

Tentamen, SF1683, Differentialekvationer och Transformmetoder (del 2)
08 januari 2018 kl. 08:00-12:00

Tentamen består av sex uppgifter där vardera uppgift ger maximalt fyra poäng.

Preliminära betygsgränser: A–21 poäng, B–19, C–16, D–13, E–11, Fx–10.

Det finns möjlighet att komplettera betyget Fx inom 4 veckor. Kontakta i så fall Maria Saprykina. Inga hjälpmedel är tillåtna vid tentamen.

OBS: För full poäng krävs fullständiga, tydligt presenterade och välmotiverade lösningar som är lätta att följa. Markera dina svar tydligt.

1. Använd separation av variabler för att lösa randvärdesproblemet

$$u_x(x, y) = u_y(x, y) + u(x, y), \quad u(x, 0) = 4e^{-2x} + 5e^{3x}.$$

2. Låt $H(t)$ vara Heaviside funktion, dvs

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{för } t < 0, \\ 1 & \text{för } t \geq 0. \end{cases}$$

Beteckna $H_c(t) = H(t - c)$.

Laplacetransformen definieras av

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt.$$

Tabellen i [BdP] ger:

$$\mathcal{L}\{\sin at\} = \frac{a}{s^2 + a^2}, \quad s > 0.$$

- a). Visa att $\mathcal{L}\{H_c(t)f(t - c)\} = e^{-cs}\mathcal{L}\{f(t)\}$.

1p.

- b). Använd Laplacetransform-metoden för att lösa begynnelsevärdesproblemet

$$y'' + 9y = f(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

där $f(t) = \sin t$ för $0 \leq t < 2\pi$, and $f(t) = 0$ annars.

3. a). Funktionen

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{för } 0 < x \leq 1, \\ 3 & \text{för } 1 < x \leq \pi \end{cases}$$

utvecklas i en sinus-serie $S(x)$ på intervallet $[0, \pi]$. Ange $S(1)$, $S(2)$ och $S(\pi)$. Formulera satsen som du har använt.

- b). Låt f vara en kontinuerlig 2π -periodisk function som uppfyller $f(x + \pi) = f(x)$ för $x \in [-\pi, \pi]$. Visa att alla de udda Fourierkoefficienterna av f är noll, dvs $c_{2k+1} = 0$, $k \in \mathbb{Z}$.

Vänd!

4. Fouriertransformen definieras av $\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$.

a). Bevisa skalningsformeln för Fouriertransform:

1p.

$$\mathcal{F}[f(at)](\omega) = \frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right), \quad a > 0.$$

- b). Tabellen för Fourier-transformer i [V] ger: $\mathcal{F}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}\right] = e^{-\omega^2/2}$. Använd Fourier-transform för att lösa

3p.

$$e^{-t^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4(t-x)^2} f(x) dx$$

5. a). Vad menas med att $(\phi_n)_n$ utgör en fullständig ON mängd i ett inre produktrum V ?

1p.

b). Formulera Parsevals formel (som relaterar normen av funktionen till dess Fourierkoefficienter);

1p.

c). Antag att $f(x)$ är en kontinuerlig funktion, och

$$\int_{-1}^1 f(x)x^n dx = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Använd b) för att visa att $f(x) = 0$ för alla $x \in [-1, 1]$.

6. a). Verifiera enligt definition att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{för } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{annars,} \end{cases}$$

definierar en tempererad distribution enligt formeln $f[g] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx$.

1p.

b). Beräkna f' i distributionsmening. Förkorta så långt som möjligt.

2p.

c). Beräkna värdet av $f'[e^{-x^2}]$. Svaret skall inte innehålla integraler.

1p.

Lycka till!

**Tentamen i SF1683,
Differentialekvationer och Transformmetoder (del 2)
4 april 2018**

Tentamen består av sex uppgifter där vardera uppgift ger maximalt fyra poäng.

Preliminära betygsgränser: A–21 poäng, B–19, C–16, D–13, E–11, Fx–10.

Det finns möjlighet att komplettera betyget Fx inom 4 veckor. Kontakta i så fall Maria Saprykina. Inga hjälpmedel är tillåtna vid tentamen.

OBS: För full poäng krävs fullständiga, tydligt presenterade och välmotiverade lösningar som är lätta att följa. Markera dina svar tydligt.

1. Betrakta rummet $C([0, 1])$ (rummet av alla kontinuerliga, komplexvärda funktioner definierade på intervallet $[0, 1]$) med den inre produkten

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx.$$

- a). Låt W vara delrummet av $C([0, 1])$ som spänns upp av funktionerna $u_1(x) = 1$ och $u_2 = x^2$. Bestäm en ON-bas för W .

- b). Låt $f(x) = x^3$. Bestäm den funktion (vektor) $u(x)$ i W som minimerar $\|f - u\|$.

2. Finn en lösning $y(x)$ till integralekvationen

$$y(x) = 2e^x + \int_0^x e^{-t+x} y(t) dt, \quad x \geq 0.$$

Tips: Laplacetransform-tabellen ger: $\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s-a}$, $s > a$.

- 3 a). Beräkna samtliga egenvärden till Sturm-Liouvilleproblemet

$$\begin{cases} f'' + \lambda f = 0, & 0 < x < \pi, \\ f(0) = f'(\pi) = 0, \end{cases}$$

och bestäm en egenfunktion för varje egenvärde.

OBS: Motivering av resultatet krävs! Svar utan motivering ger inga poäng.

- b). Låt $(\phi_k(x))_{k=1}^\infty$ vara egenfunktionerna i a). Är det sant att man kan hitta N och $c_1, \dots, c_N$ sådana att för funktionen $\psi(x) = \sum_{k=1}^N c_k \phi_k(x)$ gäller $\int_0^\pi |\sin x - \psi(x)|^2 dx < 0.01$? **1p.**

- c). Beräkna **1p.**

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\int_0^\pi \sin x \cdot \overline{\phi_k(x)} dx \right)^2}{\int_0^\pi |\phi_k(x)|^2 dx}.$$

Vänd!

4 a). Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ x + 2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2x^2, & x \geq 1. \end{cases}$$

definierar en tempererad distribution. Beräkna dess derivata i distributionsmening på två sätt:

a). genom att skriva om den i termer av Heaviside funktion och b). direkt per definition. Förkorta ditt svar så långt det går.

5 a). Betrakta funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & |x| \leq \pi, \\ 0, & |x| > \pi. \end{cases}$$

Beräkna Fouriertransformen av f .

Tips: du kan behöva formeln $2 \cos a \cos b = \cos(a + b) + \cos(a - b)$.

b). Använd resultatet i a) för att beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2 \sin^2 \pi \omega}{(\omega^2 - 1)^2} d\omega.$$

6 a). För en funktion $f \in L^2(\mathbb{T})$ låt $c_n(f)$ beteckna f 's komplexa Fourierkoefficienter. Antag att f är 2π -periodisk, 2 gånger kontinuerligt deriverbar. Uttryck $c_n(f')$ och $c_n(f'')$ genom $c_n(f)$ och n . Motivera! **1p.**

b). Använd Fourierseriemetoden för att bestämma alla 2π -periodiska, 4 gånger kontinuerligt deriverbara funktioner som uppfyller **2p.**

$$y''(t) - 4y(t - \pi/2), \quad t \in \mathbb{R}.$$

c). Ge en kortfattat (2-4 meningar, inte längre) beskrivning av Gibbs fenomenet. Beskrivningen skall vara riktad till en person som kan definitionen av Fourierserier. **1p.**

Tentamen SF1683/SF1632 11 Januari 2019

Tentamen består av sex uppgifter där vardera uppgift ger maximalt fyra poäng.

Preliminära betygsgränser: A–21 poäng, B–19, C–16, D–13, E–11, Fx–10.

Det finns möjlighet att komplettera betyget Fx, information om detta publiceras på Kurshemsidan för SF1683.

Inga hjälpmedel är tillåtna vid tentamen.

På skrivningens baksida finns det dock ett antal formler som ni får använda.

OBS: För full poäng krävs fullständiga, tydligt presenterade och välmotiverade lösningar som är lätta att följa. Markera dina svar tydligt.

Del 1.

1. Lös följande partiella differentialekvation med hjälp av variabelseparation

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} && \text{för } x \in (0,1) \text{ och } t > 0 \\ -\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} &= u(1,t) = 0 && \text{för } t > 0 \\ u(x,0) &= f(x) \end{aligned} \tag{1}$$

där

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{för } 0 < x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{för } x = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{för } \frac{1}{2} < x < 1. \end{cases}$$

Du behöver inte visa att din Fourierserie konvergerar då $t = 0$.

[4 poäng]

2. Låt $V \subset L^2([-1,1]; \mathbb{C})$ vara underrummet som spänns upp av basfunktionerna $\phi_0(x) = 1$ och $\phi_1(x) = x^2$. Hitta den funktion $f \in V$ som minimerar

$$\|\cos(x) - f(x)\|.$$

[4 poäng]

3. Hitta en lösning till följande integralekvation

$$\int_{\mathbb{R}} f(x-t)e^{-|t|}dt = \frac{1}{\cosh(x)}. \tag{2}$$

[4 poäng]

4 a). Beräkna Laplacetransformen av $\cos(ax)$:

$$\mathcal{L}(\cos(ax))(s) = \int_0^\infty \cos(ax)e^{-sx}dx.$$

[1 poäng]

b) Använd Laplacetransformen för att lösa begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} y''(x) + 4y(x) &= 1 && \text{för } x > 0 \\ y(0) &= 0, \quad y'(0) = 1. \end{aligned} \tag{3}$$

[3 poäng]

Vänd!

Del 2.

5. Låt f vara en likformigt kontinuerlig funktion på enhetscirkeln $\mathbb{T}$; d.v.s. för varje $\epsilon > 0$ så existerar det ett $\delta > 0$ så att för alla $x, y \in \mathbb{T}$ så att $|x - y| < \delta$ kommer $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Visa att det, för varje $\epsilon > 0$, finns ett trigonometriskt polynom

$$p_N(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}$$

så att

$$|f(x) - p_N(x)| < \epsilon \text{ för alla } x \in \mathbb{T}.$$

Du får använda att

$$F_N(t) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N D_n(x) = \frac{1}{2\pi(N+1)} \left(\frac{\sin(\frac{1}{2}(N+1)t)}{\sin(\frac{1}{2}t)} \right)^2,$$

där $D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n e^{ikt}$ samt att

$$F_N(t) \geq 0, \quad (4)$$

$$\int_{\mathbb{T}} F_N(t) dt = 1, \quad (5)$$

och att för alla $\delta > 0$ och $x \in \mathbb{T}$ så kommer

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{t \in \mathbb{T}, |t-x| > \delta} F_N(t-x) dt = 0 \quad (6)$$

utan bevis.

[4 poäng]

6. Härled en Lösningformel för lösningen $u(x, t)$ till följande ekvationer:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} &= \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} u(x-y, t) dy \quad \text{för } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x) \end{aligned} \quad (7)$$

där $f \in \mathcal{S}$ är en given funktion i Schwarzklassen.

Din härledning får vara informell; d.v.s. du behöver inte visa att integraler i lösningen är konvergenta, att det är tillåtet att derivera under integraler etc. Ditt svar för innehålla olösta integraler, elementära funktioner (sin, cos exponential-funktionen etc.) och funktionen f .

[4 poäng]

Formler.

Följande formler är tillåtna att använda utan bevis i era lösningar:

1. $\mathcal{L}(f(t))(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-ts} dt$

2. $\mathcal{L}(f'(t))(s) = s\mathcal{L}(f(t))(s) - f(0)$

3. $\mathcal{L}(\sin(ax))(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}$

4. $\mathcal{F}(f(t))(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-it\omega} dt$

5. $\mathcal{F}(e^{-t^2})(\omega) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{\omega^2}{4}}$

6. $\mathcal{F}(1/\cosh(t))(\omega) = \frac{\pi}{\cosh(\pi\omega/2)}$

7. Om $a(n) = \alpha^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ så är z -transformen av $a(n)$ lika med $A(z) = \frac{z}{z-\alpha}$

8. Låt $\theta(n-k) = \begin{cases} 0 & \text{om } 0 \leq n \leq k-1 \\ 1 & \text{om } k \leq n \end{cases}$ då är z -transformen av $\alpha^n \theta(n-k)$ lika med $\frac{z^{k-1}}{z-\alpha}$.

9. $\int x^2 \cos(x) dx = -2 \sin(x) + 2x \cos(x) + x^2 \sin(x).$

Lycka Till!

Tentamen SF1683 16e April 2019

Tentamen består av sex uppgifter där vardera uppgift ger maximalt fyra poäng.

Preliminära betygsgränser: A–21 poäng, B–19, C–16, D–13, E–11, Fx–10.

Det finns möjlighet att komplettera betyget Fx, information om detta publiceras på Kurshemsidan för SF1683.

Inga hjälpmedel är tillåtna vid tentamen.

På skrivningens baksida finns det dock ett antal formler som ni får använda.

OBS: För full poäng krävs fullständiga, tydligt presenterade och välmotiverade lösningar som är lätta att följa. Markera dina svar tydligt.

Del 1.

1. Lös följande partiella differentialekvation med hjälp av variabelseparation

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= 4 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} && \text{för } x \in (0, \pi) \text{ och } t > 0 \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0 && \text{för } t > 0 \\ u(x, 0) &= x && \text{för } x \in (0, \pi). \end{aligned} \tag{1}$$

Du behöver inte visa att din Fourierserie konvergerar då $t = 0$.

[4 poäng]

2. Lös följande differentialekvation med hjälp av Laplacetransformen

$$\begin{aligned} u''(x) + 2u'(x) + 2u(x) &= H(x - \pi) && \text{för } x > 0 \\ u(0) &= 0 \text{ och } u'(0) = 1, \end{aligned}$$

här är $H(x) = \begin{cases} 1 & \text{om } x > 0 \\ 0 & \text{om } x \leq 0 \end{cases}$ Heavisidefunktionen.

[4 poäng]

3. Givet att

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{för } x \leq 0 \\ \sin(x) & \text{för } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 3 & \text{för } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

är en tempererad distribution (du behöver alltså inte visa detta) beräkna derivatan av f direkt utifrån definitionen av en distributions derivata.

[4 poäng]

4. Använd Fouriertransformen för att lösa följande differentialekvation

$$\begin{aligned} u''(x) - 4u(x) &= \delta_0(x) - \delta_2(x) && \text{för } x \in \mathbb{R} \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x) &= 0. \end{aligned}$$

[4 poäng]

Vänd!

Del 2.

5. I den här frågan behandlar vi följande egenvärdesproblem

$$\begin{aligned}y''(x) + \lambda y(x) &= 0 \quad \text{för } x \in (0, \pi/4) \\ y(0) &= y(\pi/4) = 0.\end{aligned}$$

a) Hitta alla egenvärden λ och de till egenvärdena hörande egenfunktionerna y_λ normaliserade så att $\|y_\lambda\| = 1$ (här är $\|y_\lambda\|$ den vanliga L^2 normen på intervallet $(0, \pi/4)$).

[2 poäng]

b) Visa att egenfunktionerna utgör en ortogonal bas för $L^2(0, 2)$. Du får använda alla satser från kursen förutsatt att du kan formulera dem korrekt.

[2 poäng]

6. Antag att f är en kontinuerligt deriverbar L^1 funktion på $\mathbb{R}$. Visa att

$$f(t_0) = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A \hat{f}(\omega) e^{i\omega t_0} d\omega.$$

Du får antaga att alla funktioner är integrerbara och att det är oproblematiskt att byta ordning på integraler.

[4 poäng]

Formler.

Följande formler är tillåtna att använda utan bevis i era lösningar:

1. $\mathcal{L}(f(x))(s) = \int_0^\infty f(x) e^{-xs} dt$

2. $\mathcal{L}(f'(x))(s) = s\mathcal{L}(f(x))(s) - f(0)$

3. $\mathcal{L}(\cos(ax))(s) = \frac{as}{s^2+a^2}$

4. $\mathcal{L}(\sin(ax))(s) = \frac{a}{s^2+a^2}$

5. Låt $\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } x \leq 0 \\ 1 & \text{om } 0 < x \end{cases}$ då är $\mathcal{L}(f(x-T)\theta(x-T))(s) = e^{-Ts}\mathcal{L}(f(x))(s)$.

6. $\mathcal{F}(f(t))(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-it\omega} dt$

7. $\mathcal{F}(e^{-a|t|})(\omega) = \frac{2a}{\omega^2+a^2}$ för $a > 0$

8. $\mathcal{F}(1/\cosh(t))(\omega) = \frac{\pi}{\cosh(\pi\omega/2)}$

9. $\int_0^\infty \frac{\sin(Ax)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ för $A > 0$.

10. **Riemann-Lebesgue Lemma:** För I ett intervall (möjligtvis obegränsat)

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_I f(x) \sin(\lambda x) dx = 0.$$

Lycka Till!



Tentamen 2020-01-13, 8:00-12:00

Institutionen för Matematik

SF1683 Differentialekvationer och transformier Ten2

13e Januari 2019

Examinator: John Andersson

Endast skrivdon (penna, linjal, gradskiva et.c.) är tillåtna. Specifikt så är miniräknare och formelsamling inte tillåtna.

Motivera alla dina lösningar om inget annat anges.

Preliminära betygsgränser: E: 12p, D: 14p, C: 16p, B: 19p, A: 21p.

Del 1.

Uppgift 1a. Definiera inre produkten i $L^2([0, 2], w(x))$ där $w(x) = 1 + x$.

[1 poäng]

b) Hitta det förstegradspolynom $p(x)$ som minimerar

$$\int_0^2 |p(x) - x^2|^2 (1 + x) dx.$$

[3 poäng]

Uppgift 2a) Beräkna fouriertransformen av

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{om } |x| < 1 \\ 0 & \text{om } |x| \geq 1. \end{cases}$$

[3 poäng]

b) Beräkna integralen

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^4 dx.$$

[1 poäng]

Var god vänd!

Uppgift 3. Använd Laplacetransformen för att lösa, för $t > 0$,

$$f(t) + 2 \int_0^t f(\tau) \cos(2t - 2\tau) d\tau = 1.$$

[4 poäng]

Uppgift 4. Lös följande initialvärdesproblem

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + u(x, t) \quad \text{för } x \in (0, \pi) \text{ och } t > 0 \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0 \quad \text{för } t > 0 \\ u(x, 0) &= \cos(x) \quad \text{för } x \in (0, \pi). \end{aligned}$$

[4 poäng]

Del 2.

Uppgift 5. Betrakta $\phi_y(x) = \frac{1}{2}|x - y|$ som en tempererad distribution och definiera, för $f \in \mathcal{S}$,

$$u(y) = \phi_y[f].$$

Visa att

$$\frac{\partial^2 u(y)}{\partial y^2} = f(y).$$

Du får anta att integraler konvergerar och att det är tillåtet att derivera (deriverbara funktioner) under integraltecknet utan bevis.

[4 poäng]

Uppgift 6. Låt f vara en två gånger kontinuerligt deriverbar funktion så att $f, f' \in L^1(\mathbb{R})$. Antag vidare att $\hat{f}(\omega)$ har stöd i $[-M, M]$ (d.v.s. $\hat{f}(\omega) = 0$ för $\omega \notin [-M, M]$). Gäller det att

$$|f'(x)| \leq \frac{M^2}{\pi} \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx \quad \text{för alla } x \in \mathbb{R}?$$

[4 poäng]

Formler.

Du får använda följande formler utan motivering.

