} + \frac{x}{2} & a = b \end{cases} \quad (111)$$

$$\int \sinh ax dx = \frac{1}{a} \cosh ax \quad (112)$$

$$\int e^{ax} \sinh bxdx = \begin{cases} \frac{e^{ax}}{a^2 - b^2} [-b \cosh bx + a \sinh bx] & a \neq b \\ \frac{e^{2ax}}{4a} - \frac{x}{2} & a = b \end{cases} \quad (113)$$

$$\int e^{ax} \tanh bxdx = \begin{cases} \frac{e^{(a+2b)x}}{(a+2b)} {}_2F_1 \left[1 + \frac{a}{2b}, 1, 2 + \frac{a}{2b}, -e^{2bx} \right] - \frac{1}{a} e^{ax} {}_2F_1 \left[\frac{a}{2b}, 1, 1E, -e^{2bx} \right] & a \neq b \\ \frac{e^{ax} - 2 \tan^{-1}[e^{ax}]}{a} & a = b \end{cases} \quad (114)$$

$$\int \tanh ax dx = \frac{1}{a} \ln \cosh ax \quad (115)$$

$$\int \cos ax \cosh bxdx = \frac{1}{a^2 + b^2} [a \sin ax \cosh bx + b \cos ax \sinh bx] \quad (116)$$

$$\int \cos ax \sinh bxdx = \frac{1}{a^2 + b^2} [b \cos ax \cosh bx + a \sin ax \sinh bx] \quad (117)$$

$$\int \sin ax \cosh bxdx = \frac{1}{a^2 + b^2} [-a \cos ax \cosh bx + b \sin ax \sinh bx] \quad (118)$$

$$\int \sin ax \sinh bxdx = \frac{1}{a^2 + b^2} [b \cosh bx \sin ax - a \cos ax \sinh bx] \quad (119)$$

$$\int \sinh ax \cosh bxdx = \frac{1}{4a} [-2ax + \sinh 2ax] \quad (120)$$

$$\int \sinh ax \cosh bxdx = \frac{1}{b^2 - a^2} [b \cosh bx \sinh ax - a \cosh ax \sinh bx] \quad (121)$$



SF1683 Differentialekvationer och transformmetoder, del 1
Tentamen
Tisdag den 24 oktober 2023

Skrivtid: 08:00-12:00

Tillåtna hjälpmedel: inga (förutom det bifogade formelbladet)

Examinator: Mattias Dahl

Tentamen består av sex uppgifter uppdelade i två delar. Del I utgörs av de tre första uppgifterna som testar förmågan att lösa grundläggande problem. Del II utgörs av de tre sista uppgifterna och testar förmågan att lösa mer avancerade problem som även kan vara av teoretisk karaktär och är avsedda främst för högre betyg. Varje uppgift ger maximalt fyra poäng. Bonuspoäng från lappskrivningarna adderas till erhållna poäng på del I upp till maximalt 12 poäng.

Betygsgränserna vid tentamen ges av följande tabell.

Fx	E	D	C	B	A
11	12	14	16	19	21

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Lös följande initialvärdesproblem för $y = y(x)$ och bestäm lösningarnas existensintervall.

$$(a) \quad xy' - y = \frac{x^2}{\sqrt{1-x}}, \quad y(-1) = 0, \quad (b) \quad y' = e^{-y} \cos x, \quad y(0) = 0.$$

(4 p)

2. Den homogena ekvationen $t^2 y'' - 3ty' + 3y = 0$ där $y = y(t)$ för $t > 0$ har två lösningar $y_1(t) = t^3$ och $y_2(t) = t$. Bestäm den allmänna lösningen till ekvationen

$$t^2 y'' - 3ty' + 3y = t^4 e^t.$$

(4 p)

3. Matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ har ett dubbelt egenvärde $r = 2$. Bestäm den allmänna lösningen till systemet av differentialekvationer

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t).$$

(4 p)

DEL II – AVANCERADE PROBLEM

4. Följande autonoma system för $(x, y) = (x(t), y(t))$ har båda en kritisk punkt i origo. Använd linjärisering eller metoden med Lyapunovfunktion för att avgöra om den är (asymptotiskt) stabil eller instabil.

$$(a) \quad \begin{cases} x' = x - 3y + y^3 \\ y' = -x - 2xy^2 \end{cases}, \quad (b) \quad \begin{cases} x' = -x^3 + y^3 \\ y' = -y - 2xy^2 \end{cases}.$$

(4 p)

5. Differentialekvationen

$$(x^2 + 3)y'' - 2y = 0, \quad y = y(x),$$

har två lösningar y_1, y_2 som uppfyller $y_1(0) = 1, y_1'(0) = 0$ respektive $y_2(0) = 0, y_2'(0) = 1$. Bestäm dessa lösningar på serieform vid $x = 0$,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

För detta ska du ange den rekursionsrelation som ger koefficienterna a_n samt beräkna termer till minst ordning 3 i vardera serie. Hur stor är konvergensraden för de två serierna?

(4 p)

6. Picards sats säger att initialvärdesproblemet $y' = f(t, y), y(0) = 0$, har en unik lösning $y = \phi(t)$. Förutsättningen är att funktionen f och dess partiella derivata $\partial f / \partial y$ är kontinuerliga på ett rektangulärt område R som innehåller i origo.

(a) Beviset går ut på att skriva problemet som en integralekvation och sedan konstruera en följd av approximativa lösningar $y = \phi_n(t), n = 0, 1, 2, \dots$, där $\phi_0(t) = 0$. Förklara hur detta går till. Beräkna även $\phi_3(t)$ då $f(t, y) = 1 + ty$.

(b) Visa entydigheten, alltså att om $\phi(t), \psi(t)$ är lösningar till initialvärdesproblemet så är $\phi(t) = \psi(t)$.

(4 p)

Table of Integrals*

Basic Forms

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \quad (1)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| \quad (2)$$

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (3)$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b| \quad (4)$$

Integrals of Rational Functions

$$\int \frac{1}{(x+a)^2} dx = -\frac{1}{x+a} \quad (5)$$

$$\int (x+a)^n dx = \frac{(x+a)^{n+1}}{n+1}, n \neq -1 \quad (6)$$

$$\int x(x+a)^n dx = \frac{(x+a)^{n+1}((n+1)x-a)}{(n+1)(n+2)} \quad (7)$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x \quad (8)$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} \quad (9)$$

$$\int \frac{x}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln |a^2+x^2| \quad (10)$$

$$\int \frac{x^2}{a^2+x^2} dx = x - a \tan^{-1} \frac{x}{a} \quad (11)$$

$$\int \frac{x^3}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}a^2 \ln |a^2+x^2| \quad (12)$$

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \tan^{-1} \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} \quad (13)$$

$$\int \frac{1}{(x+a)(x+b)} dx = \frac{1}{b-a} \ln \frac{a+x}{b+x}, a \neq b \quad (14)$$

$$\int \frac{x}{(x+a)^2} dx = \frac{a}{a+x} + \ln |a+x| \quad (15)$$

$$\int \frac{x}{ax^2+bx+c} dx = \frac{1}{2a} \ln |ax^2+bx+c| - \frac{b}{a\sqrt{4ac-b^2}} \tan^{-1} \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} \quad (16)$$