- (1) Fouriertransformen $\mathcal{F}(f)(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt$.
- (2) Laplacetransformen $\mathcal{L}(f)(s) = \tilde{f}(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$.
- (3) $\mathcal{L}(f * g)(s) = \tilde{f}(s) \tilde{g}(s)$
- (4) $\mathcal{L}(\cos(t))(s) = \frac{s}{s^2 + 1}$
- (5) $\mathcal{L}(\sin(at))(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}$
- (6) $\mathcal{L}(H(t - a))(s) = \frac{e^{-as}}{s}$, H är Heaviside funktionen och $a \geq 0$.
- (7) $\mathcal{L}(e^{-at} f(t))(s) = \tilde{f}(s + a)$

Lycka till!



Lösningsförslag Tentamen SF1683/29 2020-04-15, 8:00-12:00

Institutionen för Matematik

SF1683/29 Differentialekvationer och transformer Ten2

15e April 2020

Examinator: John Andersson

Endast skrivdon (penna, linjal, gradskiva et.c.) är tillåtna. Specifikt så är miniräknare och formelsamling inte tillåtna.

Motivera alla dina lösningar om inget annat anges.

Preliminära betygsgränser: E: 12p, D: 14p, C: 16p, B: 19p, A: 21p.

Det fanns vissa små variationer i tentamensformuleringen och den här tentan är en typtenta. På quizet förekom det en del typon som är rättade här. Vi kommer att titta på era lösningar och om jag har anledning att tro att mina typon har påverkat era svar negativt så kommer jag att försök kompensera det.

Del 1.

Uppgift 1. Låt $f(x) = e^{2x}$ på $(-\pi, \pi)$ och antag att $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$. Beräkna b_2 . Du behöver endast ange svar, ingen motivering krävs.

[1 poäng]

Lösningsförslag Fråga 1: Vi kan beräkna

$$b_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2x} \sin(2x) dx = -\frac{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}{4\pi}.$$

Uppgift 2. Låt (f, g) beteckna den vanliga inre produkten på $L^2([-1, 1])$. Beräkna (f, g) när: $f(x) = \frac{1}{3+x^2}$ och $g(x) = 2x + 3x^2$. Du behöver endast ange svar, ingen motivering krävs.

[1 poäng]

Lösningsförslag Fråga 2: Vi beräknar

$$\begin{aligned} (f, g) &= \underbrace{\int_{-1}^1 \frac{2x}{3+x^2} dx}_{=0 \text{ udda över jämt intervall}} + \int_{-1}^1 \frac{3x^2}{3+x^2} dx = \\ &= 6 - 3 \int_{-1}^1 \frac{1}{1+(x/\sqrt{3})^2} dx = 6 - 3\sqrt{3} \int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{1+y^2} dy = 6 - 2 \cdot 3\sqrt{3} \arctan(1/\sqrt{3}) = 6 - \sqrt{3}\pi. \end{aligned}$$

Uppgift 3 (SF1683). Givet att $\mathcal{L}(f)(s) = \frac{5s+16}{s^2+6s+8}$ och att $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+a}\right) = e^{-at}$, bräkna $f(t)$. Du behöver endast ange svar, ingen motivering krävs.

[1 poäng]

Lösningsförslag Fråga 3 (SF1683): Partialbråksuppdelning

$$\frac{5s+16}{s^2+6s+8} = \frac{3}{s+2} + \frac{2}{s+4}.$$

Det följer att

$$f(t) = 3\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right) + 2\left(\frac{1}{s+4}\right) = 3e^{-2t} + 2e^{-4t}.$$

Uppgift 3 (SF1629). Givet att $\mathcal{Z}(x(n))(z) = \frac{3z-7}{z^2-5z+6}$, där $\mathcal{Z}(x(n))(z)$ står för z -transformen av $x(n)$, och att $\mathcal{Z}(a^n) = \frac{1}{z-a}$, bräkna $x(n)$. Du behöver endast ange svar, ingen motivering krävs.

Lösningförslag Fråga 3 (SF1629): Vi partialbråksuppdelar

$$\frac{3z-7}{z^2-5z+6} = \frac{1}{z-2} + \frac{2}{z-3}.$$

Om vi tar inverstransformen av $\mathcal{Z}(x(n))(z) = \frac{3z-7}{z^2-5z+6}$ så får vi

$$\{x(n)\}_{n=1}^{\infty} = \mathcal{Z}^{-1}\left(\frac{1}{z-2} + \frac{2}{z-3}\right) = \{2^n + 2 \cdot 3^n\}.$$

Svar fråga 3 (SF1629): $x(n) = 2^n + 2 \cdot 3^n$.

Uppgift 4. Givet att Fouriertransformen definieras $\mathcal{F}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$ och att $f(x) = e^{-3|x|}$, beräkna $\mathcal{F}(f * f)(\omega)$ där $*$ står för faltning (eng. convolution). Du behöver endast ange svar, ingen motivering krävs.

[1 poäng]

Lösningförslag Fråga 4: Vi beräknar

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-3|x|}e^{-i\omega x}dx = \int_0^{\infty} e^{-3x}e^{-i\omega x}dx + \int_{-\infty}^0 e^{3x}e^{-i\omega x}dx = \frac{6}{9 + \omega^2}.$$

Om vi använder att

$$\mathcal{F}(f * f)(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{f}(\omega)$$

så får vi följande svar:

$$\mathcal{F}(f * f)(\omega) = \left(\frac{6}{3 + \omega^2}\right)^2 = \frac{36}{(9 + \omega^2)^2}.$$

Uppgift 5 (SF1683). Vilka av följande räkneregler gäller för Laplacetransformen? Flera alternativ kan vara korrekta, du måste markera samtliga korrekta alternativ för att få poäng. $f(t)$ och $g(t)$ är funktioner som är definierade och oändligt deriverbara för alla $t \in [0, \infty)$, $\mathcal{L}(f)(s) = F(s)$ och $\mathcal{L}(g)(s) = G(s)$ står för Laplacetransformen av $f(t)$ respektive $g(t)$:

- (1) $\mathcal{L}(e^{-t}f(t))(s) = F(s+1)$
- (2) $\mathcal{L}(f''(t))(s) = -s^2F(s) + sf(0)$
- (3) $\mathcal{L}(tf(t))(s) = -F'(s)$
- (4) $\mathcal{L}(af(t) + bg(t))(s) = aF(s) + bG(s)$
- (5) $\mathcal{L}(f(t/2))(s) = e^{-s/2}F(s)$

[1 poäng]

Lösningförslag Fråga 5 (SF1683): Svar 1, 3 och 4 är rätt.

Uppgift 5 (SF1629). Låt $u(r, \phi)$ vara en lösning till Laplace ekvation på enhetsdisken med rand-data

$$u(1, \phi) = a + b \sin(\phi) + c \cos(3\phi).$$

Vilket värde antar $u(0, 0)$?

Du måste markera alla korrekta svar men inget felaktigt för full poäng.

- (1) a
- (2) $a + b + c$
- (3) $a + c$
- (4) $a + 3c$.

Lösningförslag Fråga 5 (SF1629): Vi vet att lösningen är

$$u(r, \phi) = a + br \sin(\phi) + cr^3 \cos(3\phi).$$

Så $u(0, 0) = a$. Så endast svar 1. är rätt.

Uppgift 6. Låt $K_n(x)$ vara en följd av Riemannintegrerbara funktioner definierade på intervallet $(-1, 1)$. Markera alla antaganden som behövs för att göra följden till en följd av positiva integrationskärnor (positive integration kernels). Du måste markera alla nödvändiga antaganden (men inget felaktigt) för full poäng.

- (1) $K_n(x) \geq 0$ för alla $x \in (-1, 1)$.

- (2) Det finns ett $N > 0$, ett $\delta > 0$ och ett $\epsilon > 0$ så att om $n > N$ så kommer $\int_{\delta}^1 K_n(x)dx + \int_{-1}^{-\delta} K_n(x)dx < \epsilon$.
- (3) För varje $\epsilon > 0$ och $\delta > 0$ så existerar det ett $N > 0$ så att om $n > N$ så kommer $\int_{\delta}^1 K_n(x)dx + \int_{-1}^{-\delta} K_n(x)dx < \epsilon$.
- (4) För alla $x \in (-1, 1)$ så kommer $K_1(x) \leq K_2(x) \leq K_3(x) \leq \dots$
- (5) $\int_{-1}^1 K_n(x)dx = 1$ för alla n .

[1 poäng]

Lösningförslag Fråga 6: 1, 3 och 5 är rätt.

Uppgift 7. Låt $f(x)$ vara en Riemannintegrerbar funktion. Markera alla villkor på f som garanterar att Fourierserien av f konvergerar till $f(x)$ för alla x i definitionsmängden.

- (1) $f \in C^1(T)$ där T är enhetscirkeln.
- (2) $f \in L^2(T)$ där T är enhetscirkeln.
- (3) $f \in C^2((-\pi, \pi])$
- (4) $f(x)$ är styckvis kontinuerligt deriverbar.
- (5) Cesàrosumman av Fourierserien (till f) konvergerar punktvis.
- (6) Om $f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ och $\lim_{n \rightarrow \infty} n^7 (|a_n| + |b_n|) = 0$.
- (7) Om $f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ och $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{|a_n| + |b_n|}{n^2} \right) = 0$.

[1 poäng]

Lösningförslag Fråga 7: 1 och 6 är rätt.

Uppgift 8. Vilka av följande antaganden utgör tillsammans ett reguljärt Sturm-Liouville problem.

- (1) $p(x)u''(x) + p'(x)u'(x) + q(x)u(x) + \lambda\omega(x)u(x) = 0$, där $p(x) \in C^1([a, b])$, $q \in C([a, b])$ och $\omega(x) \in C([a, b])$ är givna funktioner.
- (2) $u''(x) + p'(x)u'(x) + \lambda\omega(x)u(x) = 0$, där $p(x) \in C^1((a, b))$ och $\omega(x) \in C([a, b])$ är givna funktioner.
- (3) $\omega(x) > 0$ för $x \in [a, b]$.
- (4) $p(a) \neq 0 \neq p(b)$
- (5) $u(a) = 1$ och $u'(b) = 0$.
- (6) $u(a) = u'(a)$ och $u(b) = u'(b)$

[1 poäng]

Lösningförslag Fråga 8: 1, 3, 4 och 6 är rätt.

Uppgift 9. Lös följande initialvärdesproblem

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, t) &= u_t(x, t) && \text{för } x \in (0, \pi) \text{ och } t > 0 \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0 && \text{för } t > 0 \\ u(x, 0) &= x \cos(x) && \text{för } x \in (0, \pi). \end{aligned}$$

Du ska ladda upp en fullständig lösning i pdf-format.

[4 poäng]

Lösningförslag Fråga 9: Vi gör en variabelseparation och antar att $u(x, t) = X(x)T(t)$. Ekvationen reduceras då till

$$X''(x)T(t) = X(x)T'(t) \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)}.$$

Eftersom VL endast beror på x och HL endast på t så kommer båda led att vara konstanta: säg $= \pm\lambda^2$.

Om $\lambda = 0$ så kommer ekvationen för $X(x)$ att bli $X''(x) = 0$ vilket ger att $X(x) = ax + b$. Eftersom $0 = X(0)$ så måste $b = 0$ och eftersom $X(\pi) = 0$ så måste även $a = 0$. D.v.s. om $\lambda = 0$ så får vi endast den triviala lösningen.

Om $\lambda > 0$ och vi har ett $+$ i ekvationen så får vi att $X'' - \lambda^2 X = 0$ vilket gör att $X(x) = ae^{\lambda x} + be^{-\lambda x}$. På sedvanligt vis så leder även detta till triviala lösningar.

Om $\lambda > 0$ och vi har – så får vi ekvationen $X'' + \lambda^2 X = 0$ vilken har den generella lösningen $X(x) = a \cos(\lambda x) + b \sin(\lambda x)$. Eftersom $X(0) = 0$ så måste $a = 0$. Eftersom $0 = X(\pi) = b \sin(\lambda\pi)$ så måste $\lambda = n$ för att vi inte endast ska få triviala lösningar. Detta leder till att $T(t)$ måste vara en multipel av $e^{-n^2 t}$.

Vi gör därför ansättningen att

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) e^{-n^2 t}.$$

För att uppfylla initialdata så måste b_n vara Fourierkoefficienterna av f . Om $n = 2, 3, \dots$ så kommer

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(x) \sin(nx) dx = -\frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} x \cos(x) \frac{d \cos(nx)}{dx} dx = \\ &= \frac{2}{\pi n} \underbrace{\int_0^{\pi} \cos(x) \cos(nx) dx}_{=0 \text{ då } n=2,3,\dots} - \frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} x \sin(x) \cos(nx) dx - \frac{2 \cos(\pi) \cos(n\pi)}{n} = \\ &= -\frac{2}{\pi n^2} \int_0^{\pi} x \sin(x) \frac{d \sin(nx)}{dx} dx + \frac{2(-1)^n}{n} = \\ &= \frac{2}{\pi n^2} \underbrace{\int_0^{\pi} \sin(x) \sin(nx) dx}_{=0 \text{ då } n=2,3,\dots} + \underbrace{\frac{2}{\pi n^2} \int_0^{\pi} x \cos(x) \sin(nx) dx}_{=\frac{b_n}{n^2}} + \frac{2(-1)^n}{n}. \end{aligned}$$

Detta ger att, för $n = 2, 3, \dots$, så kommer

$$b_n = \frac{2n(-1)^n}{n^2 - 1}.$$

Om $n = 1$ så kommer

$$b_n = b_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(x) \sin(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(2x) dx = -1.$$

Därför så kommer lösningen att bli

$$u(x, t) = -\sin(x) e^{-t} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n(-1)^n}{n^2 - 1} \sin(nx) e^{-n^2 t}.$$

Detta är vårt svar.

Uppgift 10. Lös följande integralekvation:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{(x-y)^2 + 1} dy = \frac{2}{9+x^2}.$$

Du får använda följande formler utan motivering:

$$(1) \quad \mathcal{F}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)(\omega) = \pi e^{-|\omega|},$$

och

$$(2) \quad \mathcal{F}(f(at))(\omega) = \frac{1}{|a|} \hat{f}(\omega/a) \text{ för } a \in \mathbb{R} \text{ och } a \neq 0,$$

där $\mathcal{F}(f)(\omega) = \hat{f}(\omega)$ står för Fouriertransformen av f .

Fullständig motivering krävs, ladda upp en fullständig lösning i pdf format.

[4 poäng]

Lösningförslag Fråga 10: Låt oss definiera $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Vi kan då identifiera vänsterledet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{(x-y)^2 + 1} dy = f * g(x).$$

Vidare så kommer

$$\frac{2}{9+x^2} = \frac{2}{9} g(x/3)$$

så vi kan skriva integralekvationen $f * g(x) = \frac{2}{9} g(x/3)$.

Genom att ta Fouriertransformen av båda led och använda faltningsformeln för Fouriertransformen

$$\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega) = \frac{2}{9}\mathcal{F}(g(x/3))(\omega) = \frac{2}{3}\hat{g}(3\omega),$$

där vi använde (2) i den sista likheten.

Det följer att

$$(3) \quad \hat{f}(\omega) = \frac{2}{3} \frac{\hat{g}(3\omega)}{\hat{g}(\omega)} = \frac{2}{3} \frac{e^{-3i|\omega|}}{e^{-i|\omega|}} = \frac{2}{3} e^{-2i|\omega|},$$

där vi använde (1) i den andra olikheten.

Observera att från (1) och (2) så följer det att

$$e^{-2i|\omega|} = \frac{1}{\pi} \hat{g}(2\omega) = \frac{2}{\pi} \mathcal{F}(g(x/2))(\omega) \Rightarrow \hat{f}(\omega) = \frac{4}{3\pi} \mathcal{F}(g(x/2))(\omega).$$

Tar vi inverstransformen så får vi

$$f(x) = \frac{4}{3\pi} g(x/2) = \frac{16}{3\pi} \frac{1}{4+x^2}.$$

Svar fråga 10: $f(x) = \frac{4}{3\pi} g(x/2) = \frac{16}{3\pi} \frac{1}{4+x^2}$

Del 2.

Uppgift 11. Beräkna Fouriertransformen, i distributionsmening, av $f(x) = x^2$.

Du får använda inverstransformen:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega = f(x),$$

utan motivering, förutsatt att den generaliserade integralen konvergerar.

Fullständig motivering krävs, ladda upp en fullständig lösning i pdf format.

[4 poäng]

Lösningförslag Fråga 11: Låt $\phi \in \mathcal{S}$ (=Schwartzklassen) då kommer, per definition, distributionen $\hat{f}$ att definieras

$$\begin{aligned} \hat{f}[\phi] &= f[\hat{\phi}] = \int_{\mathbb{R}} x^2 \left[\int_{\mathbb{R}} \phi(\omega) e^{-i\omega x} d\omega \right] dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} [\phi(\omega) x^2 e^{-i\omega x}] d\omega dx = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} -\phi(\omega) \frac{d^2 e^{-i\omega x}}{d\omega^2} d\omega \right] dx = \\ (4) \quad &= - \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} \phi''(\omega) e^{-i\omega x} d\omega \right] dx, \end{aligned}$$

där vi använde två partiella integrationer i den sista likheten.

Vi kan fortsätta (4) genom att observera att den inre integralen är en Fouriertransform

$$(4) = - \int_{\mathbb{R}} \widehat{\phi''}(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} \widehat{\phi''}(x) e^{i0x} dx = -2\pi \phi''(0),$$

där vi använde inverstransformen i det sista steget.¹

Vi kan därför observera att $\hat{f}[\phi] = -2\pi \phi''(0)$. Detta leder till följande svar:

Sfar fråga 11: $\hat{f} = -2\pi \delta''$.

Uppgift 12. Bevisa, eller motbevisa, att Fourierserien till $f \in C^\infty(T)$ konvergerar till $f(x)$ för varje $x \in T$ där T är enhetscirkeln.

Du får använda att Fourierserien konvergerar i cesaromening i punkter där f är kontinuerlig utan bevis.

Fullständig motivering krävs, ladda upp din lösning i pdf format.

[1 poäng]

¹Eftersom Fouriertransformen, och dess invers, avbildar Schwartzklassen på Schwartzklassen så är alla integraler i ovanstående beräkningar konvergenta.

Lösningsförslag Fråga 12: Eftersom T är kompakt och $f \in C^\infty(T)$ så är f'' begränsad: $\sup_{x \in T} |f''(x)| = M \leq \infty$. Vi kan därför göra uppskattningen, för $n \neq 0$,

$$2\pi M \geq \left| \int_T f''(x) e^{-inx} dx \right| = n^2 \left| \int_T f(x) e^{-inx} dx \right| = n^2 |c_n|,$$

där vi använde två partiella integrationer i den första likheten och c_n är den n :te Fourierkoefficienten av f .

Det följer att, för $n \neq 0$,

$$|c_n| \leq \frac{2\pi M}{n^2}.$$

Eftersom $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ är konvergent så implicerar jämförelsetestet att

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

är absolutkonvergent och därför konvergent.

Vidare så kommer, enligt uppgiftsformuleringen, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ att cesarokonvergera till $f(x)$ för alla $x \in T$ (eftersom $f \in C^\infty(T)$ implicerar att $f \in C(T)$). Så uppgiften följer om vi kan visa att en konvergent serie konvergerar till samma värde som den cesarokonvergerar till.

För att visa att en konvergent serie konvergerar till sin cesarosumma så introducerar vi följande notation

$$s_N = \sum_{n=-N}^N a_n \text{ och } S_M = \frac{1}{M+1} \sum_{N=0}^M s_N.$$

Att $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ cesarokonvergerar betyder att gränsvärdet $\lim_{M \rightarrow \infty} S_M$ existerar. Vi kommer att anta att $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ konvergerar till S och visa att $\lim_{M \rightarrow \infty} S_M = S$.

Att $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ konvergerar till S betyder att det för varje $\epsilon > 0$ så existerar det ett $K > 0$ så att

$$N > K \Rightarrow |s_N - S| < \epsilon.$$

Fixera ett $\epsilon > 0$ och låt K vara som i föregående stycke. Det följer, för $M > K$, att

$$\begin{aligned} |S_M - S| &= \left| \frac{1}{M+1} \sum_{N=0}^M s_N - S \right| = \left| \frac{1}{M+1} \sum_{N=0}^K s_N + \frac{1}{M+1} \sum_{N=K+1}^M s_N - S \right| \leq \\ (5) \quad &\leq \frac{1}{M+1} \left| \sum_{N=0}^K s_N - (K+1)S \right| + \frac{1}{M+1} \left| \sum_{N=K+1}^M (s_N - S) \right| \leq \frac{1}{M+1} \left| \sum_{N=0}^K s_N - (K+1)S \right| + \epsilon. \end{aligned}$$

Eftersom $\left| \sum_{N=0}^K s_N - (K+1)S \right|$ är begränsad så kommer

$$\frac{1}{M+1} \left| \sum_{N=0}^K s_N - (K+1)S \right| < \epsilon$$

för M tillräckligt stort. Om vi sätter in det i (5) så får vi att om M är tillräckligt stort så kommer $|S_M - S| < 2\epsilon$. Det följer att $\sum a_n$ cesarokonvergerar till samma värde S som den konvergerar till i klasisk mening. Påståendet i uppgiften följer.



Tentamen SF1683, 2021-01-13, 8:00-12:00

Institutionen för Matematik

SF1683 Differentialekvationer och transformers Ten2

13e Januari 2021

Examinator: John Andersson

Endast skrivdon (penna, linjal, gradskiva et.c.) är tillåtna. Specifikt så är miniräknare och formelsamling **inte** tillåtna.

Motivera alla dina lösningar om inget annat anges.

Del 1.

Fråga 1a) Beräkna laplacetransformen av $f(t) = 3t^2$ direkt ifrån laplacetransformens definition.

[1 poäng]

b) Använd laplacetransformen för att lösa följande differentialekvation

$$\begin{aligned}y''(t) + 4y(t) &= 3t^2 \quad \text{för } t > 0 \\ y(0) &= y'(0) = 0.\end{aligned}$$

[3 poäng]

Du får använda följande formler utan motivering:

1) $\mathcal{L}(\delta(t-a))(s) = e^{-as}$ där $a > 0$ och $\delta(t)$ är Diracs deltafunktion.

2) $\mathcal{L}(H(t))(s) = \frac{1}{s}$ där $H(t)$ Heavisidefunktionen.

3) $\mathcal{L}(\sin(at))(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}$

4) $\mathcal{L}(\cos(at))(s) = \frac{s}{s^2 + a^2}$

Fråga 2a) Hitta en lösning $f(t)$ till följande ekvation

$$(1) \quad \int_0^\infty f(t-\tau)e^{-2\tau}d\tau = 3te^{-2t}H(t)$$

där $H(t) = \begin{cases} 1 & \text{om } t > 0 \\ 0 & \text{om } t \leq 0 \end{cases}$ är Heavisidefunktionen.

[3 poäng]

b) Verifiera med en direkt beräkning att ditt svar från a) uppfyller (1).

[1 poäng]

Du får använda följande formler utan motivering:

1) $\mathcal{F}(f * g)(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$ där $*$ står för faltning (convolution).

2) $\mathcal{F}(tf(t))(\omega) = i\frac{d\hat{f}(\omega)}{d\omega}$

3) $\mathcal{F}(e^{i\omega_0 t}f(t))(\omega) = \hat{f}(\omega - \omega_0)$

4) $\mathcal{F}(H(t)e^{-\alpha t})(\omega) = \frac{1}{\alpha + i\omega}$

där $\mathcal{F}(f(t))(\omega) = \hat{f}(\omega)$ står för Fouriertransformen av $f(t)$.

LEDTRÅD: Observera att den ena gränsen i integralen är noll, kan du skriva om integranden på något sätt som ger dig en integral från $-\infty$ till ∞ ?

Fråga 3a) Hitta en lösning till följande vågekvation

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} && \text{för } x \in (\pi, 2\pi) \text{ och } t > 0 \\ u(\pi, t) &= u(2\pi, t) = 0 && \text{för } t > 0 \\ u(x, 0) &= x && \text{för } x \in (\pi, 2\pi). \end{aligned}$$

[3 poäng]

b) Är din lösning unik? Motivera ditt svar genom att ge ett argument eller referera till en sats.

[1 poäng]

Fråga 4. Beräkna linjeintegralen

$$\oint_{\Gamma} \frac{1}{(z^2 - 4z + 8)(z + i)} dz$$

där Γ är den slutna kurvan som begränsar rektangeln med hörn i $z_1 = 3$, $z_2 = 3 + 4i$, $z_3 = -3 + 4i$ och $z_4 = -3$. Kurvan löper medurs.

[4 poäng]

Del 2.

Fråga 5. Hitta en begränsad lösning till följande telegrafekvation

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + u(x,t) && \text{för } x, t > 0 \\ u(0, t) &= e^{-t} && \text{för } t > 0 \\ u(x, 0) &= 0 \text{ och } \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 1 && \text{för } x > 0. \end{aligned}$$

[4 poäng]

Du får använda följande formler:

- 1) $\mathcal{L}(e^{-bt}f(t))(s) = \mathcal{L}(f(t))(s + b)$
- 2) $\mathcal{L}(H(t - a)f(t - a))(s) = e^{-as}\mathcal{L}(f(t))(s)$

där $\mathcal{L}$ står för Laplacetransformen och H för Heavisidefunktionen.

Fråga 6a) Bevisa faltningsformeln för fouriertransformen: $\mathcal{F}(f * g)(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$ där $\mathcal{F}(f)(\omega) = \hat{f}(\omega)$ står för fouriertransformen av f . Du behöver inte ta hänsyn till konvergenser eller om det är tillåtet att byta ordning på integraler, flytta oändliga summor utanför integraltecknet eller andra liknande operationer.

[2 poäng]

b) Formulera Lebesgues dominerade konvergenssats (Lebesgue's Dominated Convergence Theorem).

[1 poäng]

c) Lebesgues dominerade konvergenssats har flera villkor för att konvergensen skall gälla. Är dessa villkor nödvändiga? D.v.s. om ett villkor inte gäller, kommer slutsatsen ändå att gälla; eller finns det motexempel? Övertyga mig om att du har förstått satsen genom att visa att slutsatsen inte gäller om något viktigt villkor i antaganderna inte gäller. Rimliga svar som visar på förståelse av satsen ger poäng.

[1 poäng]



SF1683 Differentialekvationer och transformmetoder, del 2
Tentamen
Fredag den 14 januari 2022

Skrivtid: 08:00-12:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: Mattias Dahl

Tentamen består av sex uppgifter uppdelade i två delar. Del I utgörs av de fyra första uppgifterna som testar förmågan att lösa grundläggande problem. Del II utgörs av de två sista uppgifterna och testar förmågan att lösa mer avancerade problem som även kan vara av teoretisk karaktär och är avsedda främst för högre betyg. Varje uppgift ger maximalt fyra poäng. Bonuspoäng från inlämningsuppgifterna adderas till erhållna poäng på del I upp till maximalt 16 poäng.

Betygsgränserna vid tentamen ges av följande tabell.

Fx	E	D	C	B	A
11	12	14	16	19	21

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Beräkna Laplacetransformerna $f_1(s) = \mathcal{L}(F_1(t))(s)$ och $f_2(s) = \mathcal{L}(F_2(t))(s)$ av funktionerna $F_1(t) = \cos(at)$, $F_2(t) = \sin(at)$, $t \geq 0$, där $a > 0$ utgående från definitionen av Laplacetransformen. Ange för vilka s som beräkningen är giltig. **(4 p)**

2. Använd Fouriertransformen för att bestämma den funktion $\varphi(t)$ som uppfyller

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t - \tau) e^{-\tau^2} d\tau = t e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Följande formler kan vara användbara:

- (i) $\mathcal{F}(f * g)(\omega) = \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega)$ där $*$ betecknar faltning (convolution)
- (ii) $\mathcal{F}(tf(t))(\omega) = i \frac{d}{d\omega} \hat{f}(\omega)$
- (iii) $\mathcal{F}(f'(t))(\omega) = i\omega \hat{f}(\omega)$
- (iv) $\mathcal{F}(e^{i\omega_0 t} f(t))(\omega) = \hat{f}(\omega - \omega_0)$
- (v) $\mathcal{F}(f(t - t_0))(\omega) = e^{-it_0 \omega} \hat{f}(\omega)$
- (vi) $\mathcal{F}(e^{-\alpha t^2})(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$

där $\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}(f(t))(\omega)$ är Fouriertransformen av $f(t)$.

(4 p)

3. Använd separation av variabler för att lösa värmeledningsproblemet

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

för

$$u = u(x, t), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \geq 0$$

med randvillkor

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(\pi, t) = 0, \quad t > 0$$

och initialvillkor

$$u(x, 0) = f(x) = x(\pi - x), \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

Lösningen innehåller koefficienter för en Fourierserietveckling. Ange integraler som ger dessa koefficienter. Integralerna behöver inte beräknas. Beräkna dock gränsvärdet $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$ för $0 \leq x \leq \pi$.

(4 p)

4. Lös initialvärdesproblemet

$$y'' + 2y' + y = \delta(t - 1) + H(t - 2)e^{-t}$$

$$y(0) = y'(0) = 0$$

för $y(t)$, $t \geq 0$, där $\delta(t)$ är Diracs deltafunktion och $H(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$ är Heavisidefunktion. Följande formler kan vara användbara:

- (i) $\mathcal{L}\left(\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right)(s) = \frac{1}{s^n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$
 - (ii) $\mathcal{L}(e^{at})(s) = \frac{1}{s-a}$
 - (iii) $\mathcal{L}(\delta(t-a))(s) = e^{-as}$
 - (iv) $\mathcal{L}(e^{-at}f(t))(s) = \mathcal{L}(f(t))(s+a)$
 - (v) $\mathcal{L}(H(t-a)f(t-a))(s) = e^{-as}\mathcal{L}(f(t))(s)$
- där $\mathcal{L}(f(t))(s)$ är Laplacetransformen av $f(t)$.

(4 p)

DEL II – AVANCERADE PROBLEM

5. (a) Bevisa faltningsformeln för Fouriertransformen,

$$\mathcal{F}(f * g)(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$$

där $\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}(f)(\omega)$ betecknar Fouriertransformen av f . Du behöver inte ta hänsyn till frågor som konvergens eller om det är tillåtet att byta ordning på integraler etc.

- (b) Formulera Lebesgues dominerade konvergenssats.
- (c) Formulera Cauchy-Riemanns ekvationer.

(4 p)

6. Låt $F(t)$, $t \geq 0$, vara av exponentiell ordning med Laplacetransform $\mathcal{L}(F(t))(s) = f(s)$. Ange den formel som beräknar $F(t)$ som en integral i det komplexa planet och förklara hur den används. Använd denna formel för att beräkna $F(t)$ om

$$f(s) = \frac{1}{(s-3)^2}.$$

(4 p)

SF1683 Differentialekvationer och transformmetoder HT22, del 2
Övningstentamen 1

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Lös initialvärdesproblemet

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = \delta(t-1), \quad y(0) = 1, y'(0) = 0,$$

för $y(t)$, $t \geq 0$. Här betecknar $\delta(t)$ Diracs deltafunktion. (4 p)

2. Bestäm den absolutintegrerbara funktion $y(x)$ som uppfyller

$$y''(x) - 4y(x) = -6e^{-|x|}$$

för $-\infty < x < \infty$. Följande formler kan vara användbara:

- (i) $\mathcal{F}[f(ax+b)](\omega) = \frac{1}{|a|} e^{\frac{i\omega b}{a}} \mathcal{F}[f]\left(\frac{\omega}{a}\right)$
- (ii) $\mathcal{F}[e^{icx}f(x)](\omega) = \mathcal{F}[f](\omega - c)$
- (iii) $\mathcal{F}[f'](\omega) = i\omega \mathcal{F}[f](\omega)$
- (iv) $\mathcal{F}[xf(x)](\omega) = i \frac{d}{d\omega} \mathcal{F}[f](\omega)$
- (v) $\mathcal{F}(e^{-|x|})(\omega) = \frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$

(4 p)

3. Värmefördelningen i en tunn isolerad stav med isolerade ändar beskrivs av funktionen

$$u = u(x, t), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \geq 0$$

som uppfyller ekvationen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

med randvillkor

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, t) = 0, \quad t > 0.$$

Använd separation av variabler för att bestämma $u(x, t)$ om

$$u(x, 0) = x, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

Beräkna även gränsvärdet $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$ för $0 \leq x \leq \pi$. (4 p)

DEL II – AVANCERADE PROBLEM

4. Beräkna Fourierserien för den 2π -periodiska funktion f som ges av $f(x) = x^2$ för $-\pi \leq x \leq \pi$. Använd resultatet för att beräkna summorna $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ och $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$. **(4 p)**

5. Denna uppgift rör initialvärdesproblemet

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t), \quad y(0) = y'(0) = 0,$$

för funktionen $y(t)$, $t \geq 0$, där a, b är reella konstanter. Använd Laplacetransformen för att visa att om $f(t)$ är av exponentiell typ så är också lösningen $y(t)$ av exponentiell typ.

(4 p)

6. (a) Formulera och bevisa satsen om faltning för Fouriertransformen. Du behöver inte ta hänsyn till frågor som konvergens eller om det är tillåtet att byta ordning på integraler etc.

- (b) För vissa värden på parametern $a \in \mathbb{R}$ har ekvationen

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) \cdot e^{-y^2} dy = e^{-a^2 x^2}$$

en lösning $f \in G(\mathbb{R})$ (=rummet av styckvis kontinuerliga absolutintegrerbara funktioner på $\mathbb{R}$). Bestäm f i dessa fall. Följande formler kan vara användbara:

(i) $\mathcal{F}[f(ax+b)](\omega) = \frac{1}{|a|} e^{\frac{i\omega b}{a}} \mathcal{F}[f]\left(\frac{\omega}{a}\right)$

(ii) $\mathcal{F}[e^{icx}f(x)](\omega) = \mathcal{F}[f](\omega - c)$

(iii) $\mathcal{F}[f'](\omega) = i\omega \mathcal{F}[f](\omega)$

(iv) $\mathcal{F}[xf(x)](\omega) = i \frac{d}{d\omega} \mathcal{F}[f](\omega)$

(v) $\mathcal{F}(e^{-x^2})(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}}$

(4 p)



SF1683 Differentialekvationer och transformmetoder HT22, del 2
Övningstentamen 2

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Låt funktionen f vara definierad av $f(x) = -e^{-x}$ för $x \geq 0$ och $f(x) = e^x$ för $x < 0$. Beräkna Fouriertransformen av f . (4 p)

2. Låt funktionen $f(x)$ vara definierad som $f(x) = \cos x$ för $0 \leq x \leq \pi$. Utvidga $f(x)$ till en funktion på intervallet $-\pi \leq x \leq \pi$ på tre olika sätt:
 - (a) $f_1(x)$ som är en jämn funktion,
 - (b) $f_2(x)$ som är en udda funktion,
 - (c) $f_3(x)$ som har $f_3(x) = 0$ för $-\pi \leq x < 0$.Beräkna Fourierserierna för $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$. Förklara vad serierna konvergerar mot för de tre olika funktionerna. (4 p)

3. Använd Laplacetransformen för att bestämma den funktion $f(t), t \geq 0$, som uppfyller

$$\int_0^t e^{-y} \cos y f(t-y) dy = t^2 e^{-t}.$$

(4 p)

DEL II – AVANCERADE PROBLEM

4. Antag att $f(t), t \geq 0$, är en kontinuerlig funktion som är av exponentiell typ, alltså sådan att $|f(t)| \leq Ke^{At}$ för konstanter K, A .
 - (a) Visa att Laplacetransformen av $f(t)$ är definierad för s med realdel $\operatorname{Re} s > A$.
 - (b) Antag dessutom att $f(t)$ har en kontinuerlig derivata. Bevisa formeln för Laplacetransformen av $f'(t)$, formel (8) på formelbladet.

(4 p)

5. Laplace ekvation $\Delta u = 0$ ges i polära koordinater $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, av

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

Bestäm den lösning $u = u(r, \theta)$ på cirkelskivan $r = \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1$ som är kontinuerlig överallt och uppfyller randvillkoret $u = |x|$ på randen $r = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$ till cirkelskivan. **(4 p)**

6. (a) Formulera Plancherels identitet för Fouriertransformen.

(b) Beräkna Fouriertransformen av funktionen $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{för } |x| \leq 1 \\ 0, & \text{för } |x| > 1 \end{cases}$.

- (c) Använd (a) och (b) för att beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \omega - \omega \cos \omega}{\omega^3} \right)^2 d\omega.$$

(4 p)



SF1683 Differentialekvationer och transformmetoder, del 2
Tentamen
Onsdag den 20 april 2022

Skrivtid: 08:00-12:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: Mattias Dahl

Tentamen består av sex uppgifter uppdelade i två delar. Del I utgörs av de fyra första uppgifterna som testar förmågan att lösa grundläggande problem. Del II utgörs av de två sista uppgifterna och testar förmågan att lösa mer avancerade problem som även kan vara av teoretisk karaktär och är avsedda främst för högre betyg. Varje uppgift ger maximalt fyra poäng. Bonuspoäng från inlämningsuppgifterna adderas till erhållna poäng på del I upp till maximalt 16 poäng.

Betygsgränserna vid tentamen ges av följande tabell.

Fx	E	D	C	B	A
11	12	14	16	19	21

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Beräkna Laplacetransformerna $f_1(s) = \mathcal{L}(F_1(t))(s)$ och $f_2(s) = \mathcal{L}(F_2(t))(s)$ av funktionerna $F_1(t) = t + 1$, $F_2(t) = e^{at}$, $t \geq 0$, där a är ett reellt tal, utgående från definitionen av Laplacetransformen. Ange för vilka s som beräkningen är giltig. **(4 p)**
2. Låt funktionen $f(x)$ vara definierad som $f(x) = \sin(x)$ för $0 \leq x \leq \pi$. Utvidga $f(x)$ till en funktion på intervallet $-\pi \leq x \leq \pi$ på tre olika sätt:
 - (a) $f_1(x)$ som är en jämn funktion,
 - (b) $f_2(x)$ som är en udda funktion,
 - (c) $f_3(x)$ som har $f_3(x) = 0$ för $-\pi \leq x < 0$.

Beräkna Fourierserierna för $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$. Förklara vad serierna konvergerar mot i de tre olika fallen.

(4 p)

3. Använd separation av variabler för att lösa vågekvationen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

1

för $u = u(x, t)$, $0 \leq x \leq \pi$, $t \geq 0$, med randvillkor

$$u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0, \quad t > 0,$$

och initialvillkor

$$u(x, 0) = -5 \sin(3x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 7 \sin(2x), \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

(4 p)

4. Lös initialvärdesproblemet

$$y'(t) + 6y(t) + 9 \int_0^t y(\tau) d\tau = \delta(t - 2), \quad y(0) = 0,$$

för $y(t)$, $t \geq 0$, där $\delta(t)$ är Diracs deltafunktion. *Ledning: skriv tredje termen som en faltning av två funktioner.*

Följande formler kan vara användbara:

- (i) $\mathcal{L}\left(\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right)(s) = \frac{1}{s^n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$
 - (ii) $\mathcal{L}(e^{at})(s) = \frac{1}{s-a}$
 - (iii) $\mathcal{L}(\delta(t-a))(s) = e^{-as}$
 - (iv) $\mathcal{L}(e^{-at}f(t))(s) = \mathcal{L}(f(t))(s+a)$
 - (v) $\mathcal{L}(H(t-a)f(t-a))(s) = e^{-as}\mathcal{L}(f(t))(s)$
 - (vi) $\mathcal{L}((f*g)(t))(s) = \mathcal{L}(f(t))(s)\mathcal{L}(g(t))(s)$
- där $\mathcal{L}(f(t))(s)$ är Laplacetransformen av $f(t)$.