Integrals with Roots

$$\int \sqrt{x-a} dx = \frac{2}{3}(x-a)^{3/2} \quad (17)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x \pm a}} dx = 2\sqrt{x \pm a} \quad (18)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x}} dx = -2\sqrt{a-x} \quad (19)$$

$$\int x\sqrt{x-a} dx = \frac{2}{3}a(x-a)^{3/2} + \frac{2}{5}(x-a)^{5/2} \quad (20)$$

$$\int \sqrt{ax+b} dx = \left(\frac{2b}{3a} + \frac{2x}{3}\right) \sqrt{ax+b} \quad (21)$$

$$\int (ax+b)^{3/2} dx = \frac{2}{5a}(ax+b)^{5/2} \quad (22)$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x \pm a}} dx = \frac{2}{3}(x \mp 2a)\sqrt{x \pm a} \quad (23)$$

$$\int \sqrt{\frac{x}{a-x}} dx = -\sqrt{x(a-x)} - a \tan^{-1} \frac{\sqrt{x(a-x)}}{x-a} \quad (24)$$

$$\int \sqrt{\frac{x}{a+x}} dx = \sqrt{x(a+x)} - a \ln [\sqrt{x} + \sqrt{x+a}] \quad (25)$$

$$\int x\sqrt{ax+b} dx = \frac{2}{15a^2}(-2b^2+abx+3a^2x^2)\sqrt{ax+b} \quad (26)$$

$$\int \sqrt{x(ax+b)} dx = \frac{1}{4a^{3/2}} \left[(2ax+b)\sqrt{ax(ax+b)} - b^2 \ln |a\sqrt{x} + \sqrt{a(ax+b)}| \right] \quad (27)$$

$$\int \sqrt{x^3(ax+b)} dx = \left[\frac{b}{12a} - \frac{b^2}{8a^2x} + \frac{x}{3} \right] \sqrt{x^3(ax+b)} + \frac{b^3}{8a^{5/2}} \ln |a\sqrt{x} + \sqrt{a(ax+b)}| \quad (28)$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{1}{2}a^2 \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| \quad (29)$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2}a^2 \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (30)$$

$$\int x\sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{3}(x^2 \pm a^2)^{3/2} \quad (31)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| \quad (32)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \sin^{-1} \frac{x}{a} \quad (33)$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \sqrt{x^2 \pm a^2} \quad (34)$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = -\sqrt{a^2 - x^2} \quad (35)$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 \pm a^2} \mp \frac{1}{2}a^2 \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| \quad (36)$$

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c} dx = \frac{b+2ax}{4a} \sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{4ac-b^2}{8a^{3/2}} \ln |2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}| \quad (37)$$

$$\int x\sqrt{ax^2+bx+c} dx = \frac{1}{48a^{5/2}} \left(2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c} \times (-3b^2+2abx+8a(c+ax^2)) + 3(b^3-4abc) \ln |b+2ax+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}| \right) \quad (38)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln |2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}| \quad (39)$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = \frac{1}{a} \sqrt{ax^2+bx+c} - \frac{b}{2a^{3/2}} \ln |2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}| \quad (40)$$

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}} \quad (41)$$

Integrals with Logarithms

$$\int \ln ax dx = x \ln ax - x \quad (42)$$

$$\int \frac{\ln ax}{x} dx = \frac{1}{2} (\ln ax)^2 \quad (43)$$

$$\int \ln(ax+b) dx = \left(x + \frac{b}{a}\right) \ln(ax+b) - x, a \neq 0 \quad (44)$$

$$\int \ln(x^2+a^2) dx = x \ln(x^2+a^2) + 2a \tan^{-1} \frac{x}{a} - 2x \quad (45)$$

$$\int \ln(x^2-a^2) dx = x \ln(x^2-a^2) + a \ln \frac{x+a}{x-a} - 2x \quad (46)$$

$$\int \ln(ax^2+bx+c) dx = \frac{1}{a} \sqrt{4ac-b^2} \tan^{-1} \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} - 2x + \left(\frac{b}{2a} + x\right) \ln(ax^2+bx+c) \quad (47)$$

$$\int x \ln(ax+b) dx = \frac{bx}{2a} - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{b^2}{a^2}\right) \ln(ax+b) \quad (48)$$

$$\int x \ln(a^2-b^2x^2) dx = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{a^2}{b^2}\right) \ln(a^2-b^2x^2) \quad (49)$$

Integrals with Exponentials

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} \quad (50)$$

$$\int \sqrt{x} e^{ax} dx = \frac{1}{a} \sqrt{x} e^{ax} + \frac{i\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}} \operatorname{erf}(i\sqrt{ax}), \text{ where } \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (51)$$

$$\int x e^x dx = (x-1)e^x \quad (52)$$

$$\int x e^{ax} dx = \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}\right) e^{ax} \quad (53)$$

$$\int x^2 e^x dx = (x^2 - 2x + 2) e^x \quad (54)$$

$$\int x^2 e^{ax} dx = \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right) e^{ax} \quad (55)$$

$$\int x^3 e^x dx = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) e^x \quad (56)$$

$$\int x^n e^{ax} dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx \quad (57)$$

$$\int x^n e^{ax} dx = \frac{(-1)^n}{a^{n+1}} \Gamma[1+n, -ax], \text{ where } \Gamma(a, x) = \int_x^\infty t^{a-1} e^{-t} dt \quad (58)$$

$$\int e^{ax^2} dx = -\frac{i\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \operatorname{erf}(i\sqrt{a}x) \quad (59)$$

$$\int e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \operatorname{erf}(x\sqrt{a}) \quad (60)$$

$$\int x e^{-ax^2} dx = -\frac{1}{2a} e^{-ax^2} \quad (61)$$

$$\int x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{a^3}} \operatorname{erf}(x\sqrt{a}) - \frac{x}{2a} e^{-ax^2} \quad (62)$$

*© 2014. From <http://integral-table.com>, last revised June 14, 2014. This material is provided as is without warranty or representation about the accuracy, correctness or suitability of the material for any purpose, and is licensed under the Creative Commons Attribution-Noncommercial-ShareAlike 3.0 United States License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/> or send a letter to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.

Integrals with Trigonometric Functions

$$\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax \quad (63)$$

$$\int \sin^2 ax dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a} \quad (64)$$

$$\int \sin^n ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax {}_2F_1 \left[\frac{1}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{3}{2}, \cos^2 ax \right] \quad (65)$$

$$\int \sin^3 ax dx = -\frac{3 \cos ax}{4a} + \frac{\cos 3ax}{12a} \quad (66)$$

$$\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax \quad (67)$$

$$\int \cos^2 ax dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a} \quad (68)$$

$$\int \cos^p ax dx = -\frac{1}{a(1+p)} \cos^{1+p} ax \times {}_2F_1 \left[\frac{1+p}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3+p}{2}, \cos^2 ax \right] \quad (69)$$

$$\int \cos^3 ax dx = \frac{3 \sin ax}{4a} + \frac{\sin 3ax}{12a} \quad (70)$$

$$\int \cos ax \sin bxdx = \frac{\cos[(a-b)x]}{2(a-b)} - \frac{\cos[(a+b)x]}{2(a+b)}, a \neq b \quad (71)$$

$$\int \sin^2 ax \cos bxdx = -\frac{\sin[(2a-b)x]}{4(2a-b)} + \frac{\sin bx}{2b} - \frac{\sin[(2a+b)x]}{4(2a+b)} \quad (72)$$

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \frac{1}{3} \sin^3 x \quad (73)$$

$$\int \cos^2 ax \sin bxdx = \frac{\cos[(2a-b)x]}{4(2a-b)} - \frac{\cos bx}{2b} - \frac{\cos[(2a+b)x]}{4(2a+b)} \quad (74)$$

$$\int \cos^2 ax \sin ax dx = -\frac{1}{3a} \cos^3 ax \quad (75)$$

$$\int \sin^2 ax \cos^2 bxdx = \frac{x}{4} - \frac{\sin 2ax}{8a} - \frac{\sin[2(a-b)x]}{16(a-b)} + \frac{\sin 2bx}{8b} - \frac{\sin[2(a+b)x]}{16(a+b)} \quad (76)$$

$$\int \sin^2 ax \cos^2 ax dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4ax}{32a} \quad (77)$$

$$\int \tan ax dx = -\frac{1}{a} \ln \cos ax \quad (78)$$

$$\int \tan^2 ax dx = -x + \frac{1}{a} \tan ax \quad (79)$$

$$\int \tan^n ax dx = \frac{\tan^{n+1} ax}{a(1+n)} \times {}_2F_1 \left(\frac{n+1}{2}, 1, \frac{n+3}{2}, -\tan^2 ax \right) \quad (80)$$

$$\int \tan^3 ax dx = \frac{1}{a} \ln \cos ax + \frac{1}{2a} \sec^2 ax \quad (81)$$

$$\int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| = 2 \tanh^{-1} \left(\tan \frac{x}{2} \right) \quad (82)$$