(4 p)

DEL II – AVANCERADE PROBLEM

5. (a) Låt $\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}(f(t))(\omega)$ vara Fouriertransformen av en funktion $f(t)$ som uppfyller $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$. Bevisa Parsevals sats som säger att

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega.$$

Du behöver inte ta hänsyn till frågor som konvergens eller om det är tillåtet att byta ordning på integraler etc.

- (b) Bestäm Fouriertransformen av funktionen $f(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases}$, och beräkna med hjälp av denna integralen

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 \omega}{\omega^2} d\omega.$$

(4 p)

6. Använd metoden med residyer för att beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^6 + 1} dx.$$

(4 p)



SF1683 Differentialekvationer och transformmetoder, del 2
Tentamen
Fredag den 13 januari 2023

Skrivtid: 08:00-12:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: Mattias Dahl

Tentamen består av sex uppgifter uppdelade i två delar. Del I utgörs av de tre första uppgifterna som testar förmågan att lösa grundläggande problem. Del II utgörs av de tre sista uppgifterna och testar förmågan att lösa mer avancerade problem som även kan vara av teoretisk karaktär och är avsedda främst för högre betyg. Varje uppgift ger maximalt fyra poäng. Bonuspoäng från lappskrivningarna adderas till erhållna poäng på del I upp till maximalt 12 poäng.

Betygsgränserna vid tentamen ges av följande tabell.

Fx	E	D	C	B	A
11	12	14	16	19	21

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Använd Laplacetransformen för att lösa initialvärdesproblemet

$$y''(t) + y(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 2 \\ e^{-3t}, & 2 \leq t \end{cases}, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0,$$

för $y(t)$, $t \geq 0$.

(4 p)

2. Funktionerna f_1, f_2 har period 2π och ges på intervallet $-\pi < x \leq \pi$ av

$$(a) \quad f_1(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}, \quad (b) \quad f_2(x) = \sin^2(x).$$

Beräkna deras Fourierserier. Förklara vad serierna konvergerar mot.

(4 p)

3. Bestäm den absolutintegrerbara funktion $g(x)$ som uppfyller

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x-y)e^{-|y+1|} dy = 4e^{-|x|} - 2e^{-2|x|}.$$

Följande formler kan vara användbara:

(i) $\mathcal{F}[f * g](\omega) = 2\pi \mathcal{F}[f](\omega) \cdot \mathcal{F}[g](\omega)$ där $*$ betecknar faltning (convolution)

- (ii) $\mathcal{F}[f(ax+b)](\omega) = \frac{1}{|a|} e^{\frac{i\omega b}{a}} \mathcal{F}[f]\left(\frac{\omega}{a}\right)$
 (iii) $\mathcal{F}[e^{icx}f(x)](\omega) = \mathcal{F}[f](\omega - c)$
 (iv) $\mathcal{F}[f'](\omega) = i\omega \mathcal{F}[f](\omega)$
 (v) $\mathcal{F}[xf(x)](\omega) = i \frac{d}{d\omega} \mathcal{F}[f](\omega)$
 (vi) $\mathcal{F}(e^{-|x|})(\omega) = \frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$

(4 p)

DEL II – AVANCERADE PROBLEM

4. Använd separation av variabler för att bestämma den funktion $u = u(x, y)$ definierad på området $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$ i xy -planet som uppfyller Laplace ekvation $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ med randvillkoren $u(x, 0) = u(x, \pi) = 0$ för $0 \leq x \leq \pi$, samt $u(0, y) = 0$, $u(\pi, y) = 1$ för $0 \leq y \leq \pi$. **(4 p)**
5. (a) Formulera satsen om invers Fouriertransform.
 (b) Beräkna Fouriertransformen av funktionen $f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{för } |x| \leq 1 \\ 0, & \text{för } |x| > 1 \end{cases}$.
 (c) Använd (a) och (b) för att beräkna Fouriertransformen av $g(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$, $x \neq 0$. **(4 p)**
6. (a) I beviset av Dirichlets sats om punktvis konvergens av Fourierserier används Riemann-Lebesgues lemma. Formulera detta lemma.
 (b) Delsumman $S_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^m [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$ av Fourierserien till funktionen $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ kan skrivas som en integral som innehåller funktionen f samt Dirichletkärnan $D_m(t) = \frac{\sin(m + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{1}{2}t}$. Bevisa detta. **(4 p)**

Table of Integrals*

Basic Forms

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \quad (1)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| \quad (2)$$

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (3)$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b| \quad (4)$$

Integrals of Rational Functions

$$\int \frac{1}{(x+a)^2} dx = -\frac{1}{x+a} \quad (5)$$

$$\int (x+a)^n dx = \frac{(x+a)^{n+1}}{n+1}, n \neq -1 \quad (6)$$

$$\int x(x+a)^n dx = \frac{(x+a)^{n+1}((n+1)x-a)}{(n+1)(n+2)} \quad (7)$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x \quad (8)$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} \quad (9)$$

$$\int \frac{x}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln |a^2+x^2| \quad (10)$$

$$\int \frac{x^2}{a^2+x^2} dx = x - a \tan^{-1} \frac{x}{a} \quad (11)$$

$$\int \frac{x^3}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}a^2 \ln |a^2+x^2| \quad (12)$$

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \tan^{-1} \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} \quad (13)$$

$$\int \frac{1}{(x+a)(x+b)} dx = \frac{1}{b-a} \ln \frac{a+x}{b+x}, a \neq b \quad (14)$$

$$\int \frac{x}{(x+a)^2} dx = \frac{a}{a+x} + \ln |a+x| \quad (15)$$

$$\int \frac{x}{ax^2+bx+c} dx = \frac{1}{2a} \ln |ax^2+bx+c| - \frac{b}{a\sqrt{4ac-b^2}} \tan^{-1} \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} \quad (16)$$

Integrals with Roots

$$\int \sqrt{x-a} dx = \frac{2}{3} (x-a)^{3/2} \quad (17)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x \pm a}} dx = 2\sqrt{x \pm a} \quad (18)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x}} dx = -2\sqrt{a-x} \quad (19)$$

$$\int x\sqrt{x-a} dx = \frac{2}{3}a(x-a)^{3/2} + \frac{2}{5}(x-a)^{5/2} \quad (20)$$

$$\int \sqrt{ax+b} dx = \left(\frac{2b}{3a} + \frac{2x}{3} \right) \sqrt{ax+b} \quad (21)$$

$$\int (ax+b)^{3/2} dx = \frac{2}{5a} (ax+b)^{5/2} \quad (22)$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x \pm a}} dx = \frac{2}{3} (x \mp 2a) \sqrt{x \pm a} \quad (23)$$

$$\int \sqrt{\frac{x}{a-x}} dx = -\sqrt{x(a-x)} - a \tan^{-1} \frac{\sqrt{x(a-x)}}{x-a} \quad (24)$$

$$\int \sqrt{\frac{x}{a+x}} dx = \sqrt{x(a+x)} - a \ln [\sqrt{x} + \sqrt{x+a}] \quad (25)$$

$$\int x\sqrt{ax+bdx} = \frac{2}{15a^2} (-2b^2 + abx + 3a^2x^2) \sqrt{ax+b} \quad (26)$$

$$\int \sqrt{x(ax+b)} dx = \frac{1}{4a^{3/2}} \left[(2ax+b) \sqrt{ax(ax+b)} - b^2 \ln |a\sqrt{x} + \sqrt{a(ax+b)}| \right] \quad (27)$$

$$\int \sqrt{x^3(ax+b)} dx = \left[\frac{b}{12a} - \frac{b^2}{8a^2x} + \frac{x}{3} \right] \sqrt{x^3(ax+b)} + \frac{b^3}{8a^{5/2}} \ln |a\sqrt{x} + \sqrt{a(ax+b)}| \quad (28)$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{1}{2}a^2 \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| \quad (29)$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2}a^2 \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (30)$$

$$\int x\sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{3} (x^2 \pm a^2)^{3/2} \quad (31)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| \quad (32)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \sin^{-1} \frac{x}{a} \quad (33)$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \sqrt{x^2 \pm a^2} \quad (34)$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = -\sqrt{a^2 - x^2} \quad (35)$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 \pm a^2} \mp \frac{1}{2}a^2 \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| \quad (36)$$

$$\int \sqrt{ax^2+bx+cdx} = \frac{b+2ax}{4a} \sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{4ac-b^2}{8a^{3/2}} \ln |2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}| \quad (37)$$

$$\int x\sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{1}{48a^{5/2}} \left(2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c} \times (-3b^2+2abx+8a(c+ax^2)) + 3(b^3-4abc) \ln |b+2ax+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}| \right) \quad (38)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln |2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}| \quad (39)$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = \frac{1}{a} \sqrt{ax^2+bx+c} - \frac{b}{2a^{3/2}} \ln |2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}| \quad (40)$$

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}} \quad (41)$$

Integrals with Logarithms

$$\int \ln ax dx = x \ln ax - x \quad (42)$$

$$\int \frac{\ln ax}{x} dx = \frac{1}{2} (\ln ax)^2 \quad (43)$$

$$\int \ln(ax+b) dx = \left(x + \frac{b}{a} \right) \ln(ax+b) - x, a \neq 0 \quad (44)$$

$$\int \ln(x^2+a^2) dx = x \ln(x^2+a^2) + 2a \tan^{-1} \frac{x}{a} - 2x \quad (45)$$

$$\int \ln(x^2-a^2) dx = x \ln(x^2-a^2) + a \ln \frac{x+a}{x-a} - 2x \quad (46)$$

$$\int \ln(ax^2+bx+c) dx = \frac{1}{a} \sqrt{4ac-b^2} \tan^{-1} \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} - 2x + \left(\frac{b}{2a} + x \right) \ln(ax^2+bx+c) \quad (47)$$

$$\int x \ln(ax+b) dx = \frac{bx}{2a} - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{b^2}{a^2} \right) \ln(ax+b) \quad (48)$$

$$\int x \ln(a^2-b^2x^2) dx = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{a^2}{b^2} \right) \ln(a^2-b^2x^2) \quad (49)$$

Integrals with Exponentials

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} \quad (50)$$

$$\int \sqrt{x} e^{ax} dx = \frac{1}{a} \sqrt{x} e^{ax} + \frac{i\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}} \operatorname{erf}(i\sqrt{ax}), \text{ where } \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (51)$$

$$\int x e^x dx = (x-1)e^x \quad (52)$$

$$\int x e^{ax} dx = \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \right) e^{ax} \quad (53)$$

$$\int x^2 e^x dx = (x^2 - 2x + 2) e^x \quad (54)$$

$$\int x^2 e^{ax} dx = \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right) e^{ax} \quad (55)$$

$$\int x^3 e^x dx = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) e^x \quad (56)$$

$$\int x^n e^{ax} dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx \quad (57)$$

$$\int x^n e^{ax} dx = \frac{(-1)^n}{a^{n+1}} \Gamma[1+n, -ax], \text{ where } \Gamma(a, x) = \int_x^\infty t^{a-1} e^{-t} dt \quad (58)$$

$$\int e^{ax^2} dx = -\frac{i\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \operatorname{erf}(i\sqrt{a}x) \quad (59)$$

$$\int e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \operatorname{erf}(x\sqrt{a}) \quad (60)$$

$$\int x e^{-ax^2} dx = -\frac{1}{2a} e^{-ax^2} \quad (61)$$

$$\int x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{a^3}} \operatorname{erf}(x\sqrt{a}) - \frac{x}{2a} e^{-ax^2} \quad (62)$$

*© 2014. From <http://integral-table.com>, last revised June 14, 2014. This material is provided as is without warranty or representation about the accuracy, correctness or suitability of the material for any purpose, and is licensed under the Creative Commons Attribution-Noncommercial-ShareAlike 3.0 United States License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/> or send a letter to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.

Integrals with Trigonometric Functions

$$\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax \quad (63)$$

$$\int \sin^2 ax dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a} \quad (64)$$

$$\int \sin^n ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax {}_2F_1 \left[\frac{1}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{3}{2}, \cos^2 ax \right] \quad (65)$$

$$\int \sin^3 ax dx = -\frac{3 \cos ax}{4a} + \frac{\cos 3ax}{12a} \quad (66)$$

$$\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax \quad (67)$$

$$\int \cos^2 ax dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a} \quad (68)$$

$$\int \cos^p ax dx = -\frac{1}{a(1+p)} \cos^{1+p} ax \times {}_2F_1 \left[\frac{1+p}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3+p}{2}, \cos^2 ax \right] \quad (69)$$

$$\int \cos^3 ax dx = \frac{3 \sin ax}{4a} + \frac{\sin 3ax}{12a} \quad (70)$$

$$\int \cos ax \sin bxdx = \frac{\cos[(a-b)x]}{2(a-b)} - \frac{\cos[(a+b)x]}{2(a+b)}, a \neq b \quad (71)$$

$$\int \sin^2 ax \cos bxdx = -\frac{\sin[(2a-b)x]}{4(2a-b)} + \frac{\sin bx}{2b} - \frac{\sin[(2a+b)x]}{4(2a+b)} \quad (72)$$

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \frac{1}{3} \sin^3 x \quad (73)$$

$$\int \cos^2 ax \sin bxdx = \frac{\cos[(2a-b)x]}{4(2a-b)} - \frac{\cos bx}{2b} - \frac{\cos[(2a+b)x]}{4(2a+b)} \quad (74)$$

$$\int \cos^2 ax \sin ax dx = -\frac{1}{3a} \cos^3 ax \quad (75)$$

$$\int \sin^2 ax \cos^2 bxdx = \frac{x}{4} - \frac{\sin 2ax}{8a} - \frac{\sin[2(a-b)x]}{16(a-b)} + \frac{\sin 2bx}{8b} - \frac{\sin[2(a+b)x]}{16(a+b)} \quad (76)$$

$$\int \sin^2 ax \cos^2 ax dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4ax}{32a} \quad (77)$$

$$\int \tan ax dx = -\frac{1}{a} \ln \cos ax \quad (78)$$

$$\int \tan^2 ax dx = -x + \frac{1}{a} \tan ax \quad (79)$$

$$\int \tan^n ax dx = \frac{\tan^{n+1} ax}{a(1+n)} \times {}_2F_1 \left(\frac{n+1}{2}, 1, \frac{n+3}{2}, -\tan^2 ax \right) \quad (80)$$

$$\int \tan^3 ax dx = \frac{1}{a} \ln \cos ax + \frac{1}{2a} \sec^2 ax \quad (81)$$

$$\int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| = 2 \tanh^{-1} \left(\tan \frac{x}{2} \right) \quad (82)$$

$$\int \sec^2 ax dx = \frac{1}{a} \tan ax \quad (83)$$

$$\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \tan x| \quad (84)$$

$$\int \sec x \tan x dx = \sec x \quad (85)$$

$$\int \sec^2 x \tan x dx = \frac{1}{2} \sec^2 x \quad (86)$$

$$\int \sec^n x \tan x dx = \frac{1}{n} \sec^n x, n \neq 0 \quad (87)$$

$$\int \csc x dx = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| = \ln |\csc x - \cot x| + C \quad (88)$$

$$\int \csc^2 ax dx = -\frac{1}{a} \cot ax \quad (89)$$

$$\int \csc^3 x dx = -\frac{1}{2} \cot x \csc x + \frac{1}{2} \ln |\csc x - \cot x| \quad (90)$$

$$\int \csc^n x \cot x dx = -\frac{1}{n} \csc^n x, n \neq 0 \quad (91)$$

$$\int \sec x \csc x dx = \ln |\tan x| \quad (92)$$

Products of Trigonometric Functions and Monomials

$$\int x \cos x dx = \cos x + x \sin x \quad (93)$$

$$\int x \cos ax dx = \frac{1}{a^2} \cos ax + \frac{x}{a} \sin ax \quad (94)$$

$$\int x^2 \cos x dx = 2x \cos x + (x^2 - 2) \sin x \quad (95)$$

$$\int x^2 \cos ax dx = \frac{2x \cos ax}{a^2} + \frac{a^2 x^2 - 2}{a^3} \sin ax \quad (96)$$

$$\int x^n \cos x dx = -\frac{1}{2} (i)^{n+1} [\Gamma(n+1, -ix) + (-1)^n \Gamma(n+1, ix)] \quad (97)$$

$$\int x^n \cos ax dx = \frac{1}{2} (ia)^{1-n} [(-1)^n \Gamma(n+1, -iax) - \Gamma(n+1, iax)] \quad (98)$$

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \sin x \quad (99)$$

$$\int x \sin ax dx = -\frac{x \cos ax}{a} + \frac{\sin ax}{a^2} \quad (100)$$

$$\int x^2 \sin x dx = (2 - x^2) \cos x + 2x \sin x \quad (101)$$

$$\int x^2 \sin ax dx = \frac{2 - a^2 x^2}{a^3} \cos ax + \frac{2x \sin ax}{a^2} \quad (102)$$

$$\int x^n \sin x dx = -\frac{1}{2} (i)^n [\Gamma(n+1, -ix) - (-1)^n \Gamma(n+1, -ix)] \quad (103)$$

Products of Trigonometric Functions and Exponentials

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) \quad (104)$$

$$\int e^{bx} \sin ax dx = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{bx} (b \sin ax - a \cos ax) \quad (105)$$

$$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) \quad (106)$$

$$\int e^{bx} \cos ax dx = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{bx} (a \sin ax + b \cos ax) \quad (107)$$

$$\int x e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\cos x - x \cos x + x \sin x) \quad (108)$$

$$\int x e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (x \cos x - \sin x + x \sin x) \quad (109)$$

Integrals of Hyperbolic Functions

$$\int \cosh ax dx = \frac{1}{a} \sinh ax \quad (110)$$

$$\int e^{ax} \cosh bxdx = \begin{cases} \frac{e^{ax}}{a^2 - b^2} [a \cosh bx - b \sinh bx] & a \neq b \\ \frac{e^{2ax}}{4a} + \frac{x}{2} & a = b \end{cases} \quad (111)$$

$$\int \sinh ax dx = \frac{1}{a} \cosh ax \quad (112)$$

$$\int e^{ax} \sinh bxdx = \begin{cases} \frac{e^{ax}}{a^2 - b^2} [-b \cosh bx + a \sinh bx] & a \neq b \\ \frac{e^{2ax}}{4a} - \frac{x}{2} & a = b \end{cases} \quad (113)$$

$$\int e^{ax} \tanh bxdx = \begin{cases} \frac{e^{(a+2b)x}}{(a+2b)} {}_2F_1 \left[1 + \frac{a}{2b}, 1, 2 + \frac{a}{2b}, -e^{2bx} \right] - \frac{1}{a} e^{ax} {}_2F_1 \left[\frac{a}{2b}, 1, 1E, -e^{2bx} \right] & a \neq b \\ \frac{e^{ax} - 2 \tan^{-1}[e^{ax}]}{a} & a = b \end{cases} \quad (114)$$

$$\int \tanh ax dx = \frac{1}{a} \ln \cosh ax \quad (115)$$

$$\int \cos ax \cosh bxdx = \frac{1}{a^2 + b^2} [a \sin ax \cosh bx + b \cos ax \sinh bx] \quad (116)$$

$$\int \cos ax \sinh bxdx = \frac{1}{a^2 + b^2} [b \cos ax \cosh bx + a \sin ax \sinh bx] \quad (117)$$

$$\int \sin ax \cosh bxdx = \frac{1}{a^2 + b^2} [-a \cos ax \cosh bx + b \sin ax \sinh bx] \quad (118)$$

$$\int \sin ax \sinh bxdx = \frac{1}{a^2 + b^2} [b \cosh bx \sin ax - a \cos ax \sinh bx] \quad (119)$$

$$\int \sinh ax \cosh ax dx = \frac{1}{4a} [-2ax + \sinh 2ax] \quad (120)$$

$$\int \sinh ax \cosh bxdx = \frac{1}{b^2 - a^2} [b \cosh bx \sinh ax - a \cosh ax \sinh bx] \quad (121)$$