$$\int \sec^2 ax dx = \frac{1}{a} \tan ax \quad (83)$$

$$\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \tan x| \quad (84)$$

$$\int \sec x \tan x dx = \sec x \quad (85)$$

$$\int \sec^2 x \tan x dx = \frac{1}{2} \sec^2 x \quad (86)$$

$$\int \sec^n x \tan x dx = \frac{1}{n} \sec^n x, n \neq 0 \quad (87)$$

$$\int \csc x dx = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| = \ln |\csc x - \cot x| + C \quad (88)$$

$$\int \csc^2 ax dx = -\frac{1}{a} \cot ax \quad (89)$$

$$\int \csc^3 x dx = -\frac{1}{2} \cot x \csc x + \frac{1}{2} \ln |\csc x - \cot x| \quad (90)$$

$$\int \csc^n x \cot x dx = -\frac{1}{n} \csc^n x, n \neq 0 \quad (91)$$

$$\int \sec x \csc x dx = \ln |\tan x| \quad (92)$$

Products of Trigonometric Functions and Monomials

$$\int x \cos x dx = \cos x + x \sin x \quad (93)$$

$$\int x \cos ax dx = \frac{1}{a^2} \cos ax + \frac{x}{a} \sin ax \quad (94)$$

$$\int x^2 \cos x dx = 2x \cos x + (x^2 - 2) \sin x \quad (95)$$

$$\int x^2 \cos ax dx = \frac{2x \cos ax}{a^2} + \frac{a^2 x^2 - 2}{a^3} \sin ax \quad (96)$$

$$\int x^n \cos x dx = -\frac{1}{2} (i)^{n+1} [\Gamma(n+1, -ix) + (-1)^n \Gamma(n+1, ix)] \quad (97)$$

$$\int x^n \cos ax dx = \frac{1}{2} (ia)^{1-n} [(-1)^n \Gamma(n+1, -iax) - \Gamma(n+1, iax)] \quad (98)$$

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \sin x \quad (99)$$

$$\int x \sin ax dx = -\frac{x \cos ax}{a} + \frac{\sin ax}{a^2} \quad (100)$$

$$\int x^2 \sin x dx = (2 - x^2) \cos x + 2x \sin x \quad (101)$$

$$\int x^2 \sin ax dx = \frac{2 - a^2 x^2}{a^3} \cos ax + \frac{2x \sin ax}{a^2} \quad (102)$$

$$\int x^n \sin x dx = -\frac{1}{2} (i)^n [\Gamma(n+1, -ix) - (-1)^n \Gamma(n+1, -ix)] \quad (103)$$

Products of Trigonometric Functions and Exponentials

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) \quad (104)$$

$$\int e^{bx} \sin ax dx = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{bx} (b \sin ax - a \cos ax) \quad (105)$$

$$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) \quad (106)$$

$$\int e^{bx} \cos ax dx = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{bx} (a \sin ax + b \cos ax) \quad (107)$$

$$\int x e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\cos x - x \cos x + x \sin x) \quad (108)$$

$$\int x e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (x \cos x - \sin x + x \sin x) \quad (109)$$

Integrals of Hyperbolic Functions

$$\int \cosh ax dx = \frac{1}{a} \sinh ax \quad (110)$$

$$\int e^{ax} \cosh bxdx = \begin{cases} \frac{e^{ax}}{a^2 - b^2} [a \cosh bx - b \sinh bx] & a \neq b \\ \frac{e^{2ax}}{4a} + \frac{x}{2} & a = b \end{cases} \quad (111)$$

$$\int \sinh ax dx = \frac{1}{a} \cosh ax \quad (112)$$

$$\int e^{ax} \sinh bxdx = \begin{cases} \frac{e^{ax}}{a^2 - b^2} [-b \cosh bx + a \sinh bx] & a \neq b \\ \frac{e^{2ax}}{4a} - \frac{x}{2} & a = b \end{cases} \quad (113)$$

$$\int e^{ax} \tanh bxdx = \begin{cases} \frac{e^{(a+2b)x}}{(a+2b)} {}_2F_1 \left[1 + \frac{a}{2b}, 1, 2 + \frac{a}{2b}, -e^{2bx} \right] - \frac{1}{a} e^{ax} {}_2F_1 \left[\frac{a}{2b}, 1, 1E, -e^{2bx} \right] & a \neq b \\ \frac{e^{ax} - 2 \tanh^{-1}[e^{ax}]}{a} & a = b \end{cases} \quad (114)$$

$$\int \tanh ax dx = \frac{1}{a} \ln \cosh ax \quad (115)$$

$$\int \cos ax \cosh bxdx = \frac{1}{a^2 + b^2} [a \sin ax \cosh bx + b \cos ax \sinh bx] \quad (116)$$

$$\int \cos ax \sinh bxdx = \frac{1}{a^2 + b^2} [b \cos ax \cosh bx + a \sin ax \sinh bx] \quad (117)$$

$$\int \sin ax \cosh bxdx = \frac{1}{a^2 + b^2} [-a \cos ax \cosh bx + b \sin ax \sinh bx] \quad (118)$$

$$\int \sin ax \sinh bxdx = \frac{1}{a^2 + b^2} [b \cosh bx \sin ax - a \cos ax \sinh bx] \quad (119)$$

$$\int \sinh ax \cosh bxdx = \frac{1}{4a} [-2ax + \sinh 2ax] \quad (120)$$

$$\int \sinh ax \cosh bxdx = \frac{1}{b^2 - a^2} [b \cosh bx \sinh ax - a \cosh ax \sinh bx] \quad (121)$$



SF1683 Differentialekvationer och transformmetoder, del 1
Tentamen
Måndag den 18 december 2023

Skrivtid: 08:00-12:00

Tillåtna hjälpmedel: inga (förutom det bifogade formelbladet)

Examinator: Mattias Dahl

Tentamen består av sex uppgifter uppdelade i två delar. Del I utgörs av de tre första uppgifterna som testar förmågan att lösa grundläggande problem. Del II utgörs av de tre sista uppgifterna och testar förmågan att lösa mer avancerade problem som även kan vara av teoretisk karaktär och är avsedda främst för högre betyg. Varje uppgift ger maximalt fyra poäng. Bonuspoäng från lappskrivningarna adderas till erhållna poäng på del I upp till maximalt 12 poäng.

Betygsgränserna vid tentamen ges av följande tabell.

Fx	E	D	C	B	A
11	12	14	16	19	21

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Lös följande initialvärdesproblem för $y = y(x)$ och bestäm lösningarnas existensintervall.

(a) $y' = \frac{x}{y - x^2y}$, $y(0) = -2$, (b) $(x + 1)y' - xy = x + x^2$, $y(0) = 0$.

(4 p)

2. Ekvationen

$$xy + (2x^2 + 3y^2 - 20) \frac{dy}{dx} = 0$$

för $y = y(x)$ är inte exakt, men kan göras exakt genom att multiplicera med en integrerande faktor $\mu = \mu(y)$ som bara beror av y . Lös ekvationen.

(4 p)

3. Matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ har egenvärden $r_1 = 0$ och $r_2 = -5$. Bestäm den allmänna lösningen till det homogena systemet $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$. Motivera varför du har hittat den allmänna lösningen till systemet. Bestäm därefter den allmänna lösningen till det inhomogena systemet

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} -2 + t^{-1} \\ 1 + 2t^{-1} \end{pmatrix}.$$

(4 p)

DEL II – AVANCERADE PROBLEM

4. Visa att ekvationen

$$2x^2y'' + 3xy' + (2x^2 - 1)y = 0$$

för $y = y(x)$ har en reguljär singulär punkt vid $x = 0$. Bestäm två linjärt oberoende serielösningar av Frobeniustyp vid $x = 0$ till ekvationen. För detta ska du ange den rekursionsrelation som ger koefficienterna i dessa serielösningar, samt beräkna minst tre noll-skiljda termer i vardera serie. För vilka x konvergerar dessa serier? (4 p)

5. Utslagsvinkeln
- $\theta(t)$
- för en svängande pendel uppfyller ekvationen
- $\theta''(t) + \sin \theta(t) = 0$
- .

Med $x(t) = \theta(t)$ och $y(t) = \theta'(t)$ ger detta det autonoma systemet
$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -\sin x(t) \end{cases}.$$

Punkten $(0, 0)$ är en kritisk punkt för detta system.