Table of Laplace Transforms

$f(t)$	$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$		$f(t)$	$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$	
1	$\frac{1}{s}$	(1)	$\frac{ae^{at} - be^{bt}}{a - b}$	$\frac{s}{(s - a)(s - b)}$	(19)
$e^{at}f(t)$	$F(s - a)$	(2)	te^{at}	$\frac{1}{(s - a)^2}$	(20)
$\mathcal{U}(t - a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$	(3)	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s - a)^{n+1}}$	(21)
$f(t - a)\mathcal{U}(t - a)$	$e^{-as}F(s)$	(4)	$e^{at} \sin kt$	$\frac{k}{(s - a)^2 + k^2}$	(22)
$\delta(t)$	1	(5)	$e^{at} \cos kt$	$\frac{s - a}{(s - a)^2 + k^2}$	(23)
$\delta(t - t_0)$	e^{-st_0}	(6)	$e^{at} \sinh kt$	$\frac{k}{(s - a)^2 - k^2}$	(24)
$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$	(7)	$e^{at} \cosh kt$	$\frac{s - a}{(s - a)^2 - k^2}$	(25)
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$	(8)	$t \sin kt$	$\frac{2ks}{(s^2 + k^2)^2}$	(26)
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$	(9)	$t \cos kt$	$\frac{s^2 - k^2}{(s^2 + k^2)^2}$	(27)
$\int_0^t f(x)g(t - x)dx$	$F(s)G(s)$	(10)	$t \sinh kt$	$\frac{2ks}{(s^2 - k^2)^2}$	(28)
$t^n \ (n = 0, 1, 2, \dots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	(11)	$t \cosh kt$	$\frac{s^2 + k^2}{(s^2 - k^2)^2}$	(29)
$t^x \ (x \geq -1 \in \mathbb{R})$	$\frac{\Gamma(x + 1)}{s^{x+1}}$	(12)	$\frac{\sin at}{t}$	$\arctan \frac{a}{s}$	(30)
$\sin kt$	$\frac{k}{s^2 + k^2}$	(13)	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-a^2/4t}$	$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$	(31)
$\cos kt$	$\frac{s}{s^2 + k^2}$	(14)	$\frac{a}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-a^2/4t}$	$e^{-a\sqrt{s}}$	(32)
e^{at}	$\frac{1}{s - a}$	(15)	$\operatorname{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}$	(33)
$\sinh kt$	$\frac{k}{s^2 - k^2}$	(16)			
$\cosh kt$	$\frac{s}{s^2 - k^2}$	(17)			
$\frac{e^{at} - e^{bt}}{a - b}$	$\frac{1}{(s - a)(s - b)}$	(18)			



SF1683 Differentialekvationer och transformmetoder, del 2
Tentamen
Onsdag den 12 april 2023

Skrivtid: 08:00-12:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: Mattias Dahl

Tentamen består av sex uppgifter uppdelade i två delar. Del I utgörs av de tre första uppgifterna som testar förmågan att lösa grundläggande problem. Del II utgörs av de tre sista uppgifterna och testar förmågan att lösa mer avancerade problem som även kan vara av teoretisk karaktär och är avsedda främst för högre betyg. Varje uppgift ger maximalt fyra poäng. Bonuspoäng från lappskrivningarna adderas till erhållna poäng på del I upp till maximalt 12 poäng.

Betygsgränserna vid tentamen ges av följande tabell.

Fx	E	D	C	B	A
11	12	14	16	19	21

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Funktionerna f_1, f_2 har period 2π och ges på intervallet $-\pi < x \leq \pi$ av

$$(a) \quad f_1(x) = x^2, \quad (b) \quad f_2(x) = \begin{cases} -x^2, & -\pi < x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}.$$

Beräkna deras Fourierserier. Förklara vad serierna konvergerar mot. (4 p)

2. Använd Laplacetransformen för att lösa initialvärdesproblemet

$$y''(t) + 4y(t) = \delta(t - 2\pi) + \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \pi \\ \cos(2t), & \pi \leq t \end{cases}, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0,$$

för $y(t), t \geq 0$. (4 p)

3. Använd Fouriertransformen för att bestämma lösningen till randvärdesproblemet

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = f(x)$$

för $u = u(x, y)$ som är en funktion definierad på övre halvplanet $-\infty < x < \infty, y \geq 0$, med

$$u(x, 0) = g(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

1

Här är $f(x)$ och $g(x)$ styckvis kontinuerliga, absolutintegrerbara funktioner. Följande formler kan vara användbara:

(i) $\mathcal{F}[f * g](\omega) = 2\pi \mathcal{F}[f](\omega) \cdot \mathcal{F}[g](\omega)$ där $*$ betecknar faltning (convolution)

(ii) $\mathcal{F}[f(ax + b)](\omega) = \frac{1}{|a|} e^{\frac{i\omega b}{a}} \mathcal{F}[f]\left(\frac{\omega}{a}\right)$

(iii) $\mathcal{F}[e^{icx} f(x)](\omega) = \mathcal{F}[f](\omega - c)$

(iv) $\mathcal{F}[f'](\omega) = i\omega \mathcal{F}[f](\omega)$

(v) $\mathcal{F}[xf(x)](\omega) = i \frac{d}{d\omega} \mathcal{F}[f](\omega)$

(vi) $\mathcal{F}[f(x)](\omega) = \frac{1}{2\pi i\omega} (e^{-i\omega a} - e^{-i\omega b})$ där $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{om } a \leq x \leq b \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$

(4 p)

DEL II – AVANCERADE PROBLEM

4. Laplace ekvation $\Delta u = 0$ ges i polära koordinater $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, av

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

Använd separation av variabler och Fourierserietveckling för att bestämma den lösning $u = u(r, \theta)$ på cirkelskivan $r = \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1$, $-\pi < \theta \leq \pi$, som är kontinuerlig överallt och uppfyller randvillkoret $u = |\theta|$ för punkter $(x, y) = (\cos \theta, \sin \theta)$, $-\pi < \theta \leq \pi$, på randen till cirkelskivan. (4 p)

5. Beräkna Fouriertransformen av funktionen $f(x) = e^{-c|x|}$ där $c > 0$ är en konstant. Använd sedan den allmänna Plancherelidentiteten för att beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a^2 + \omega^2)(b^2 + \omega^2)} d\omega$$

för $a, b > 0$.

(4 p)

6. Låt E vara vektorrummet av kontinuerliga komplexvärda funktioner på intervallet $[-\pi, \pi]$. Låt den inre produkten på E ges av

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

med motsvarande norm $\|f\| = \langle f, f \rangle^{1/2}$.

(a) Visa att funktionerna e^{inx} , $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, utgör ett ortonormalt system i E . Ange formlerna för Fourierkoefficienterna c_n för en funktion $f \in E$ med avseende på detta ortonormala system.

Om $f \in E$ har Fourierkoefficienter c_n så ges dess delsumma av ordning m av

$$S_m(x) = \sum_{n=-m}^m c_n e^{inx}.$$

(b) Visa att $\|f\|^2 = \|f - S_m\|^2 + \|S_m\|^2$.

(c) Visa Bessels olikhet: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \leq \|f\|^2$.

(d) Visa Riemann-Lebesgues lemma: $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow -\infty} c_n = 0$.

(4 p)

Table of Integrals*

Basic Forms

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \quad (1)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| \quad (2)$$

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (3)$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b| \quad (4)$$

Integrals of Rational Functions

$$\int \frac{1}{(x+a)^2} dx = -\frac{1}{x+a} \quad (5)$$

$$\int (x+a)^n dx = \frac{(x+a)^{n+1}}{n+1}, n \neq -1 \quad (6)$$

$$\int x(x+a)^n dx = \frac{(x+a)^{n+1}((n+1)x-a)}{(n+1)(n+2)} \quad (7)$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x \quad (8)$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} \quad (9)$$

$$\int \frac{x}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln |a^2+x^2| \quad (10)$$

$$\int \frac{x^2}{a^2+x^2} dx = x - a \tan^{-1} \frac{x}{a} \quad (11)$$

$$\int \frac{x^3}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}a^2 \ln |a^2+x^2| \quad (12)$$

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \tan^{-1} \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} \quad (13)$$

$$\int \frac{1}{(x+a)(x+b)} dx = \frac{1}{b-a} \ln \frac{a+x}{b+x}, a \neq b \quad (14)$$

$$\int \frac{x}{(x+a)^2} dx = \frac{a}{a+x} + \ln |a+x| \quad (15)$$

$$\int \frac{x}{ax^2+bx+c} dx = \frac{1}{2a} \ln |ax^2+bx+c| - \frac{b}{a\sqrt{4ac-b^2}} \tan^{-1} \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} \quad (16)$$

Integrals with Roots

$$\int \sqrt{x-a} dx = \frac{2}{3} (x-a)^{3/2} \quad (17)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x \pm a}} dx = 2\sqrt{x \pm a} \quad (18)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x}} dx = -2\sqrt{a-x} \quad (19)$$

$$\int x\sqrt{x-a} dx = \frac{2}{3}a(x-a)^{3/2} + \frac{2}{5}(x-a)^{5/2} \quad (20)$$

$$\int \sqrt{ax+b} dx = \left(\frac{2b}{3a} + \frac{2x}{3} \right) \sqrt{ax+b} \quad (21)$$

$$\int (ax+b)^{3/2} dx = \frac{2}{5a} (ax+b)^{5/2} \quad (22)$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x \pm a}} dx = \frac{2}{3} (x \mp 2a) \sqrt{x \pm a} \quad (23)$$

$$\int \sqrt{\frac{x}{a-x}} dx = -\sqrt{x(a-x)} - a \tan^{-1} \frac{\sqrt{x(a-x)}}{x-a} \quad (24)$$

$$\int \sqrt{\frac{x}{a+x}} dx = \sqrt{x(a+x)} - a \ln [\sqrt{x} + \sqrt{x+a}] \quad (25)$$

$$\int x\sqrt{ax+b} dx = \frac{2}{15a^2} (-2b^2 + abx + 3a^2x^2) \sqrt{ax+b} \quad (26)$$

$$\int \sqrt{x(ax+b)} dx = \frac{1}{4a^{3/2}} \left[(2ax+b) \sqrt{ax(ax+b)} - b^2 \ln |a\sqrt{x} + \sqrt{a(ax+b)}| \right] \quad (27)$$

$$\int \sqrt{x^3(ax+b)} dx = \left[\frac{b}{12a} - \frac{b^2}{8a^2x} + \frac{x}{3} \right] \sqrt{x^3(ax+b)} + \frac{b^3}{8a^{5/2}} \ln |a\sqrt{x} + \sqrt{a(ax+b)}| \quad (28)$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{1}{2}a^2 \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| \quad (29)$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2}a^2 \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (30)$$

$$\int x\sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{3} (x^2 \pm a^2)^{3/2} \quad (31)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| \quad (32)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \sin^{-1} \frac{x}{a} \quad (33)$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \sqrt{x^2 \pm a^2} \quad (34)$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = -\sqrt{a^2 - x^2} \quad (35)$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 \pm a^2} \mp \frac{1}{2}a^2 \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| \quad (36)$$

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c} dx = \frac{b+2ax}{4a} \sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{4ac-b^2}{8a^{3/2}} \ln |2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}| \quad (37)$$

$$\int x\sqrt{ax^2+bx+c} dx = \frac{1}{48a^{5/2}} \left(2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c} \times (-3b^2+2abx+8a(c+ax^2)) + 3(b^3-4abc) \ln |b+2ax+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}| \right) \quad (38)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln |2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}| \quad (39)$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = \frac{1}{a} \sqrt{ax^2+bx+c} - \frac{b}{2a^{3/2}} \ln |2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}| \quad (40)$$

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}} \quad (41)$$

Integrals with Logarithms

$$\int \ln ax dx = x \ln ax - x \quad (42)$$

$$\int \frac{\ln ax}{x} dx = \frac{1}{2} (\ln ax)^2 \quad (43)$$

$$\int \ln(ax+b) dx = \left(x + \frac{b}{a} \right) \ln(ax+b) - x, a \neq 0 \quad (44)$$

$$\int \ln(x^2+a^2) dx = x \ln(x^2+a^2) + 2a \tan^{-1} \frac{x}{a} - 2x \quad (45)$$

$$\int \ln(x^2-a^2) dx = x \ln(x^2-a^2) + a \ln \frac{x+a}{x-a} - 2x \quad (46)$$

$$\int \ln(ax^2+bx+c) dx = \frac{1}{a} \sqrt{4ac-b^2} \tan^{-1} \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} - 2x + \left(\frac{b}{2a} + x \right) \ln(ax^2+bx+c) \quad (47)$$

$$\int x \ln(ax+b) dx = \frac{bx}{2a} - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{b^2}{a^2} \right) \ln(ax+b) \quad (48)$$

$$\int x \ln(a^2-b^2x^2) dx = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{a^2}{b^2} \right) \ln(a^2-b^2x^2) \quad (49)$$

Integrals with Exponentials

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} \quad (50)$$

$$\int \sqrt{x} e^{ax} dx = \frac{1}{a} \sqrt{x} e^{ax} + \frac{i\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}} \operatorname{erf}(i\sqrt{ax}), \text{ where } \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (51)$$

$$\int x e^x dx = (x-1) e^x \quad (52)$$

$$\int x e^{ax} dx = \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \right) e^{ax} \quad (53)$$

$$\int x^2 e^x dx = (x^2 - 2x + 2) e^x \quad (54)$$

$$\int x^2 e^{ax} dx = \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right) e^{ax} \quad (55)$$

$$\int x^3 e^x dx = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) e^x \quad (56)$$

$$\int x^n e^{ax} dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx \quad (57)$$

$$\int x^n e^{ax} dx = \frac{(-1)^n}{a^{n+1}} \Gamma[1+n, -ax], \text{ where } \Gamma(a, x) = \int_x^\infty t^{a-1} e^{-t} dt \quad (58)$$

$$\int e^{ax^2} dx = -\frac{i\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \operatorname{erf}(i\sqrt{a}x) \quad (59)$$

$$\int e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \operatorname{erf}(x\sqrt{a}) \quad (60)$$

$$\int x e^{-ax^2} dx = -\frac{1}{2a} e^{-ax^2} \quad (61)$$

$$\int x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{a^3}} \operatorname{erf}(x\sqrt{a}) - \frac{x}{2a} e^{-ax^2} \quad (62)$$

*© 2014. From <http://integral-table.com>, last revised June 14, 2014. This material is provided as is without warranty or representation about the accuracy, correctness or suitability of the material for any purpose, and is licensed under the Creative Commons Attribution-Noncommercial-ShareAlike 3.0 United States License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/> or send a letter to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.

Integrals with Trigonometric Functions

$$\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax \quad (63)$$

$$\int \sin^2 ax dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a} \quad (64)$$

$$\int \sin^n ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax {}_2F_1 \left[\frac{1}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{3}{2}, \cos^2 ax \right] \quad (65)$$

$$\int \sin^3 ax dx = -\frac{3 \cos ax}{4a} + \frac{\cos 3ax}{12a} \quad (66)$$

$$\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax \quad (67)$$

$$\int \cos^2 ax dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a} \quad (68)$$

$$\int \cos^p ax dx = -\frac{1}{a(1+p)} \cos^{1+p} ax \times {}_2F_1 \left[\frac{1+p}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3+p}{2}, \cos^2 ax \right] \quad (69)$$

$$\int \cos^3 ax dx = \frac{3 \sin ax}{4a} + \frac{\sin 3ax}{12a} \quad (70)$$

$$\int \cos ax \sin bxdx = \frac{\cos[(a-b)x]}{2(a-b)} - \frac{\cos[(a+b)x]}{2(a+b)}, a \neq b \quad (71)$$

$$\int \sin^2 ax \cos bxdx = -\frac{\sin[(2a-b)x]}{4(2a-b)} + \frac{\sin bx}{2b} - \frac{\sin[(2a+b)x]}{4(2a+b)} \quad (72)$$

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \frac{1}{3} \sin^3 x \quad (73)$$

$$\int \cos^2 ax \sin bxdx = \frac{\cos[(2a-b)x]}{4(2a-b)} - \frac{\cos bx}{2b} - \frac{\cos[(2a+b)x]}{4(2a+b)} \quad (74)$$

$$\int \cos^2 ax \sin ax dx = -\frac{1}{3a} \cos^3 ax \quad (75)$$

$$\int \sin^2 ax \cos^2 bxdx = \frac{x}{4} - \frac{\sin 2ax}{8a} - \frac{\sin[2(a-b)x]}{16(a-b)} + \frac{\sin 2bx}{8b} - \frac{\sin[2(a+b)x]}{16(a+b)} \quad (76)$$

$$\int \sin^2 ax \cos^2 ax dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4ax}{32a} \quad (77)$$

$$\int \tan ax dx = -\frac{1}{a} \ln \cos ax \quad (78)$$

$$\int \tan^2 ax dx = -x + \frac{1}{a} \tan ax \quad (79)$$

$$\int \tan^n ax dx = \frac{\tan^{n+1} ax}{a(1+n)} \times {}_2F_1 \left(\frac{n+1}{2}, 1, \frac{n+3}{2}, -\tan^2 ax \right) \quad (80)$$

$$\int \tan^3 ax dx = \frac{1}{a} \ln \cos ax + \frac{1}{2a} \sec^2 ax \quad (81)$$

$$\int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| = 2 \tanh^{-1} \left(\tan \frac{x}{2} \right) \quad (82)$$

$$\int \sec^2 ax dx = \frac{1}{a} \tan ax \quad (83)$$

$$\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \tan x| \quad (84)$$

$$\int \sec x \tan x dx = \sec x \quad (85)$$

$$\int \sec^2 x \tan x dx = \frac{1}{2} \sec^2 x \quad (86)$$

$$\int \sec^n x \tan x dx = \frac{1}{n} \sec^n x, n \neq 0 \quad (87)$$

$$\int \csc x dx = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| = \ln |\csc x - \cot x| + C \quad (88)$$

$$\int \csc^2 ax dx = -\frac{1}{a} \cot ax \quad (89)$$

$$\int \csc^3 x dx = -\frac{1}{2} \cot x \csc x + \frac{1}{2} \ln |\csc x - \cot x| \quad (90)$$

$$\int \csc^n x \cot x dx = -\frac{1}{n} \csc^n x, n \neq 0 \quad (91)$$

$$\int \sec x \csc x dx = \ln |\tan x| \quad (92)$$

Products of Trigonometric Functions and Monomials

$$\int x \cos x dx = \cos x + x \sin x \quad (93)$$

$$\int x \cos ax dx = \frac{1}{a^2} \cos ax + \frac{x}{a} \sin ax \quad (94)$$

$$\int x^2 \cos x dx = 2x \cos x + (x^2 - 2) \sin x \quad (95)$$

$$\int x^2 \cos ax dx = \frac{2x \cos ax}{a^2} + \frac{a^2 x^2 - 2}{a^3} \sin ax \quad (96)$$

$$\int x^n \cos x dx = -\frac{1}{2} (i)^{n+1} [\Gamma(n+1, -ix) + (-1)^n \Gamma(n+1, ix)] \quad (97)$$

$$\int x^n \cos ax dx = \frac{1}{2} (ia)^{1-n} [(-1)^n \Gamma(n+1, -iax) - \Gamma(n+1, iax)] \quad (98)$$