- (a) Vad säger metoden med linjärisering om stabiliteten för den kritiska punkten?
 (b) Vad säger Lyapunovs metod om stabiliteten för den kritiska punkten? (Ledning: det finns en Lyapunovfunktion som är uppbyggd av $1 - \cos x$ och y^2 .)

(4 p)

6. Denna uppgift gäller existens och entydighet för lösningar
- $y = y(t)$
- till initialvärdesproblemet

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = 0,$$

där $f(t, y)$ är en funktion definierad på en rektangel R i ty -planet som innehåller punkten $(0, 0)$.

- (a) Formulera Picards sats som garanterar att initialvärdesproblemet har en unik lösning. Var noggrann när du anger villkoren i satsen.
 (b) I beviset av Picards sats definieras en följd av $y = \phi_n(t)$ av approximativa lösningar genom $\phi_0(t) = 0$ och $\phi_{n+1}(t) = \int_0^t f(s, \phi_n(s)) ds$. En del av beviset visar att det finns ett $h > 0$ så att alla $\phi_n(t)$ är definierade för $|t| \leq h$. Med detta, bevisa att

$$|\phi_{n+1}(t) - \phi_n(t)| \leq \frac{MK^n h^{n+1}}{(n+1)!}$$

för alla $n = 0, 1, 2, \dots$, där M, K är konstanter sådana att $|f| < M$ och $|\partial f / \partial y| < K$ på R .

(4 p)

Table of Integrals*

Basic Forms

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \quad (1)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| \quad (2)$$

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (3)$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b| \quad (4)$$

Integrals of Rational Functions

$$\int \frac{1}{(x+a)^2} dx = -\frac{1}{x+a} \quad (5)$$

$$\int (x+a)^n dx = \frac{(x+a)^{n+1}}{n+1}, n \neq -1 \quad (6)$$

$$\int x(x+a)^n dx = \frac{(x+a)^{n+1}((n+1)x-a)}{(n+1)(n+2)} \quad (7)$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x \quad (8)$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} \quad (9)$$

$$\int \frac{x}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln |a^2+x^2| \quad (10)$$

$$\int \frac{x^2}{a^2+x^2} dx = x - a \tan^{-1} \frac{x}{a} \quad (11)$$

$$\int \frac{x^3}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}a^2 \ln |a^2+x^2| \quad (12)$$

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \tan^{-1} \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} \quad (13)$$

$$\int \frac{1}{(x+a)(x+b)} dx = \frac{1}{b-a} \ln \frac{a+x}{b+x}, a \neq b \quad (14)$$

$$\int \frac{x}{(x+a)^2} dx = \frac{a}{a+x} + \ln |a+x| \quad (15)$$

$$\int \frac{x}{ax^2+bx+c} dx = \frac{1}{2a} \ln |ax^2+bx+c| - \frac{b}{a\sqrt{4ac-b^2}} \tan^{-1} \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} \quad (16)$$

Integrals with Roots

$$\int \sqrt{x-a} dx = \frac{2}{3} (x-a)^{3/2} \quad (17)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x \pm a}} dx = 2\sqrt{x \pm a} \quad (18)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x}} dx = -2\sqrt{a-x} \quad (19)$$

$$\int x\sqrt{x-a} dx = \frac{2}{3}a(x-a)^{3/2} + \frac{2}{5}(x-a)^{5/2} \quad (20)$$

$$\int \sqrt{ax+b} dx = \left(\frac{2b}{3a} + \frac{2x}{3} \right) \sqrt{ax+b} \quad (21)$$

$$\int (ax+b)^{3/2} dx = \frac{2}{5a} (ax+b)^{5/2} \quad (22)$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x \pm a}} dx = \frac{2}{3} (x \mp 2a) \sqrt{x \pm a} \quad (23)$$

$$\int \sqrt{\frac{x}{a-x}} dx = -\sqrt{x(a-x)} - a \tan^{-1} \frac{\sqrt{x(a-x)}}{x-a} \quad (24)$$

$$\int \sqrt{\frac{x}{a+x}} dx = \sqrt{x(a+x)} - a \ln [\sqrt{x} + \sqrt{x+a}] \quad (25)$$

$$\int x\sqrt{ax+b} dx = \frac{2}{15a^2} (-2b^2 + abx + 3a^2x^2) \sqrt{ax+b} \quad (26)$$

$$\int \sqrt{x(ax+b)} dx = \frac{1}{4a^{3/2}} \left[(2ax+b) \sqrt{ax(ax+b)} - b^2 \ln |a\sqrt{x} + \sqrt{a(ax+b)}| \right] \quad (27)$$

$$\int \sqrt{x^3(ax+b)} dx = \left[\frac{b}{12a} - \frac{b^2}{8a^2x} + \frac{x}{3} \right] \sqrt{x^3(ax+b)} + \frac{b^3}{8a^{5/2}} \ln |a\sqrt{x} + \sqrt{a(ax+b)}| \quad (28)$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{1}{2}a^2 \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| \quad (29)$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2}a^2 \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (30)$$

$$\int x\sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{3} (x^2 \pm a^2)^{3/2} \quad (31)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| \quad (32)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \sin^{-1} \frac{x}{a} \quad (33)$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \sqrt{x^2 \pm a^2} \quad (34)$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = -\sqrt{a^2 - x^2} \quad (35)$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 \pm a^2} \mp \frac{1}{2}a^2 \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| \quad (36)$$

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c} dx = \frac{b+2ax}{4a} \sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{4ac-b^2}{8a^{3/2}} \ln |2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}| \quad (37)$$

$$\int x\sqrt{ax^2+bx+c} dx = \frac{1}{48a^{5/2}} \left(2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c} \times (-3b^2+2abx+8a(c+ax^2)) + 3(b^3-4abc) \ln |b+2ax+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}| \right) \quad (38)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln |2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}| \quad (39)$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = \frac{1}{a} \sqrt{ax^2+bx+c} - \frac{b}{2a^{3/2}} \ln |2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}| \quad (40)$$

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}} \quad (41)$$

Integrals with Logarithms

$$\int \ln ax dx = x \ln ax - x \quad (42)$$

$$\int \frac{\ln ax}{x} dx = \frac{1}{2} (\ln ax)^2 \quad (43)$$

$$\int \ln(ax+b) dx = \left(x + \frac{b}{a} \right) \ln(ax+b) - x, a \neq 0 \quad (44)$$

$$\int \ln(x^2+a^2) dx = x \ln(x^2+a^2) + 2a \tan^{-1} \frac{x}{a} - 2x \quad (45)$$

$$\int \ln(x^2-a^2) dx = x \ln(x^2-a^2) + a \ln \frac{x+a}{x-a} - 2x \quad (46)$$

$$\int \ln(ax^2+bx+c) dx = \frac{1}{a} \sqrt{4ac-b^2} \tan^{-1} \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} - 2x + \left(\frac{b}{2a} + x \right) \ln(ax^2+bx+c) \quad (47)$$

$$\int x \ln(ax+b) dx = \frac{bx}{2a} - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{b^2}{a^2} \right) \ln(ax+b) \quad (48)$$

$$\int x \ln(a^2-b^2x^2) dx = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{a^2}{b^2} \right) \ln(a^2-b^2x^2) \quad (49)$$

Integrals with Exponentials

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} \quad (50)$$

$$\int \sqrt{x} e^{ax} dx = \frac{1}{a} \sqrt{x} e^{ax} + \frac{i\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}} \operatorname{erf}(i\sqrt{ax}), \text{ where } \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (51)$$

$$\int x e^x dx = (x-1)e^x \quad (52)$$

$$\int x e^{ax} dx = \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \right) e^{ax} \quad (53)$$

$$\int x^2 e^x dx = (x^2 - 2x + 2) e^x \quad (54)$$

$$\int x^2 e^{ax} dx = \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right) e^{ax} \quad (55)$$

$$\int x^3 e^x dx = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) e^x \quad (56)$$

$$\int x^n e^{ax} dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx \quad (57)$$

$$\int x^n e^{ax} dx = \frac{(-1)^n}{a^{n+1}} \Gamma[1+n, -ax], \text{ where } \Gamma(a, x) = \int_x^\infty t^{a-1} e^{-t} dt \quad (58)$$

$$\int e^{ax^2} dx = -\frac{i\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \operatorname{erf}(i\sqrt{a}x) \quad (59)$$

$$\int e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \operatorname{erf}(x\sqrt{a}) \quad (60)$$

$$\int x e^{-ax^2} dx = -\frac{1}{2a} e^{-ax^2} \quad (61)$$

$$\int x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{a^3}} \operatorname{erf}(x\sqrt{a}) - \frac{x}{2a} e^{-ax^2} \quad (62)$$

*© 2014. From <http://integral-table.com>, last revised June 14, 2014. This material is provided as is without warranty or representation about the accuracy, correctness or suitability of the material for any purpose, and is licensed under the Creative Commons Attribution-Noncommercial-ShareAlike 3.0 United States License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/> or send a letter to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.