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \sin x \quad (99)$$

$$\int x \sin ax dx = -\frac{x \cos ax}{a} + \frac{\sin ax}{a^2} \quad (100)$$

$$\int x^2 \sin x dx = (2 - x^2) \cos x + 2x \sin x \quad (101)$$

$$\int x^2 \sin ax dx = \frac{2 - a^2 x^2}{a^3} \cos ax + \frac{2x \sin ax}{a^2} \quad (102)$$

$$\int x^n \sin x dx = -\frac{1}{2} (i)^n [\Gamma(n+1, -ix) - (-1)^n \Gamma(n+1, -ix)] \quad (103)$$

Products of Trigonometric Functions and Exponentials

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) \quad (104)$$

$$\int e^{bx} \sin ax dx = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{bx} (b \sin ax - a \cos ax) \quad (105)$$

$$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) \quad (106)$$

$$\int e^{bx} \cos ax dx = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{bx} (a \sin ax + b \cos ax) \quad (107)$$

$$\int x e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\cos x - x \cos x + x \sin x) \quad (108)$$

$$\int x e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (x \cos x - \sin x + x \sin x) \quad (109)$$

Integrals of Hyperbolic Functions

$$\int \cosh ax dx = \frac{1}{a} \sinh ax \quad (110)$$

$$\int e^{ax} \cosh bxdx = \begin{cases} \frac{e^{ax}}{a^2 - b^2} [a \cosh bx - b \sinh bx] & a \neq b \\ \frac{e^{2ax}}{4a} + \frac{x}{2} & a = b \end{cases} \quad (111)$$

$$\int \sinh ax dx = \frac{1}{a} \cosh ax \quad (112)$$

$$\int e^{ax} \sinh bxdx = \begin{cases} \frac{e^{ax}}{a^2 - b^2} [-b \cosh bx + a \sinh bx] & a \neq b \\ \frac{e^{2ax}}{4a} - \frac{x}{2} & a = b \end{cases} \quad (113)$$

$$\int e^{ax} \tanh bxdx = \begin{cases} \frac{e^{(a+2b)x}}{(a+2b)} {}_2F_1 \left[1 + \frac{a}{2b}, 1, 2 + \frac{a}{2b}, -e^{2bx} \right] - \frac{1}{a} e^{ax} {}_2F_1 \left[\frac{a}{2b}, 1, 1E, -e^{2bx} \right] & a \neq b \\ \frac{e^{ax} - 2 \tan^{-1}[e^{ax}]}{a} & a = b \end{cases} \quad (114)$$

$$\int \tanh ax dx = \frac{1}{a} \ln \cosh ax \quad (115)$$

$$\int \cos ax \cosh bxdx = \frac{1}{a^2 + b^2} [a \sin ax \cosh bx + b \cos ax \sinh bx] \quad (116)$$

$$\int \cos ax \sinh bxdx = \frac{1}{a^2 + b^2} [b \cos ax \cosh bx + a \sin ax \sinh bx] \quad (117)$$

$$\int \sin ax \cosh bxdx = \frac{1}{a^2 + b^2} [-a \cos ax \cosh bx + b \sin ax \sinh bx] \quad (118)$$

$$\int \sin ax \sinh bxdx = \frac{1}{a^2 + b^2} [b \cosh bx \sin ax - a \cos ax \sinh bx] \quad (119)$$

$$\int \sinh ax \cosh bxdx = \frac{1}{4a} [-2ax + \sinh 2ax] \quad (120)$$

$$\int \sinh ax \cosh bxdx = \frac{1}{b^2 - a^2} [b \cosh bx \sinh ax - a \cosh ax \sinh bx] \quad (121)$$

Table of Laplace Transforms

$f(t)$	$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$		$f(t)$	$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$	
1	$\frac{1}{s}$	(1)	$\frac{ae^{at} - be^{bt}}{a - b}$	$\frac{s}{(s - a)(s - b)}$	(19)
$e^{at}f(t)$	$F(s - a)$	(2)	te^{at}	$\frac{1}{(s - a)^2}$	(20)
$\mathcal{U}(t - a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$	(3)	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s - a)^{n+1}}$	(21)
$f(t - a)\mathcal{U}(t - a)$	$e^{-as}F(s)$	(4)	$e^{at} \sin kt$	$\frac{k}{(s - a)^2 + k^2}$	(22)
$\delta(t)$	1	(5)	$e^{at} \cos kt$	$\frac{s - a}{(s - a)^2 + k^2}$	(23)
$\delta(t - t_0)$	e^{-st_0}	(6)	$e^{at} \sinh kt$	$\frac{k}{(s - a)^2 - k^2}$	(24)
$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$	(7)	$e^{at} \cosh kt$	$\frac{s - a}{(s - a)^2 - k^2}$	(25)
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$	(8)	$t \sin kt$	$\frac{2ks}{(s^2 + k^2)^2}$	(26)
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$	(9)	$t \cos kt$	$\frac{s^2 - k^2}{(s^2 + k^2)^2}$	(27)
$\int_0^t f(x)g(t - x)dx$	$F(s)G(s)$	(10)	$t \sinh kt$	$\frac{2ks}{(s^2 - k^2)^2}$	(28)
$t^n \ (n = 0, 1, 2, \dots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	(11)	$t \cosh kt$	$\frac{s^2 + k^2}{(s^2 - k^2)^2}$	(29)
$t^x \ (x \geq -1 \in \mathbb{R})$	$\frac{\Gamma(x + 1)}{s^{x+1}}$	(12)	$\frac{\sin at}{t}$	$\arctan \frac{a}{s}$	(30)
$\sin kt$	$\frac{k}{s^2 + k^2}$	(13)	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-a^2/4t}$	$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$	(31)
$\cos kt$	$\frac{s}{s^2 + k^2}$	(14)	$\frac{a}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-a^2/4t}$	$e^{-a\sqrt{s}}$	(32)
e^{at}	$\frac{1}{s - a}$	(15)	$\operatorname{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}$	(33)
$\sinh kt$	$\frac{k}{s^2 - k^2}$	(16)			
$\cosh kt$	$\frac{s}{s^2 - k^2}$	(17)			
$\frac{e^{at} - e^{bt}}{a - b}$	$\frac{1}{(s - a)(s - b)}$	(18)			



SF1683 Differentialekvationer och transformmetoder, del 2
Tentamen
Fredag den 12 januari 2024

Skrivtid: 08:00-12:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: Mattias Dahl

Tentamen består av sex uppgifter uppdelade i två delar. Del I utgörs av de tre första uppgifterna som testar förmågan att lösa grundläggande problem. Del II utgörs av de tre sista uppgifterna och testar förmågan att lösa mer avancerade problem som även kan vara av teoretisk karaktär och är avsedda främst för högre betyg. Varje uppgift ger maximalt fyra poäng. Bonuspoäng från lappskrivningarna adderas till erhållna poäng på del I upp till maximalt 12 poäng.

Betygsgränserna vid tentamen ges av följande tabell.

Fx	E	D	C	B	A
11	12	14	16	19	21

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Låt funktionen $f(x)$ vara definierad som $f(x) = \sin(3x)$ för $0 \leq x \leq \pi$. Utvidga $f(x)$ till en funktion på intervallet $-\pi \leq x \leq \pi$ på tre olika sätt:

- (a) $f_a(x)$ som är en jämn funktion,
- (b) $f_b(x)$ som är en udda funktion,
- (c) $f_c(x)$ som har $f_c(x) = 0$ för $-\pi \leq x < 0$.

Beräkna Fourierserierna för $f_a(x)$, $f_b(x)$, $f_c(x)$. Förklara vad serierna konvergerar mot i de tre olika fallen.

(4 p)

2. Använd Laplacetransformen för att lösa initialvärdesproblemet

$$y''(t) + 9y(t) = \delta(t - \pi) + \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 2\pi \\ \sin(3t), & 2\pi \leq t \end{cases}, \quad y(0) = y'(0) = 0,$$

för $y(t)$ där $t \geq 0$. (Ledning: skriv om den transformerade ekvationen så att formel (27) kan användas.)

(4 p)

3. Använd separation av variabler för att lösa värmeledningsproblemet

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

för $u = u(x, t)$, $0 \leq x \leq \pi$, $t \geq 0$, med randvillkor

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, t) = 0, \quad t > 0$$

och initialvillkor

$$u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} 5, & 0 \leq x < \pi/4 \\ -2, & \pi/4 \leq x \leq \pi \end{cases}.$$

Lösningen innehåller koefficienter för en Fourierserieutveckling. Ange integraler som ger dessa koefficienter. Integralerna behöver inte beräknas. Beräkna dock gränsvärdet $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$ för $0 \leq x \leq \pi$.

(4 p)

DEL II – AVANCERADE PROBLEM

4. Använd Fouriertransformen för att bestämma den absolutintegrerbara funktion $y(x)$, för $-\infty < x < \infty$, som uppfyller

$$2y''(x) + xy'(x) + y(x) = 0, \quad y(0) = 1.$$

Följande formler kan vara användbara:

- (i) $\mathcal{F}[f * g](\omega) = 2\pi \mathcal{F}[f](\omega) \cdot \mathcal{F}[g](\omega)$ där $*$ betecknar faltning (convolution)
- (ii) $\mathcal{F}[f(ax + b)](\omega) = \frac{1}{|a|} e^{\frac{i\omega b}{a}} \mathcal{F}[f]\left(\frac{\omega}{a}\right)$
- (iii) $\mathcal{F}[e^{icx} f(x)](\omega) = \mathcal{F}[f](\omega - c)$
- (iv) $\mathcal{F}[f'](\omega) = i\omega \mathcal{F}[f](\omega)$
- (v) $\mathcal{F}[xf(x)](\omega) = i \frac{d}{d\omega} \mathcal{F}[f](\omega)$
- (vi) $\mathcal{F}[e^{-x^2}](\omega) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}}$

(4 p)

5. (a) Formulera satsen om invers Fouriertransform.
 (b) Beräkna Fouriertransformen av funktionen $f(x) = e^{-|x|}$.
 (c) Använd (a) och (b) för att beräkna Fouriertransformen av $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

(4 p)

6. (a) I beviset av Dirichlets sats om punktvis konvergens av Fourierserier används att delsumman $S_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^m [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$ av Fourierserien till funktionen $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ kan skrivas som en integral som innehåller funktionen f samt Dirichletkärnan $D_m(t) = \frac{\sin(m+\frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{1}{2}t}$. Bevisa detta.
 (b) Skissera beviset av Dirichlets sats. Ange förutsättningar och slutsatser. (Ledning: Använd Riemann-Lebesgues lemma på hjälpfunktionen $g(t) = \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2 \sin \frac{1}{2}t}$.)

(4 p)

Table of Integrals*

Basic Forms

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \quad (1)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| \quad (2)$$

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (3)$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b| \quad (4)$$

Integrals of Rational Functions

$$\int \frac{1}{(x+a)^2} dx = -\frac{1}{x+a} \quad (5)$$

$$\int (x+a)^n dx = \frac{(x+a)^{n+1}}{n+1}, n \neq -1 \quad (6)$$

$$\int x(x+a)^n dx = \frac{(x+a)^{n+1}((n+1)x-a)}{(n+1)(n+2)} \quad (7)$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x \quad (8)$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} \quad (9)$$

$$\int \frac{x}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln |a^2+x^2| \quad (10)$$

$$\int \frac{x^2}{a^2+x^2} dx = x - a \tan^{-1} \frac{x}{a} \quad (11)$$

$$\int \frac{x^3}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}a^2 \ln |a^2+x^2| \quad (12)$$

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \tan^{-1} \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} \quad (13)$$

$$\int \frac{1}{(x+a)(x+b)} dx = \frac{1}{b-a} \ln \frac{a+x}{b+x}, a \neq b \quad (14)$$

$$\int \frac{x}{(x+a)^2} dx = \frac{a}{a+x} + \ln |a+x| \quad (15)$$

$$\int \frac{x}{ax^2+bx+c} dx = \frac{1}{2a} \ln |ax^2+bx+c| - \frac{b}{a\sqrt{4ac-b^2}} \tan^{-1} \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} \quad (16)$$

Integrals with Roots

$$\int \sqrt{x-a} dx = \frac{2}{3} (x-a)^{3/2} \quad (17)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x \pm a}} dx = 2\sqrt{x \pm a} \quad (18)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x}} dx = -2\sqrt{a-x} \quad (19)$$

$$\int x\sqrt{x-a} dx = \frac{2}{3}a(x-a)^{3/2} + \frac{2}{5}(x-a)^{5/2} \quad (20)$$

$$\int \sqrt{ax+b} dx = \left(\frac{2b}{3a} + \frac{2x}{3} \right) \sqrt{ax+b} \quad (21)$$

$$\int (ax+b)^{3/2} dx = \frac{2}{5a} (ax+b)^{5/2} \quad (22)$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x \pm a}} dx = \frac{2}{3} (x \mp 2a) \sqrt{x \pm a} \quad (23)$$

$$\int \sqrt{\frac{x}{a-x}} dx = -\sqrt{x(a-x)} - a \tan^{-1} \frac{\sqrt{x(a-x)}}{x-a} \quad (24)$$

$$\int \sqrt{\frac{x}{a+x}} dx = \sqrt{x(a+x)} - a \ln [\sqrt{x} + \sqrt{x+a}] \quad (25)$$

$$\int x\sqrt{ax+b} dx = \frac{2}{15a^2} (-2b^2 + abx + 3a^2x^2) \sqrt{ax+b} \quad (26)$$

$$\int \sqrt{x(ax+b)} dx = \frac{1}{4a^{3/2}} \left[(2ax+b) \sqrt{ax(ax+b)} - b^2 \ln |a\sqrt{x} + \sqrt{a(ax+b)}| \right] \quad (27)$$

$$\int \sqrt{x^3(ax+b)} dx = \left[\frac{b}{12a} - \frac{b^2}{8a^2x} + \frac{x}{3} \right] \sqrt{x^3(ax+b)} + \frac{b^3}{8a^{5/2}} \ln |a\sqrt{x} + \sqrt{a(ax+b)}| \quad (28)$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{1}{2}a^2 \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| \quad (29)$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2}a^2 \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (30)$$

$$\int x\sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{3} (x^2 \pm a^2)^{3/2} \quad (31)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| \quad (32)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \sin^{-1} \frac{x}{a} \quad (33)$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \sqrt{x^2 \pm a^2} \quad (34)$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = -\sqrt{a^2 - x^2} \quad (35)$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 \pm a^2} \mp \frac{1}{2}a^2 \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| \quad (36)$$

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c} dx = \frac{b+2ax}{4a} \sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{4ac-b^2}{8a^{3/2}} \ln |2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}| \quad (37)$$

$$\int x\sqrt{ax^2+bx+c} dx = \frac{1}{48a^{5/2}} \left(2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c} \times (-3b^2+2abx+8a(c+ax^2)) + 3(b^3-4abc) \ln |b+2ax+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}| \right) \quad (38)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln |2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}| \quad (39)$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = \frac{1}{a} \sqrt{ax^2+bx+c} - \frac{b}{2a^{3/2}} \ln |2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}| \quad (40)$$

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}} \quad (41)$$

Integrals with Logarithms

$$\int \ln ax dx = x \ln ax - x \quad (42)$$

$$\int \frac{\ln ax}{x} dx = \frac{1}{2} (\ln ax)^2 \quad (43)$$

$$\int \ln(ax+b) dx = \left(x + \frac{b}{a} \right) \ln(ax+b) - x, a \neq 0 \quad (44)$$

$$\int \ln(x^2+a^2) dx = x \ln(x^2+a^2) + 2a \tan^{-1} \frac{x}{a} - 2x \quad (45)$$

$$\int \ln(x^2-a^2) dx = x \ln(x^2-a^2) + a \ln \frac{x+a}{x-a} - 2x \quad (46)$$

$$\int \ln(ax^2+bx+c) dx = \frac{1}{a} \sqrt{4ac-b^2} \tan^{-1} \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} - 2x + \left(\frac{b}{2a} + x \right) \ln(ax^2+bx+c) \quad (47)$$

$$\int x \ln(ax+b) dx = \frac{bx}{2a} - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{b^2}{a^2} \right) \ln(ax+b) \quad (48)$$

$$\int x \ln(a^2-b^2x^2) dx = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{a^2}{b^2} \right) \ln(a^2-b^2x^2) \quad (49)$$

Integrals with Exponentials

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} \quad (50)$$

$$\int \sqrt{x} e^{ax} dx = \frac{1}{a} \sqrt{x} e^{ax} + \frac{i\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}} \operatorname{erf}(i\sqrt{ax}), \text{ where } \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (51)$$

$$\int x e^x dx = (x-1) e^x \quad (52)$$

$$\int x e^{ax} dx = \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \right) e^{ax} \quad (53)$$

$$\int x^2 e^x dx = (x^2 - 2x + 2) e^x \quad (54)$$

$$\int x^2 e^{ax} dx = \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right) e^{ax} \quad (55)$$

$$\int x^3 e^x dx = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) e^x \quad (56)$$

$$\int x^n e^{ax} dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx \quad (57)$$

$$\int x^n e^{ax} dx = \frac{(-1)^n}{a^{n+1}} \Gamma[1+n, -ax], \text{ where } \Gamma(a, x) = \int_x^\infty t^{a-1} e^{-t} dt \quad (58)$$

$$\int e^{ax^2} dx = -\frac{i\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \operatorname{erf}(i\sqrt{a}x) \quad (59)$$

$$\int e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \operatorname{erf}(x\sqrt{a}) \quad (60)$$

$$\int x e^{-ax^2} dx = -\frac{1}{2a} e^{-ax^2} \quad (61)$$

$$\int x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{a^3}} \operatorname{erf}(x\sqrt{a}) - \frac{x}{2a} e^{-ax^2} \quad (62)$$

*© 2014. From <http://integral-table.com>, last revised June 14, 2014. This material is provided as is without warranty or representation about the accuracy, correctness or suitability of the material for any purpose, and is licensed under the Creative Commons Attribution-Noncommercial-ShareAlike 3.0 United States License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/> or send a letter to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.