Integrals with Trigonometric Functions

$$\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax \quad (63)$$

$$\int \sin^2 ax dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a} \quad (64)$$

$$\int \sin^n ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax {}_2F_1 \left[\frac{1}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{3}{2}, \cos^2 ax \right] \quad (65)$$

$$\int \sin^3 ax dx = -\frac{3 \cos ax}{4a} + \frac{\cos 3ax}{12a} \quad (66)$$

$$\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax \quad (67)$$

$$\int \cos^2 ax dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a} \quad (68)$$

$$\int \cos^p ax dx = -\frac{1}{a(1+p)} \cos^{1+p} ax \times {}_2F_1 \left[\frac{1+p}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3+p}{2}, \cos^2 ax \right] \quad (69)$$

$$\int \cos^3 ax dx = \frac{3 \sin ax}{4a} + \frac{\sin 3ax}{12a} \quad (70)$$

$$\int \cos ax \sin bxdx = \frac{\cos[(a-b)x]}{2(a-b)} - \frac{\cos[(a+b)x]}{2(a+b)}, a \neq b \quad (71)$$

$$\int \sin^2 ax \cos bxdx = -\frac{\sin[(2a-b)x]}{4(2a-b)} + \frac{\sin bx}{2b} - \frac{\sin[(2a+b)x]}{4(2a+b)} \quad (72)$$

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \frac{1}{3} \sin^3 x \quad (73)$$

$$\int \cos^2 ax \sin bxdx = \frac{\cos[(2a-b)x]}{4(2a-b)} - \frac{\cos bx}{2b} - \frac{\cos[(2a+b)x]}{4(2a+b)} \quad (74)$$

$$\int \cos^2 ax \sin ax dx = -\frac{1}{3a} \cos^3 ax \quad (75)$$

$$\int \sin^2 ax \cos^2 bxdx = \frac{x}{4} - \frac{\sin 2ax}{8a} - \frac{\sin[2(a-b)x]}{16(a-b)} + \frac{\sin 2bx}{8b} - \frac{\sin[2(a+b)x]}{16(a+b)} \quad (76)$$

$$\int \sin^2 ax \cos^2 ax dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4ax}{32a} \quad (77)$$

$$\int \tan ax dx = -\frac{1}{a} \ln \cos ax \quad (78)$$

$$\int \tan^2 ax dx = -x + \frac{1}{a} \tan ax \quad (79)$$

$$\int \tan^n ax dx = \frac{\tan^{n+1} ax}{a(1+n)} \times {}_2F_1 \left(\frac{n+1}{2}, 1, \frac{n+3}{2}, -\tan^2 ax \right) \quad (80)$$

$$\int \tan^3 ax dx = \frac{1}{a} \ln \cos ax + \frac{1}{2a} \sec^2 ax \quad (81)$$

$$\int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| = 2 \tanh^{-1} \left(\tan \frac{x}{2} \right) \quad (82)$$

$$\int \sec^2 ax dx = \frac{1}{a} \tan ax \quad (83)$$

$$\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \tan x| \quad (84)$$

$$\int \sec x \tan x dx = \sec x \quad (85)$$

$$\int \sec^2 x \tan x dx = \frac{1}{2} \sec^2 x \quad (86)$$

$$\int \sec^n x \tan x dx = \frac{1}{n} \sec^n x, n \neq 0 \quad (87)$$

$$\int \csc x dx = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| = \ln |\csc x - \cot x| + C \quad (88)$$

$$\int \csc^2 ax dx = -\frac{1}{a} \cot ax \quad (89)$$

$$\int \csc^3 x dx = -\frac{1}{2} \cot x \csc x + \frac{1}{2} \ln |\csc x - \cot x| \quad (90)$$

$$\int \csc^n x \cot x dx = -\frac{1}{n} \csc^n x, n \neq 0 \quad (91)$$

$$\int \sec x \csc x dx = \ln |\tan x| \quad (92)$$

Products of Trigonometric Functions and Monomials

$$\int x \cos x dx = \cos x + x \sin x \quad (93)$$

$$\int x \cos ax dx = \frac{1}{a^2} \cos ax + \frac{x}{a} \sin ax \quad (94)$$

$$\int x^2 \cos x dx = 2x \cos x + (x^2 - 2) \sin x \quad (95)$$

$$\int x^2 \cos ax dx = \frac{2x \cos ax}{a^2} + \frac{a^2 x^2 - 2}{a^3} \sin ax \quad (96)$$

$$\int x^n \cos x dx = -\frac{1}{2} (i)^{n+1} [\Gamma(n+1, -ix) + (-1)^n \Gamma(n+1, ix)] \quad (97)$$

$$\int x^n \cos ax dx = \frac{1}{2} (ia)^{1-n} [(-1)^n \Gamma(n+1, -iax) - \Gamma(n+1, iax)] \quad (98)$$

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \sin x \quad (99)$$

$$\int x \sin ax dx = -\frac{x \cos ax}{a} + \frac{\sin ax}{a^2} \quad (100)$$

$$\int x^2 \sin x dx = (2 - x^2) \cos x + 2x \sin x \quad (101)$$

$$\int x^2 \sin ax dx = \frac{2 - a^2 x^2}{a^3} \cos ax + \frac{2x \sin ax}{a^2} \quad (102)$$

$$\int x^n \sin x dx = -\frac{1}{2} (i)^n [\Gamma(n+1, -ix) - (-1)^n \Gamma(n+1, -ix)] \quad (103)$$

Products of Trigonometric Functions and Exponentials

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) \quad (104)$$

$$\int e^{bx} \sin ax dx = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{bx} (b \sin ax - a \cos ax) \quad (105)$$

$$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) \quad (106)$$

$$\int e^{bx} \cos ax dx = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{bx} (a \sin ax + b \cos ax) \quad (107)$$

$$\int x e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\cos x - x \cos x + x \sin x) \quad (108)$$

$$\int x e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (x \cos x - \sin x + x \sin x) \quad (109)$$

Integrals of Hyperbolic Functions

$$\int \cosh ax dx = \frac{1}{a} \sinh ax \quad (110)$$

$$\int e^{ax} \cosh bxdx = \begin{cases} \frac{e^{ax}}{a^2 - b^2} [a \cosh bx - b \sinh bx] & a \neq b \\ \frac{e^{2ax}}{4a} + \frac{x}{2} & a = b \end{cases} \quad (111)$$

$$\int \sinh ax dx = \frac{1}{a} \cosh ax \quad (112)$$

$$\int e^{ax} \sinh bxdx = \begin{cases} \frac{e^{ax}}{a^2 - b^2} [-b \cosh bx + a \sinh bx] & a \neq b \\ \frac{e^{2ax}}{4a} - \frac{x}{2} & a = b \end{cases} \quad (113)$$

$$\int e^{ax} \tanh bxdx = \begin{cases} \frac{e^{(a+2b)x}}{(a+2b)} {}_2F_1 \left[1 + \frac{a}{2b}, 1, 2 + \frac{a}{2b}, -e^{2bx} \right] - \frac{1}{a} e^{ax} {}_2F_1 \left[\frac{a}{2b}, 1, 1E, -e^{2bx} \right] & a \neq b \\ \frac{e^{ax} - 2 \tan^{-1}[e^{ax}]}{a} & a = b \end{cases} \quad (114)$$

$$\int \tanh ax dx = \frac{1}{a} \ln \cosh ax \quad (115)$$

$$\int \cos ax \cosh bxdx = \frac{1}{a^2 + b^2} [a \sin ax \cosh bx + b \cos ax \sinh bx] \quad (116)$$

$$\int \cos ax \sinh bxdx = \frac{1}{a^2 + b^2} [b \cos ax \cosh bx + a \sin ax \sinh bx] \quad (117)$$

$$\int \sin ax \cosh bxdx = \frac{1}{a^2 + b^2} [-a \cos ax \cosh bx + b \sin ax \sinh bx] \quad (118)$$

$$\int \sin ax \sinh bxdx = \frac{1}{a^2 + b^2} [b \cosh bx \sin ax - a \cos ax \sinh bx] \quad (119)$$

$$\int \sinh ax \cosh bxdx = \frac{1}{4a} [-2ax + \sinh 2ax] \quad (120)$$

$$\int \sinh ax \cosh bxdx = \frac{1}{b^2 - a^2} [b \cosh bx \sinh ax - a \cosh ax \sinh bx] \quad (121)$$



SF1683 Differentialekvationer och transformmetoder, del 1
Tentamen
Tisdag den 22 oktober 2024

Skrivtid: 08:00-12:00

Tillåtna hjälpmedel: inga (förutom det bifogade formelbladet)

Examinator: Mattias Dahl

Tentamen består av sex uppgifter uppdelade i två delar. Del I utgörs av de tre första uppgifterna som testar förmågan att lösa grundläggande problem. Del II utgörs av de tre sista uppgifterna och testar förmågan att lösa mer avancerade problem som även kan vara av teoretisk karaktär och är avsedda främst för högre betyg. Varje uppgift ger maximalt fyra poäng. Bonuspoäng från lappskrivningarna adderas till erhållna poäng på del I upp till maximalt 12 poäng.

Betygsgränserna vid tentamen ges av följande tabell.

Fx	E	D	C	B	A
11	12	14	16	19	21

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Lös följande initialvärdesproblem för $y = y(x)$ och bestäm lösningarnas existensintervall.

(a) $y' = -3y^{4/3} \sin x$, $y(\pi/2) = 1$, (b) $y^2 + 4xy + (2xy + 2x^2) \frac{dy}{dx} = 0$, $y(1) = 1$.

(För båda problemen kan lösningen skrivas på explicit form.) (4 p)

2. Den homogena ekvationen $y'' - 6t^{-2}y = 0$ för $y = y(t)$, $t > 0$, har en lösning $y_1(t) = t^{-2}$. Bestäm den allmänna lösningen till den inhomogena ekvationen

$$y'' - 6t^{-2}y = 5t - 4.$$

(4 p)

3. Matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ har det dubbla egenvärdet $r = -3$. Bestäm den fundamentalmatris $\Phi(t)$ till systemet $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ för vilken $\Phi(0)$ är lika med identitetsmatrisen $\mathbf{I}$. (4 p)

DEL II – AVANCERADE PROBLEM

4. Visa att ekvationen

$$x^2 y'' + xy' + (x-1)y = 0$$

för $y = y(x)$ har en reguljär singulär punkt vid $x = 0$. Bestäm en serielösning av Frobeniustyp vid $x = 0$ till ekvationen. För detta ska du ange den rekursionsrelation som ger koefficienterna i serielösningen, samt beräkna minst fyra noll-skiljda termer. För vilka x konvergerar denna serielösning? Förklara också varför denna serieansats inte ger en andra linjärt oberoende lösning. **(4 p)**

5. Den icke linjära ekvationen

$$x'' + (1 - (x')^2)x' + x = 0$$

för $x = x(t)$ har en lösning $x(t) = 0$. Om vi sätter $y(t) = x'(t)$ så ger ekvationen ett autonomt system för $(x(t), y(t))$ för vilket $(0, 0)$ är en kritisk punkt.

- (a) Förklara vad det betyder att en kritisk punkt är (asymptotiskt) stabil resp. instabil.
- (b) Vad säger metoden med linjärisering om stabiliteten för den kritiska punkten i denna uppgift?
- (c) Visa att den kritiska punkten är stabil med Lyapunovs metod.

(4 p)

6. Denna uppgift gäller existens och entydighet för lösningar
- $y = y(t)$
- till initialvärdesproblemet

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = 0,$$

där funktionen $f(t, y)$ är definierad på en rektangel R i ty -planet med $(0, 0) \in R$.

- (a) Formulera Picards sats som garanterar att initialvärdesproblemet har en unik lösning. Var noggrann när du anger villkoren i satsen.

I beviset av Picards sats definieras en följd av $y = \phi_n(t)$ av approximativa lösningar genom $\phi_0(t) = 0$ och $\phi_{n+1}(t) = \int_0^t f(s, \phi_n(s)) ds$. En del av beviset visar att det finns ett $h > 0$ så att alla $\phi_n(t)$ är definierade för $|t| \leq h$. Weierstrass M -test säger att om en följd av funktioner $f_k(t)$ uppfyller $|f_k(t)| \leq M_k$ för alla t där $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$ konvergerar så konvergerar serien av funktioner $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(t)$ likformigt.

- (b) Visa att följden $f_k(t) = \phi_k(t) - \phi_{k-1}(t)$ uppfyller villkoren för Weierstrass M -test. Förklara kort hur existensen av en lösning följer av detta.

(4 p)

FORMELBLAD

Trigonometriska formler

- (1) $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$
- (2) $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$
- (3) $\sin n\pi = 0, \quad n \in \mathbb{Z}$
- (4) $\cos n\pi = (-1)^n, \quad n \in \mathbb{Z}$
- (5) $\sin \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$
- (6) $\tan \alpha = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$
- (7) $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$
- (8) $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$
- (9) $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$
- (10) $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$
- (11) $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$
- (12) $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
- (13) $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$
- (14) $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$
- (15) $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$
- (16) $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$
- (17) $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\alpha$
- (18) $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\alpha$
- (19) $\sin^3 \alpha = \frac{1}{4}(3 \sin \alpha - \sin 3\alpha)$
- (20) $\cos^3 \alpha = \frac{1}{4}(3 \cos \alpha + \cos 3\alpha)$
- (21) $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$
- (22) $\cos \alpha = \frac{1}{2}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})$
- (23) $\sin \alpha = \frac{1}{2i}(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})$
- (24) $\cosh \alpha = \frac{1}{2}(e^\alpha + e^{-\alpha})$
- (25) $\sinh \alpha = \frac{1}{2}(e^\alpha - e^{-\alpha})$
- (26) $\cosh^2 \alpha - \sinh^2 \alpha = 1$

Integraler

- (27) $\int x^p dx = \frac{1}{p+1} x^{p+1}, \quad p \neq -1$
- (28) $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b|$

- (29) $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}$
- (30) $\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \tan^{-1} \frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}}$
- (31) $\int \frac{1}{(x+a)(x+b)} dx = \frac{1}{b-a} \ln \frac{a+x}{b+x}, \quad a \neq b$
- (32) $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{1}{2} a^2 \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|$
- (33) $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2} a^2 \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$
- (34) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|$
- (35) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \sin^{-1} \frac{x}{a}$
- (36) $\int x^p \ln ax dx = x^{p+1} \left(\frac{\ln ax}{p+1} - \frac{1}{(p+1)^2} \right), \quad p \neq -1$
- (37) $\int \frac{\ln ax}{x} dx = \frac{1}{2} (\ln ax)^2$
- (38) $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$
- (39) $\int x e^{ax} dx = \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \right) e^{ax}$
- (40) $\int x^2 e^{ax} dx = \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right) e^{ax}$
- (41) $\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax$
- (42) $\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax$
- (43) $\int \tan ax dx = -\frac{1}{a} \ln |\cos ax|$
- (44) $\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \tan x \right| = 2 \tanh^{-1} \left(\tan \frac{x}{2} \right)$
- (45) $\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right|$
- (46) $\int x \cos ax dx = \frac{1}{a^2} \cos ax + \frac{x}{a} \sin ax$
- (47) $\int x^2 \cos ax dx = \frac{2x \cos ax}{a^2} + \frac{a^2 x^2 - 2}{a^3} \sin ax$
- (48) $\int x \sin ax dx = -\frac{x \cos ax}{a} + \frac{\sin ax}{a^2}$
- (49) $\int x^2 \sin ax dx = \frac{2 - a^2 x^2}{a^3} \cos ax + \frac{2x \sin ax}{a^2}$
- (50) $\int e^{bx} \cos ax dx = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{bx} (a \sin ax + b \cos ax)$
- (51) $\int e^{bx} \sin ax dx = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{bx} (b \sin ax - a \cos ax)$