Integrals with Trigonometric Functions

$$\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax \quad (63)$$

$$\int \sin^2 ax dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a} \quad (64)$$

$$\int \sin^n ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax {}_2F_1 \left[\frac{1}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{3}{2}, \cos^2 ax \right] \quad (65)$$

$$\int \sin^3 ax dx = -\frac{3 \cos ax}{4a} + \frac{\cos 3ax}{12a} \quad (66)$$

$$\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax \quad (67)$$

$$\int \cos^2 ax dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a} \quad (68)$$

$$\int \cos^p ax dx = -\frac{1}{a(1+p)} \cos^{1+p} ax \times {}_2F_1 \left[\frac{1+p}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3+p}{2}, \cos^2 ax \right] \quad (69)$$

$$\int \cos^3 ax dx = \frac{3 \sin ax}{4a} + \frac{\sin 3ax}{12a} \quad (70)$$

$$\int \cos ax \sin bxdx = \frac{\cos[(a-b)x]}{2(a-b)} - \frac{\cos[(a+b)x]}{2(a+b)}, a \neq b \quad (71)$$

$$\int \sin^2 ax \cos bxdx = -\frac{\sin[(2a-b)x]}{4(2a-b)} + \frac{\sin bx}{2b} - \frac{\sin[(2a+b)x]}{4(2a+b)} \quad (72)$$

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \frac{1}{3} \sin^3 x \quad (73)$$

$$\int \cos^2 ax \sin bxdx = \frac{\cos[(2a-b)x]}{4(2a-b)} - \frac{\cos bx}{2b} - \frac{\cos[(2a+b)x]}{4(2a+b)} \quad (74)$$

$$\int \cos^2 ax \sin ax dx = -\frac{1}{3a} \cos^3 ax \quad (75)$$

$$\int \sin^2 ax \cos^2 bxdx = \frac{x}{4} - \frac{\sin 2ax}{8a} - \frac{\sin[2(a-b)x]}{16(a-b)} + \frac{\sin 2bx}{8b} - \frac{\sin[2(a+b)x]}{16(a+b)} \quad (76)$$

$$\int \sin^2 ax \cos^2 ax dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4ax}{32a} \quad (77)$$

$$\int \tan ax dx = -\frac{1}{a} \ln \cos ax \quad (78)$$

$$\int \tan^2 ax dx = -x + \frac{1}{a} \tan ax \quad (79)$$

$$\int \tan^n ax dx = \frac{\tan^{n+1} ax}{a(1+n)} \times {}_2F_1 \left(\frac{n+1}{2}, 1, \frac{n+3}{2}, -\tan^2 ax \right) \quad (80)$$

$$\int \tan^3 ax dx = \frac{1}{a} \ln \cos ax + \frac{1}{2a} \sec^2 ax \quad (81)$$

$$\int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| = 2 \tanh^{-1} \left(\tan \frac{x}{2} \right) \quad (82)$$

$$\int \sec^2 ax dx = \frac{1}{a} \tan ax \quad (83)$$

$$\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \tan x| \quad (84)$$

$$\int \sec x \tan x dx = \sec x \quad (85)$$

$$\int \sec^2 x \tan x dx = \frac{1}{2} \sec^2 x \quad (86)$$

$$\int \sec^n x \tan x dx = \frac{1}{n} \sec^n x, n \neq 0 \quad (87)$$

$$\int \csc x dx = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| = \ln |\csc x - \cot x| + C \quad (88)$$

$$\int \csc^2 ax dx = -\frac{1}{a} \cot ax \quad (89)$$

$$\int \csc^3 x dx = -\frac{1}{2} \cot x \csc x + \frac{1}{2} \ln |\csc x - \cot x| \quad (90)$$

$$\int \csc^n x \cot x dx = -\frac{1}{n} \csc^n x, n \neq 0 \quad (91)$$

$$\int \sec x \csc x dx = \ln |\tan x| \quad (92)$$

Products of Trigonometric Functions and Monomials

$$\int x \cos x dx = \cos x + x \sin x \quad (93)$$

$$\int x \cos ax dx = \frac{1}{a^2} \cos ax + \frac{x}{a} \sin ax \quad (94)$$

$$\int x^2 \cos x dx = 2x \cos x + (x^2 - 2) \sin x \quad (95)$$

$$\int x^2 \cos ax dx = \frac{2x \cos ax}{a^2} + \frac{a^2 x^2 - 2}{a^3} \sin ax \quad (96)$$

$$\int x^n \cos x dx = -\frac{1}{2} (i)^{n+1} [\Gamma(n+1, -ix) + (-1)^n \Gamma(n+1, ix)] \quad (97)$$

$$\int x^n \cos ax dx = \frac{1}{2} (ia)^{1-n} [(-1)^n \Gamma(n+1, -iax) - \Gamma(n+1, iax)] \quad (98)$$

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \sin x \quad (99)$$

$$\int x \sin ax dx = -\frac{x \cos ax}{a} + \frac{\sin ax}{a^2} \quad (100)$$

$$\int x^2 \sin x dx = (2 - x^2) \cos x + 2x \sin x \quad (101)$$

$$\int x^2 \sin ax dx = \frac{2 - a^2 x^2}{a^3} \cos ax + \frac{2x \sin ax}{a^2} \quad (102)$$

$$\int x^n \sin x dx = -\frac{1}{2} (i)^n [\Gamma(n+1, -ix) - (-1)^n \Gamma(n+1, -ix)] \quad (103)$$

Products of Trigonometric Functions and Exponentials

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) \quad (104)$$

$$\int e^{bx} \sin ax dx = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{bx} (b \sin ax - a \cos ax) \quad (105)$$

$$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) \quad (106)$$

$$\int e^{bx} \cos ax dx = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{bx} (a \sin ax + b \cos ax) \quad (107)$$

$$\int x e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\cos x - x \cos x + x \sin x) \quad (108)$$

$$\int x e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (x \cos x - \sin x + x \sin x) \quad (109)$$

Integrals of Hyperbolic Functions

$$\int \cosh ax dx = \frac{1}{a} \sinh ax \quad (110)$$

$$\int e^{ax} \cosh bxdx = \begin{cases} \frac{e^{ax}}{a^2 - b^2} [a \cosh bx - b \sinh bx] & a \neq b \\ \frac{e^{2ax}}{4a} + \frac{x}{2} & a = b \end{cases} \quad (111)$$

$$\int \sinh ax dx = \frac{1}{a} \cosh ax \quad (112)$$

$$\int e^{ax} \sinh bxdx = \begin{cases} \frac{e^{ax}}{a^2 - b^2} [-b \cosh bx + a \sinh bx] & a \neq b \\ \frac{e^{2ax}}{4a} - \frac{x}{2} & a = b \end{cases} \quad (113)$$

$$\int e^{ax} \tanh bxdx = \begin{cases} \frac{e^{(a+2b)x}}{(a+2b)} {}_2F_1 \left[1 + \frac{a}{2b}, 1, 2 + \frac{a}{2b}, -e^{2bx} \right] - \frac{1}{a} e^{ax} {}_2F_1 \left[\frac{a}{2b}, 1, 1E, -e^{2bx} \right] & a \neq b \\ \frac{e^{ax} - 2 \tan^{-1}[e^{ax}]}{a} & a = b \end{cases} \quad (114)$$

$$\int \tanh ax dx = \frac{1}{a} \ln \cosh ax \quad (115)$$

$$\int \cos ax \cosh bxdx = \frac{1}{a^2 + b^2} [a \sin ax \cosh bx + b \cos ax \sinh bx] \quad (116)$$

$$\int \cos ax \sinh bxdx = \frac{1}{a^2 + b^2} [b \cos ax \cosh bx + a \sin ax \sinh bx] \quad (117)$$

$$\int \sin ax \cosh bxdx = \frac{1}{a^2 + b^2} [-a \cos ax \cosh bx + b \sin ax \sinh bx] \quad (118)$$

$$\int \sin ax \sinh bxdx = \frac{1}{a^2 + b^2} [b \cosh bx \sin ax - a \cos ax \sinh bx] \quad (119)$$

$$\int \sinh ax \cosh bxdx = \frac{1}{4a} [-2ax + \sinh 2ax] \quad (120)$$

$$\int \sinh ax \cosh bxdx = \frac{1}{b^2 - a^2} [b \cosh bx \sinh ax - a \cosh ax \sinh bx] \quad (121)$$

Table of Laplace Transforms

$f(t)$	$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$		$f(t)$	$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$	
1	$\frac{1}{s}$	(1)	$\frac{ae^{at} - be^{bt}}{a - b}$	$\frac{s}{(s - a)(s - b)}$	(19)
$e^{at}f(t)$	$F(s - a)$	(2)	te^{at}	$\frac{1}{(s - a)^2}$	(20)
$\mathcal{U}(t - a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$	(3)	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s - a)^{n+1}}$	(21)
$f(t - a)\mathcal{U}(t - a)$	$e^{-as}F(s)$	(4)	$e^{at} \sin kt$	$\frac{k}{(s - a)^2 + k^2}$	(22)
$\delta(t)$	1	(5)	$e^{at} \cos kt$	$\frac{s - a}{(s - a)^2 + k^2}$	(23)
$\delta(t - t_0)$	e^{-st_0}	(6)	$e^{at} \sinh kt$	$\frac{k}{(s - a)^2 - k^2}$	(24)
$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$	(7)	$e^{at} \cosh kt$	$\frac{s - a}{(s - a)^2 - k^2}$	(25)
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$	(8)	$t \sin kt$	$\frac{2ks}{(s^2 + k^2)^2}$	(26)
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$	(9)	$t \cos kt$	$\frac{s^2 - k^2}{(s^2 + k^2)^2}$	(27)
$\int_0^t f(x)g(t - x)dx$	$F(s)G(s)$	(10)	$t \sinh kt$	$\frac{2ks}{(s^2 - k^2)^2}$	(28)
$t^n \ (n = 0, 1, 2, \dots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	(11)	$t \cosh kt$	$\frac{s^2 + k^2}{(s^2 - k^2)^2}$	(29)
$t^x \ (x \geq -1 \in \mathbb{R})$	$\frac{\Gamma(x + 1)}{s^{x+1}}$	(12)	$\frac{\sin at}{t}$	$\arctan \frac{a}{s}$	(30)
$\sin kt$	$\frac{k}{s^2 + k^2}$	(13)	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-a^2/4t}$	$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$	(31)
$\cos kt$	$\frac{s}{s^2 + k^2}$	(14)	$\frac{a}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-a^2/4t}$	$e^{-a\sqrt{s}}$	(32)
e^{at}	$\frac{1}{s - a}$	(15)	$\operatorname{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}$	(33)
$\sinh kt$	$\frac{k}{s^2 - k^2}$	(16)			
$\cosh kt$	$\frac{s}{s^2 - k^2}$	(17)			
$\frac{e^{at} - e^{bt}}{a - b}$	$\frac{1}{(s - a)(s - b)}$	(18)			



SF1683 Differentialekvationer och transformmetoder, del 2
Tentamen
Tisdag den 2 april 2024

Skrivtid: 08:00-12:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: Mattias Dahl

Tentamen består av sex uppgifter uppdelade i två delar. Del I utgörs av de tre första uppgifterna som testar förmågan att lösa grundläggande problem. Del II utgörs av de tre sista uppgifterna och testar förmågan att lösa mer avancerade problem som även kan vara av teoretisk karaktär och är avsedda främst för högre betyg. Varje uppgift ger maximalt fyra poäng. Bonuspoäng från lappskrivningarna adderas till erhållna poäng på del I upp till maximalt 12 poäng.

Betygsgränserna vid tentamen ges av följande tabell.

Fx	E	D	C	B	A
11	12	14	16	19	21

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Funktionen f har period 2π och ges på intervallet $-\pi < x \leq \pi$ av

$$f(x) = x + \cos(3x) + \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 3, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}.$$

Beräkna dess Fourierserie. Förklara vad serien konvergerar mot. (4 p)

2. Använd Laplacetransformen för att lösa initialvärdesproblemet

$$y''(t) = \int_0^t (t-u)y(u) du, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 4,$$

för $y(t)$, $t \geq 0$. *Ledning:* $s^4 - 1 = (s^2 + 1)(s + 1)(s - 1)$ (4 p)

3. Bestäm Fouriertransformen av följande funktioner

$$g(x) = \begin{cases} x^2, & -2 < x < 2 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}, \quad h(x) = \frac{\sin(2x)}{x}.$$

Beräkna även integralen $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(2x)}{x^2} dx$. *Ledning:* Beräkna först Fouriertransformen av

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -2 < x < 2 \\ 0, & \text{annars} \end{cases} \quad (4 \text{ p})$$

DEL II – AVANCERADE PROBLEM

4. (a) Bevisa formeln för Laplacetransformen $\mathcal{L}[f''](s)$ av andraderivatan av en funktion $f(t), t \geq 0$. Ange förutsättningar för att formeln ska gälla.
 (b) Ange en kontinuerlig funktion $f(t), t \geq 0$, som inte har en Laplacetransform. Motivera noga varför dess Laplacetransform inte existerar.

(4 p)

5. Använd Fouriertransformen för att lösa värmeledningsproblemet

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

för $u = u(x, t)$, $-\infty < x < \infty$, $t \geq 0$, med initialvillkor $u(x, 0) = f(x)$ där $f(x)$, $-\infty < x < \infty$, är en funktion av som är styckvis kontinuerlig och absolutintegrerbar. Svaret ska ges som en integral på formen $u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) p(x - y, t) dy$. Följande formler kan vara användbara:

- (i) $\mathcal{F}[f * g](\omega) = 2\pi \mathcal{F}[f](\omega) \cdot \mathcal{F}[g](\omega)$ där $*$ betecknar faltning (convolution)
- (ii) $\mathcal{F}[f(ax + b)](\omega) = \frac{1}{|a|} e^{\frac{i\omega b}{a}} \mathcal{F}[f](\frac{\omega}{a})$
- (iii) $\mathcal{F}[e^{-x^2}](\omega) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}}$

(4 p)

6. Låt E vara vektorrummet av kontinuerliga komplexvärda funktioner på intervallet $[-\pi, \pi]$. Låt den inre produkten på E ges av

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

med motsvarande norm $\|f\| = \langle f, f \rangle^{1/2}$.

- (a) Visa att funktionerna e^{inx} , $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, utgör ett ortonormalt system i E . Ange formeln för Fourierkoefficienterna c_n för en funktion $f \in E$ med avseende på detta ortonormala system.

Om $f \in E$ har Fourierkoefficienter c_n så ges dess delsumma av ordning m av

$$S_m(x) = \sum_{n=-m}^m c_n e^{inx}.$$

- (b) Visa att $\|f\|^2 = \|f - S_m\|^2 + \|S_m\|^2$.
- (c) Visa Bessels olikhet: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \leq \|f\|^2$.
- (d) Visa Riemann-Lebesgues lemma: $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow -\infty} c_n = 0$.

(4 p)

Table of Integrals*

Basic Forms

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \quad (1)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| \quad (2)$$

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (3)$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b| \quad (4)$$

Integrals of Rational Functions

$$\int \frac{1}{(x+a)^2} dx = -\frac{1}{x+a} \quad (5)$$

$$\int (x+a)^n dx = \frac{(x+a)^{n+1}}{n+1}, n \neq -1 \quad (6)$$

$$\int x(x+a)^n dx = \frac{(x+a)^{n+1}((n+1)x-a)}{(n+1)(n+2)} \quad (7)$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x \quad (8)$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} \quad (9)$$

$$\int \frac{x}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln |a^2+x^2| \quad (10)$$

$$\int \frac{x^2}{a^2+x^2} dx = x - a \tan^{-1} \frac{x}{a} \quad (11)$$

$$\int \frac{x^3}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}a^2 \ln |a^2+x^2| \quad (12)$$

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \tan^{-1} \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} \quad (13)$$

$$\int \frac{1}{(x+a)(x+b)} dx = \frac{1}{b-a} \ln \frac{a+x}{b+x}, a \neq b \quad (14)$$

$$\int \frac{x}{(x+a)^2} dx = \frac{a}{a+x} + \ln |a+x| \quad (15)$$

$$\int \frac{x}{ax^2+bx+c} dx = \frac{1}{2a} \ln |ax^2+bx+c| - \frac{b}{a\sqrt{4ac-b^2}} \tan^{-1} \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} \quad (16)$$

Integrals with Roots

$$\int \sqrt{x-a} dx = \frac{2}{3} (x-a)^{3/2} \quad (17)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x \pm a}} dx = 2\sqrt{x \pm a} \quad (18)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x}} dx = -2\sqrt{a-x} \quad (19)$$

$$\int x\sqrt{x-a} dx = \frac{2}{3}a(x-a)^{3/2} + \frac{2}{5}(x-a)^{5/2} \quad (20)$$

$$\int \sqrt{ax+b} dx = \left(\frac{2b}{3a} + \frac{2x}{3} \right) \sqrt{ax+b} \quad (21)$$

$$\int (ax+b)^{3/2} dx = \frac{2}{5a} (ax+b)^{5/2} \quad (22)$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x \pm a}} dx = \frac{2}{3} (x \mp 2a) \sqrt{x \pm a} \quad (23)$$

$$\int \sqrt{\frac{x}{a-x}} dx = -\sqrt{x(a-x)} - a \tan^{-1} \frac{\sqrt{x(a-x)}}{x-a} \quad (24)$$

$$\int \sqrt{\frac{x}{a+x}} dx = \sqrt{x(a+x)} - a \ln [\sqrt{x} + \sqrt{x+a}] \quad (25)$$

$$\int x\sqrt{ax+b} dx = \frac{2}{15a^2} (-2b^2 + abx + 3a^2x^2) \sqrt{ax+b} \quad (26)$$

$$\int \sqrt{x(ax+b)} dx = \frac{1}{4a^{3/2}} \left[(2ax+b) \sqrt{ax(ax+b)} - b^2 \ln |a\sqrt{x} + \sqrt{a(ax+b)}| \right] \quad (27)$$

$$\int \sqrt{x^3(ax+b)} dx = \left[\frac{b}{12a} - \frac{b^2}{8a^2x} + \frac{x}{3} \right] \sqrt{x^3(ax+b)} + \frac{b^3}{8a^{5/2}} \ln |a\sqrt{x} + \sqrt{a(ax+b)}| \quad (28)$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{1}{2}a^2 \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| \quad (29)$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2}a^2 \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (30)$$

$$\int x\sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{3} (x^2 \pm a^2)^{3/2} \quad (31)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| \quad (32)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \sin^{-1} \frac{x}{a} \quad (33)$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \sqrt{x^2 \pm a^2} \quad (34)$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = -\sqrt{a^2 - x^2} \quad (35)$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 \pm a^2} \mp \frac{1}{2}a^2 \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| \quad (36)$$

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c} dx = \frac{b+2ax}{4a} \sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{4ac-b^2}{8a^{3/2}} \ln |2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}| \quad (37)$$

$$\int x\sqrt{ax^2+bx+c} dx = \frac{1}{48a^{5/2}} \left(2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c} \times (-3b^2+2abx+8a(c+ax^2)) + 3(b^3-4abc) \ln |b+2ax+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}| \right) \quad (38)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln |2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}| \quad (39)$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = \frac{1}{a} \sqrt{ax^2+bx+c} - \frac{b}{2a^{3/2}} \ln |2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}| \quad (40)$$

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}} \quad (41)$$

Integrals with Logarithms

$$\int \ln ax dx = x \ln ax - x \quad (42)$$

$$\int \frac{\ln ax}{x} dx = \frac{1}{2} (\ln ax)^2 \quad (43)$$

$$\int \ln(ax+b) dx = \left(x + \frac{b}{a} \right) \ln(ax+b) - x, a \neq 0 \quad (44)$$

$$\int \ln(x^2+a^2) dx = x \ln(x^2+a^2) + 2a \tan^{-1} \frac{x}{a} - 2x \quad (45)$$

$$\int \ln(x^2-a^2) dx = x \ln(x^2-a^2) + a \ln \frac{x+a}{x-a} - 2x \quad (46)$$

$$\int \ln(ax^2+bx+c) dx = \frac{1}{a} \sqrt{4ac-b^2} \tan^{-1} \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} - 2x + \left(\frac{b}{2a} + x \right) \ln(ax^2+bx+c) \quad (47)$$

$$\int x \ln(ax+b) dx = \frac{bx}{2a} - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{b^2}{a^2} \right) \ln(ax+b) \quad (48)$$

$$\int x \ln(a^2-b^2x^2) dx = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{a^2}{b^2} \right) \ln(a^2-b^2x^2) \quad (49)$$

Integrals with Exponentials

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} \quad (50)$$

$$\int \sqrt{x} e^{ax} dx = \frac{1}{a} \sqrt{x} e^{ax} + \frac{i\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}} \operatorname{erf}(i\sqrt{ax}), \text{ where } \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (51)$$

$$\int x e^x dx = (x-1)e^x \quad (52)$$

$$\int x e^{ax} dx = \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \right) e^{ax} \quad (53)$$

$$\int x^2 e^x dx = (x^2 - 2x + 2) e^x \quad (54)$$

$$\int x^2 e^{ax} dx = \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right) e^{ax} \quad (55)$$

$$\int x^3 e^x dx = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) e^x \quad (56)$$

$$\int x^n e^{ax} dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx \quad (57)$$

$$\int x^n e^{ax} dx = \frac{(-1)^n}{a^{n+1}} \Gamma[1+n, -ax], \text{ where } \Gamma(a, x) = \int_x^\infty t^{a-1} e^{-t} dt \quad (58)$$

$$\int e^{ax^2} dx = -\frac{i\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \operatorname{erf}(i\sqrt{a}x) \quad (59)$$

$$\int e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \operatorname{erf}(x\sqrt{a}) \quad (60)$$

$$\int x e^{-ax^2} dx = -\frac{1}{2a} e^{-ax^2} \quad (61)$$

$$\int x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{a^3}} \operatorname{erf}(x\sqrt{a}) - \frac{x}{2a} e^{-ax^2} \quad (62)$$