SF1683 Differentialekvationer och transformmetoder, del 1
Tentamen
Måndag den 16 december 2024

Skrivtid: 08:00-12:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: Mattias Dahl

Tentamen består av sex uppgifter uppdelade i två delar. Del I utgörs av de tre första uppgifterna som testar förmågan att lösa grundläggande problem. Del II utgörs av de tre sista uppgifterna och testar förmågan att lösa mer avancerade problem som även kan vara av teoretisk karaktär och är avsedda främst för högre betyg. Varje uppgift ger maximalt fyra poäng. Bonuspoäng från lappskrivningarna adderas till erhållna poäng på del I upp till maximalt 12 poäng.

Betygsgränserna vid tentamen ges av följande tabell.

Fx	E	D	C	B	A
11	12	14	16	19	21

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. En av följande ekvationer är exakt. Lös den ekvationen med initialvillkoret $y(1) = 2$. Ange lösningens existensintervall.

$$(1) \quad (1 + \ln x) \frac{dy}{dx} = 1 + \ln y + \frac{y}{x},$$

$$(2) \quad (1 - \ln x) \frac{dy}{dx} = 1 + \ln y + \frac{y}{x},$$

$$(3) \quad (1 - \ln x) \frac{dy}{dx} = 1 + \ln x + \frac{y}{x}.$$

(4 p)

2. Bestäm de kritiska punkterna till följande autonoma system för $(x, y) = (x(t), y(t))$ samt avgör om de är stabila.

$$\begin{cases} x' = y^2 - x^2 \\ y' = 1 - x \end{cases}.$$

(4 p)

3. Hitta den allmänna lösningen till det homogena systemet

$$\mathbf{x}'(t) = \frac{1}{t} \begin{pmatrix} 11 & 18 \\ -6 & -10 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t), \quad t > 0,$$

genom en ansats av typen $\mathbf{x}(t) = t^r \boldsymbol{\xi}$, där r är ett tal och $\boldsymbol{\xi}$ är en vektor. Lös därefter det inhomogena systemet

$$\mathbf{x}'(t) = \frac{1}{t} \begin{pmatrix} 11 & 18 \\ -6 & -10 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} -3e^t \\ 2e^t \end{pmatrix}.$$

(4 p)

DEL II – AVANCERADE PROBLEM

4. (a) Bestäm den serielösning $y = y_1(x)$ vid $x = 0$ till ekvationen

$$y'' - (x+1)y' - y = 0$$

som uppfyller $y_1(0) = 1$ och $y_1'(0) = -1$. För detta ska du ange den rekursionsrelation som ger koefficienterna i serielösningen, samt beräkna minst fem termer i serien.

- (b) Låt $y = y_2(x)$ vara den lösning till ekvationen ovan som uppfyller $y_2(0) = 4$ och $y_2'(0) = 1$ (du behöver inte bestämma en serielösning för $y_2(x)$). Använd Abels sats för att beräkna Wronskianen $W[y_1, y_2](x)$.

(4 p)

5. (a) Ekvationen $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$ för $y = y(x)$ kallas *exakt* om den kan skrivas på formen $[P(x)y']' + [f(x)y]' = 0$ för någon funktion $f(x)$. Bestäm ett villkor på koefficienterna $P(x), Q(x), R(x)$ för att ekvationen ska vara exakt.

- (b) Bestäm $R(x)$ så att ekvationen

$$(x+1)y'' + (2 - (x+1)\tan x)y' + R(x)y = 0$$

är exakt. Bestäm den allmänna lösningen till ekvationen med denna $R(x)$.

(4 p)

6. Denna uppgift gäller entydighet för lösningar $y = y(t)$ till initialvärdesproblemet

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = 0, \tag{1}$$

där $f(t, y)$ är en kontinuerlig funktion definierad på något område R i ty -planet som innehåller punkten $(0, 0)$.

- (a) Ge ett exempel på ett initialvärdesproblem som (1) med två olika funktioner som lösningar. Ge en noggrann förklaring varför de funktioner du anger är lösningar.
 (b) Antag nu att funktionen $f(t, y)$ i (1) dessutom uppfyller ett Lipschitz-villkor i y , alltså att det finns en konstant $C > 0$ så att

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq C|y_1 - y_2|$$

för alla $(t, y_1), (t, y_2)$ i området R . Visa att om $\phi(t)$ och $\psi(t)$ båda löser problemet (1) så är $\phi(t) = \psi(t)$.

(4 p)

FORMELBLAD

Trigonometriska formler

- (1) $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$
- (2) $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$
- (3) $\sin n\pi = 0, \quad n \in \mathbb{Z}$
- (4) $\cos n\pi = (-1)^n, \quad n \in \mathbb{Z}$
- (5) $\sin \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$
- (6) $\tan \alpha = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$
- (7) $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$
- (8) $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$
- (9) $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$
- (10) $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$
- (11) $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$
- (12) $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
- (13) $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$
- (14) $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$
- (15) $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$
- (16) $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$
- (17) $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\alpha$
- (18) $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\alpha$
- (19) $\sin^3 \alpha = \frac{1}{4}(3 \sin \alpha - \sin 3\alpha)$
- (20) $\cos^3 \alpha = \frac{1}{4}(3 \cos \alpha + \cos 3\alpha)$
- (21) $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$
- (22) $\cos \alpha = \frac{1}{2}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})$
- (23) $\sin \alpha = \frac{1}{2i}(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})$
- (24) $\cosh \alpha = \frac{1}{2}(e^\alpha + e^{-\alpha})$
- (25) $\sinh \alpha = \frac{1}{2}(e^\alpha - e^{-\alpha})$
- (26) $\cosh^2 \alpha - \sinh^2 \alpha = 1$

Integraler

- (27) $\int x^p dx = \frac{1}{p+1} x^{p+1}, \quad p \neq -1$
- (28) $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b|$

- (29) $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}$
- (30) $\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \tan^{-1} \frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}}$
- (31) $\int \frac{1}{(x+a)(x+b)} dx = \frac{1}{b-a} \ln \frac{a+x}{b+x}, \quad a \neq b$
- (32) $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{1}{2} a^2 \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|$
- (33) $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2} a^2 \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$
- (34) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|$
- (35) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \sin^{-1} \frac{x}{a}$
- (36) $\int x^p \ln ax dx = x^{p+1} \left(\frac{\ln ax}{p+1} - \frac{1}{(p+1)^2} \right), \quad p \neq -1$
- (37) $\int \frac{\ln ax}{x} dx = \frac{1}{2} (\ln ax)^2$
- (38) $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$
- (39) $\int x e^{ax} dx = \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \right) e^{ax}$
- (40) $\int x^2 e^{ax} dx = \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right) e^{ax}$
- (41) $\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax$
- (42) $\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax$
- (43) $\int \tan ax dx = -\frac{1}{a} \ln |\cos ax|$
- (44) $\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \tan x \right| = 2 \tanh^{-1} \left(\tan \frac{x}{2} \right)$
- (45) $\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right|$
- (46) $\int x \cos ax dx = \frac{1}{a^2} \cos ax + \frac{x}{a} \sin ax$
- (47) $\int x^2 \cos ax dx = \frac{2x \cos ax}{a^2} + \frac{a^2 x^2 - 2}{a^3} \sin ax$
- (48) $\int x \sin ax dx = -\frac{x \cos ax}{a} + \frac{\sin ax}{a^2}$
- (49) $\int x^2 \sin ax dx = \frac{2 - a^2 x^2}{a^3} \cos ax + \frac{2x \sin ax}{a^2}$
- (50) $\int e^{bx} \cos ax dx = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{bx} (a \sin ax + b \cos ax)$
- (51) $\int e^{bx} \sin ax dx = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{bx} (b \sin ax - a \cos ax)$



SF1683 Differentialekvationer och transformmetoder, del 1
Tentamen
Torsdag den 23 oktober 2025

Skrivtid: 08:00-12:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: Mattias Dahl

Tentamen består av sex uppgifter uppdelade i två delar. Del I utgörs av de tre första uppgifterna som testar förmågan att lösa grundläggande problem. Del II utgörs av de tre sista uppgifterna och testar förmågan att lösa mer avancerade problem som även kan vara av teoretisk karaktär och är avsedda främst för högre betyg. Varje uppgift ger maximalt fyra poäng. Bonuspoäng från lappskrivningarna adderas till erhållna poäng på del I upp till maximalt 12 poäng.

Betygsgränserna vid tentamen ges av följande tabell.

Fx	E	D	C	B	A
11	12	14	16	19	21

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Lös följande initialvärdesproblem för $y = y(x)$ och bestäm lösningarnas existensintervall.

(a) $(1 - x^2)y' + 4xy = 9x(1 - x^2)^{-1}$, $y(2) = 4$, (b) $2xy + (x^2 - 2)\frac{dy}{dx} = 0$, $y(1) = 2$.

(För båda problemen kan lösningen skrivas på explicit form.) (4 p)

2. Den homogena ekvationen $y'' + 2y' + y = 0$ har två lösningar $y_1(x) = e^{-x}$ och $y_2(x) = xe^{-x}$. Bestäm den allmänna lösningen till ekvationen

$$y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{1 + x^2}.$$

(4 p)

3. (a) För en av matriserna $\mathbf{A}$ här nedanför gäller att det linjära systemet av differentialekvationer $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ har lösningar $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ som är begränsade, men inte går mot noll då $t \rightarrow \infty$. Bestäm två linjärt oberoende lösningar till systemet med den matrisen.

- (b) För en av matriserna gäller att Wronskianen $W[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2](t)$ för två linjärt oberoende lösningar $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)$ till systemet $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ är en icke-konstant funktion. Beräkna denna Wronskian, upp till en multiplikativ konstant.

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(4 p)

DEL II – AVANCERADE PROBLEM

4. Visa att ekvationen

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - 4)y = 0, \quad y = y(x),$$

har en reguljär singulär punkt vid $x = 0$. Använd en serieansats av Frobeniustyp för att hitta en lösning till ekvationen. För detta ska du ange den rekursionsrelation som ger koefficienterna i serien samt beräkna minst 3 nollskiljda termer. Visa dessutom att denna serieansats inte kan ge en andra linjärt oberoende lösning (du behöver heller inte bestämma en andra lösning).

(4 p)

5. Den icke linjära ekvationen

$$x'' = -x + \frac{1}{3}x^3$$

för $x = x(t)$ har tre konstanta lösningar $x(t) = 0, x(t) = \pm\sqrt{3}$. Om vi sätter $y(t) = x'(t)$ så ger ekvationen ett autonomt system för $(x(t), y(t))$ vars kritiska punkter ges av de konstanta lösningarna.

- (a) Ge de exakta definitionerna av vad som menas med att en kritisk punkt för ett autonomt system är asymptotiskt stabil, stabil, resp. instabil.
- (b) Avgör stabilitetsegenskapen för de tre kritiska punkterna. (*Ledning:* För en av de kritiska punkterna kan en linjärkombination av termer x^p, y^p med $p = 2, 4$ användas som Lyapunovfunktion.)
- (4 p)**

6. Picards sats säger att initialvärdesproblemet $y' = f(t, y), y(0) = 0$, har en unik lösning $y = \phi(t)$. Förutsättningen är att funktionen f och dess partiella derivata $\partial f / \partial y$ är kontinuerliga på ett rektangulärt område R som innehåller i origo.

- (a) I beviset av Picards sats definieras en följd av $y = \phi_n(t)$ av approximativa lösningar genom $\phi_0(t) = 0$ och $\phi_{n+1}(t) = \int_0^t f(s, \phi_n(s)) ds$. En del av beviset visar att det finns ett tal $h > 0$ så att alla $\phi_n(t)$ är definierade för $|t| \leq h$. Med detta, bevisa att

$$|\phi_{n+1}(t) - \phi_n(t)| \leq \frac{MK^n h^{n+1}}{(n+1)!}$$

för alla $n = 0, 1, 2, \dots$, där M, K är konstanter sådana att $|f| < M$ och $|\partial f / \partial y| < K$ på R .

- (b) Visa entydigheten, alltså att om $\phi(t), \psi(t)$ är lösningar till initialvärdesproblemet så är $\phi(t) = \psi(t)$.
- (4 p)**

FORMELBLAD

Trigonometriska formler

- (1) $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$
- (2) $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$
- (3) $\sin n\pi = 0, \quad n \in \mathbb{Z}$
- (4) $\cos n\pi = (-1)^n, \quad n \in \mathbb{Z}$
- (5) $\sin \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$
- (6) $\tan \alpha = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$
- (7) $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$
- (8) $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$
- (9) $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$
- (10) $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$
- (11) $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$
- (12) $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
- (13) $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$
- (14) $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$
- (15) $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$
- (16) $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$
- (17) $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\alpha$
- (18) $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\alpha$
- (19) $\sin^3 \alpha = \frac{1}{4}(3 \sin \alpha - \sin 3\alpha)$
- (20) $\cos^3 \alpha = \frac{1}{4}(3 \cos \alpha + \cos 3\alpha)$
- (21) $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$
- (22) $\cos \alpha = \frac{1}{2}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})$
- (23) $\sin \alpha = \frac{1}{2i}(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})$
- (24) $\cosh \alpha = \frac{1}{2}(e^\alpha + e^{-\alpha})$
- (25) $\sinh \alpha = \frac{1}{2}(e^\alpha - e^{-\alpha})$
- (26) $\cosh^2 \alpha - \sinh^2 \alpha = 1$

Integraler

- (27) $\int x^p dx = \frac{1}{p+1} x^{p+1}, \quad p \neq -1$
- (28) $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b|$

- (29) $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}$
- (30) $\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \tan^{-1} \frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}}$
- (31) $\int \frac{1}{(x+a)(x+b)} dx = \frac{1}{b-a} \ln \frac{a+x}{b+x}, \quad a \neq b$
- (32) $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{1}{2} a^2 \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|$
- (33) $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2} a^2 \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$
- (34) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|$
- (35) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \sin^{-1} \frac{x}{a}$
- (36) $\int x^p \ln ax dx = x^{p+1} \left(\frac{\ln ax}{p+1} - \frac{1}{(p+1)^2} \right), \quad p \neq -1$
- (37) $\int \frac{\ln ax}{x} dx = \frac{1}{2} (\ln ax)^2$
- (38) $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$
- (39) $\int x e^{ax} dx = \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \right) e^{ax}$
- (40) $\int x^2 e^{ax} dx = \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right) e^{ax}$
- (41) $\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax$
- (42) $\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax$
- (43) $\int \tan ax dx = -\frac{1}{a} \ln |\cos ax|$
- (44) $\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \tan x \right| = 2 \tanh^{-1} \left(\tan \frac{x}{2} \right)$
- (45) $\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right|$
- (46) $\int x \cos ax dx = \frac{1}{a^2} \cos ax + \frac{x}{a} \sin ax$
- (47) $\int x^2 \cos ax dx = \frac{2x \cos ax}{a^2} + \frac{a^2 x^2 - 2}{a^3} \sin ax$
- (48) $\int x \sin ax dx = -\frac{x \cos ax}{a} + \frac{\sin ax}{a^2}$
- (49) $\int x^2 \sin ax dx = \frac{2 - a^2 x^2}{a^3} \cos ax + \frac{2x \sin ax}{a^2}$
- (50) $\int e^{bx} \cos ax dx = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{bx} (a \sin ax + b \cos ax)$
- (51) $\int e^{bx} \sin ax dx = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{bx} (b \sin ax - a \cos ax)$