Integrals with Trigonometric Functions

$$\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax \quad (63)$$

$$\int \sin^2 ax dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a} \quad (64)$$

$$\int \sin^n ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax {}_2F_1 \left[\frac{1}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{3}{2}, \cos^2 ax \right] \quad (65)$$

$$\int \sin^3 ax dx = -\frac{3 \cos ax}{4a} + \frac{\cos 3ax}{12a} \quad (66)$$

$$\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax \quad (67)$$

$$\int \cos^2 ax dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a} \quad (68)$$

$$\int \cos^p ax dx = -\frac{1}{a(1+p)} \cos^{1+p} ax \times {}_2F_1 \left[\frac{1+p}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3+p}{2}, \cos^2 ax \right] \quad (69)$$

$$\int \cos^3 ax dx = \frac{3 \sin ax}{4a} + \frac{\sin 3ax}{12a} \quad (70)$$

$$\int \cos ax \sin bxdx = \frac{\cos[(a-b)x]}{2(a-b)} - \frac{\cos[(a+b)x]}{2(a+b)}, a \neq b \quad (71)$$

$$\int \sin^2 ax \cos bxdx = -\frac{\sin[(2a-b)x]}{4(2a-b)} + \frac{\sin bx}{2b} - \frac{\sin[(2a+b)x]}{4(2a+b)} \quad (72)$$

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \frac{1}{3} \sin^3 x \quad (73)$$

$$\int \cos^2 ax \sin bxdx = \frac{\cos[(2a-b)x]}{4(2a-b)} - \frac{\cos bx}{2b} - \frac{\cos[(2a+b)x]}{4(2a+b)} \quad (74)$$

$$\int \cos^2 ax \sin ax dx = -\frac{1}{3a} \cos^3 ax \quad (75)$$

$$\int \sin^2 ax \cos^2 bxdx = \frac{x}{4} - \frac{\sin 2ax}{8a} - \frac{\sin[2(a-b)x]}{16(a-b)} + \frac{\sin 2bx}{8b} - \frac{\sin[2(a+b)x]}{16(a+b)} \quad (76)$$

$$\int \sin^2 ax \cos^2 ax dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4ax}{32a} \quad (77)$$

$$\int \tan ax dx = -\frac{1}{a} \ln \cos ax \quad (78)$$

$$\int \tan^2 ax dx = -x + \frac{1}{a} \tan ax \quad (79)$$

$$\int \tan^n ax dx = \frac{\tan^{n+1} ax}{a(1+n)} \times {}_2F_1 \left(\frac{n+1}{2}, 1, \frac{n+3}{2}, -\tan^2 ax \right) \quad (80)$$

$$\int \tan^3 ax dx = \frac{1}{a} \ln \cos ax + \frac{1}{2a} \sec^2 ax \quad (81)$$

$$\int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| = 2 \tanh^{-1} \left(\tan \frac{x}{2} \right) \quad (82)$$

$$\int \sec^2 ax dx = \frac{1}{a} \tan ax \quad (83)$$

$$\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \tan x| \quad (84)$$

$$\int \sec x \tan x dx = \sec x \quad (85)$$

$$\int \sec^2 x \tan x dx = \frac{1}{2} \sec^2 x \quad (86)$$

$$\int \sec^n x \tan x dx = \frac{1}{n} \sec^n x, n \neq 0 \quad (87)$$

$$\int \csc x dx = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| = \ln |\csc x - \cot x| + C \quad (88)$$

$$\int \csc^2 ax dx = -\frac{1}{a} \cot ax \quad (89)$$

$$\int \csc^3 x dx = -\frac{1}{2} \cot x \csc x + \frac{1}{2} \ln |\csc x - \cot x| \quad (90)$$

$$\int \csc^n x \cot x dx = -\frac{1}{n} \csc^n x, n \neq 0 \quad (91)$$

$$\int \sec x \csc x dx = \ln |\tan x| \quad (92)$$

Products of Trigonometric Functions and Monomials

$$\int x \cos x dx = \cos x + x \sin x \quad (93)$$

$$\int x \cos ax dx = \frac{1}{a^2} \cos ax + \frac{x}{a} \sin ax \quad (94)$$

$$\int x^2 \cos x dx = 2x \cos x + (x^2 - 2) \sin x \quad (95)$$

$$\int x^2 \cos ax dx = \frac{2x \cos ax}{a^2} + \frac{a^2 x^2 - 2}{a^3} \sin ax \quad (96)$$

$$\int x^n \cos x dx = -\frac{1}{2} (i)^{n+1} [\Gamma(n+1, -ix) + (-1)^n \Gamma(n+1, ix)] \quad (97)$$

$$\int x^n \cos ax dx = \frac{1}{2} (ia)^{1-n} [(-1)^n \Gamma(n+1, -iax) - \Gamma(n+1, iax)] \quad (98)$$

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \sin x \quad (99)$$

$$\int x \sin ax dx = -\frac{x \cos ax}{a} + \frac{\sin ax}{a^2} \quad (100)$$

$$\int x^2 \sin x dx = (2 - x^2) \cos x + 2x \sin x \quad (101)$$

$$\int x^2 \sin ax dx = \frac{2 - a^2 x^2}{a^3} \cos ax + \frac{2x \sin ax}{a^2} \quad (102)$$

$$\int x^n \sin x dx = -\frac{1}{2} (i)^n [\Gamma(n+1, -ix) - (-1)^n \Gamma(n+1, -ix)] \quad (103)$$

Products of Trigonometric Functions and Exponentials

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) \quad (104)$$

$$\int e^{bx} \sin ax dx = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{bx} (b \sin ax - a \cos ax) \quad (105)$$

$$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) \quad (106)$$

$$\int e^{bx} \cos ax dx = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{bx} (a \sin ax + b \cos ax) \quad (107)$$

$$\int x e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\cos x - x \cos x + x \sin x) \quad (108)$$

$$\int x e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (x \cos x - \sin x + x \sin x) \quad (109)$$

Integrals of Hyperbolic Functions

$$\int \cosh ax dx = \frac{1}{a} \sinh ax \quad (110)$$

$$\int e^{ax} \cosh bxdx = \begin{cases} \frac{e^{ax}}{a^2 - b^2} [a \cosh bx - b \sinh bx] & a \neq b \\ \frac{e^{2ax}}{4a} + \frac{x}{2} & a = b \end{cases} \quad (111)$$

$$\int \sinh ax dx = \frac{1}{a} \cosh ax \quad (112)$$

$$\int e^{ax} \sinh bxdx = \begin{cases} \frac{e^{ax}}{a^2 - b^2} [-b \cosh bx + a \sinh bx] & a \neq b \\ \frac{e^{2ax}}{4a} - \frac{x}{2} & a = b \end{cases} \quad (113)$$

$$\int e^{ax} \tanh bxdx = \begin{cases} \frac{e^{(a+2b)x}}{(a+2b)} {}_2F_1 \left[1 + \frac{a}{2b}, 1, 2 + \frac{a}{2b}, -e^{2bx} \right] - \frac{1}{a} e^{ax} {}_2F_1 \left[\frac{a}{2b}, 1, 1E, -e^{2bx} \right] & a \neq b \\ \frac{e^{ax} - 2 \tanh^{-1}[e^{ax}]}{a} & a = b \end{cases} \quad (114)$$

$$\int \tanh ax dx = \frac{1}{a} \ln \cosh ax \quad (115)$$

$$\int \cos ax \cosh bxdx = \frac{1}{a^2 + b^2} [a \sin ax \cosh bx + b \cos ax \sinh bx] \quad (116)$$

$$\int \cos ax \sinh bxdx = \frac{1}{a^2 + b^2} [b \cos ax \cosh bx + a \sin ax \sinh bx] \quad (117)$$

$$\int \sin ax \cosh bxdx = \frac{1}{a^2 + b^2} [-a \cos ax \cosh bx + b \sin ax \sinh bx] \quad (118)$$

$$\int \sin ax \sinh bxdx = \frac{1}{a^2 + b^2} [b \cosh bx \sin ax - a \cos ax \sinh bx] \quad (119)$$

$$\int \sinh ax \cosh bxdx = \frac{1}{4a} [-2ax + \sinh 2ax] \quad (120)$$

$$\int \sinh ax \cosh bxdx = \frac{1}{b^2 - a^2} [b \cosh bx \sinh ax - a \cosh ax \sinh bx] \quad (121)$$

Table of Laplace Transforms

$f(t)$	$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$		$f(t)$	$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$	
1	$\frac{1}{s}$	(1)	$\frac{ae^{at} - be^{bt}}{a - b}$	$\frac{s}{(s - a)(s - b)}$	(19)
$e^{at}f(t)$	$F(s - a)$	(2)	te^{at}	$\frac{1}{(s - a)^2}$	(20)
$\mathcal{U}(t - a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$	(3)	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s - a)^{n+1}}$	(21)
$f(t - a)\mathcal{U}(t - a)$	$e^{-as}F(s)$	(4)	$e^{at} \sin kt$	$\frac{k}{(s - a)^2 + k^2}$	(22)
$\delta(t)$	1	(5)	$e^{at} \cos kt$	$\frac{s - a}{(s - a)^2 + k^2}$	(23)
$\delta(t - t_0)$	e^{-st_0}	(6)	$e^{at} \sinh kt$	$\frac{k}{(s - a)^2 - k^2}$	(24)
$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$	(7)	$e^{at} \cosh kt$	$\frac{s - a}{(s - a)^2 - k^2}$	(25)
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$	(8)	$t \sin kt$	$\frac{2ks}{(s^2 + k^2)^2}$	(26)
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$	(9)	$t \cos kt$	$\frac{s^2 - k^2}{(s^2 + k^2)^2}$	(27)
$\int_0^t f(x)g(t - x)dx$	$F(s)G(s)$	(10)	$t \sinh kt$	$\frac{2ks}{(s^2 - k^2)^2}$	(28)
$t^n \ (n = 0, 1, 2, \dots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	(11)	$t \cosh kt$	$\frac{s^2 + k^2}{(s^2 - k^2)^2}$	(29)
$t^x \ (x \geq -1 \in \mathbb{R})$	$\frac{\Gamma(x + 1)}{s^{x+1}}$	(12)	$\frac{\sin at}{t}$	$\arctan \frac{a}{s}$	(30)
$\sin kt$	$\frac{k}{s^2 + k^2}$	(13)	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-a^2/4t}$	$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$	(31)
$\cos kt$	$\frac{s}{s^2 + k^2}$	(14)	$\frac{a}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-a^2/4t}$	$e^{-a\sqrt{s}}$	(32)
e^{at}	$\frac{1}{s - a}$	(15)	$\operatorname{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}$	(33)
$\sinh kt$	$\frac{k}{s^2 - k^2}$	(16)			
$\cosh kt$	$\frac{s}{s^2 - k^2}$	(17)			
$\frac{e^{at} - e^{bt}}{a - b}$	$\frac{1}{(s - a)(s - b)}$	(18)			



SF1683 Differentialekvationer och transformmetoder, del 2
Tentamen
Fredag den 10 januari 2025

Skrivtid: 08:00-12:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: Mattias Dahl

Tentamen består av sex uppgifter uppdelade i två delar. Del I utgörs av de tre första uppgifterna som testar förmågan att lösa grundläggande problem. Del II utgörs av de tre sista uppgifterna och testar förmågan att lösa mer avancerade problem som även kan vara av teoretisk karaktär och är avsedda främst för högre betyg. Varje uppgift ger maximalt fyra poäng. Bonuspoäng från lappskrivningarna adderas till erhållna poäng på del I upp till maximalt 12 poäng.

Betygsgränserna vid tentamen ges av följande tabell.

Fx	E	D	C	B	A
11	12	14	16	19	21

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Låt funktionen $f(x)$ vara definierad som $f(x) = 2 + \cos(2x)$ för $0 < x < \pi$. Utvidga $f(x)$ till en funktion på intervallet $-\pi < x < \pi$ på tre olika sätt:

- (a) $f_a(x)$ som är en jämn funktion,
- (b) $f_b(x)$ som är en udda funktion,
- (c) $f_c(x)$ som har $f_c(x) = 0$ för $-\pi < x < 0$.

Beräkna Fourierserierna för $f_a(x)$, $f_b(x)$, $f_c(x)$. Förklara vad serierna konvergerar mot i de tre olika fallen.

(4 p)

2. Använd Laplacetransformen för att lösa initialvärdesproblemet

$$y''(t) + y(t) = \delta(t - 2\pi) + \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \pi \\ \cos(t), & \pi \leq t \end{cases}, \quad y(0) = 0, y'(0) = 2,$$

för $y(t)$, $t \geq 0$.

(4 p)

3. Laplace ekvation $\Delta u = 0$ ges i polära koordinater $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, av

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0. \quad (1)$$

- (a) Bestäm alla lösningar $u = u(r, \theta)$ till (1) som går att hitta med separation av variabler då $u = u(r, \theta)$ är 2π -periodisk i θ . Förklara vilka av dessa som svarar mot kontinuerliga lösningar till Laplace ekvation på cirkelskivan $D = \{r = \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\}$.
- (b) Bestäm den lösning till Laplace ekvation på cirkelskivan D som uppfyller $u = 1$ då $x, y \geq 0$, och $u = 0$ annars på randen $\partial D = \{r = \sqrt{x^2 + y^2} = 1\}$ till cirkelskivan.

(4 p)

DEL II – AVANCERADE PROBLEM

4. (a) Bestäm Fouriertransformen $F(\omega) = \mathcal{F}[f(x)](\omega)$ då

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & -\pi < x < \pi \\ 0, & \text{annars} \end{cases}.$$

Vilket värde har $F(\omega)$ då $\omega = \pm 1$? Är $F(\omega)$ kontinuerlig?

- (b) Bestäm en funktion vars Fouriertransform är lika med $f(\omega)$.

(4 p)

5. För en lösning $u = u(x, t)$, $-\infty < x < \infty$, $t \geq 0$, till värmeledningsekvationen $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ definierar vi energin $E(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x, t)|^2 dx$.

- (a) Använd Plancherels formel för att skriva $E(t)$ som en integral med $\hat{u}(\omega, t) = \mathcal{F}[u(x, t)](\omega)$ och visa att $E'(t) \leq 0$. (Från detta följer att värmeledningsekvationen med ett givet initialvillkor $u(x, 0) = f(x)$ har högst en lösning, men det behöver du inte visa.)
- (b) När man löser den Fouriertransformerade värmeledningsekvationen hittar man lösningen $\hat{u}(\omega, t) = \hat{f}(\omega) \cdot e^{-\omega^2 t}$ där $\hat{f}(\omega)$ är Fouriertransformen av initialvillkoret $u(x, 0) = f(x)$. Lösningen $u(x, t)$ kan alltså skrivas som en faltning mellan $f(x)$ och en funktion $p(x, t)$. Bestäm $p(x, t)$.

Följande formler kan vara användbara:

- (i) $\mathcal{F}[f * g](\omega) = 2\pi \mathcal{F}[f](\omega) \cdot \mathcal{F}[g](\omega)$ där $*$ betecknar faltning (convolution)
- (ii) $\mathcal{F}[f(ax + b)](\omega) = \frac{1}{|a|} e^{\frac{i\omega b}{a}} \mathcal{F}[f(x)](\frac{\omega}{a})$
- (iii) $\mathcal{F}[e^{-x^2}](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}}$
- (iv) $\mathcal{F}[f'(x)](\omega) = i\omega \mathcal{F}[f(x)](\omega)$

(4 p)

6. (a) I beviset av Dirichlets sats om punktvis konvergens av Fourierserier används att delsumman $S_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^m [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$ av Fourierserien till funktionen $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ kan skrivas som en integral som innehåller funktionen f samt Dirichletkärnan $D_m(t) = \frac{\sin(m+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}$. Bevisa detta.
- (b) Skissera beviset av Dirichlets sats. Ange förutsättningar och slutsatser. (Ledning: Använd Riemann-Lebesgues lemma på hjälpfunktionen $g(t) = \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2\sin\frac{1}{2}t}$.)

(4 p)

FORMELBLAD

Trigonometriska formler

- (1) $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$
- (2) $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$
- (3) $\sin n\pi = 0, \quad n \in \mathbb{Z}$
- (4) $\cos n\pi = (-1)^n, \quad n \in \mathbb{Z}$
- (5) $\sin \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$
- (6) $\tan \alpha = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$
- (7) $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$
- (8) $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$
- (9) $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$
- (10) $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$
- (11) $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$
- (12) $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
- (13) $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$
- (14) $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$
- (15) $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$
- (16) $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$
- (17) $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\alpha$
- (18) $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\alpha$
- (19) $\sin^3 \alpha = \frac{1}{4}(3 \sin \alpha - \sin 3\alpha)$
- (20) $\cos^3 \alpha = \frac{1}{4}(3 \cos \alpha + \cos 3\alpha)$
- (21) $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$
- (22) $\cos \alpha = \frac{1}{2}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})$
- (23) $\sin \alpha = \frac{1}{2i}(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})$
- (24) $\cosh \alpha = \frac{1}{2}(e^\alpha + e^{-\alpha})$
- (25) $\sinh \alpha = \frac{1}{2}(e^\alpha - e^{-\alpha})$
- (26) $\cosh^2 \alpha - \sinh^2 \alpha = 1$

Integraler

- (27) $\int x^p dx = \frac{1}{p+1} x^{p+1}, \quad p \neq -1$
- (28) $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b|$

- (29) $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}$
- (30) $\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \tan^{-1} \frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}}$
- (31) $\int \frac{1}{(x+a)(x+b)} dx = \frac{1}{b-a} \ln \frac{a+x}{b+x}, \quad a \neq b$
- (32) $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{1}{2} a^2 \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|$
- (33) $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2} a^2 \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$
- (34) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|$
- (35) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \sin^{-1} \frac{x}{a}$
- (36) $\int x^p \ln ax dx = x^{p+1} \left(\frac{\ln ax}{p+1} - \frac{1}{(p+1)^2} \right), \quad p \neq -1$
- (37) $\int \frac{\ln ax}{x} dx = \frac{1}{2} (\ln ax)^2$
- (38) $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$
- (39) $\int x e^{ax} dx = \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \right) e^{ax}$
- (40) $\int x^2 e^{ax} dx = \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right) e^{ax}$
- (41) $\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax$
- (42) $\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax$
- (43) $\int \tan ax dx = -\frac{1}{a} \ln |\cos ax|$
- (44) $\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \tan x \right| = 2 \tanh^{-1} \left(\tan \frac{x}{2} \right)$
- (45) $\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right|$
- (46) $\int x \cos ax dx = \frac{1}{a^2} \cos ax + \frac{x}{a} \sin ax$
- (47) $\int x^2 \cos ax dx = \frac{2x \cos ax}{a^2} + \frac{a^2 x^2 - 2}{a^3} \sin ax$
- (48) $\int x \sin ax dx = -\frac{x \cos ax}{a} + \frac{\sin ax}{a^2}$
- (49) $\int x^2 \sin ax dx = \frac{2 - a^2 x^2}{a^3} \cos ax + \frac{2x \sin ax}{a^2}$
- (50) $\int e^{bx} \cos ax dx = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{bx} (a \sin ax + b \cos ax)$
- (51) $\int e^{bx} \sin ax dx = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{bx} (b \sin ax - a \cos ax)$

Table of Laplace Transforms

$f(t)$	$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$		$f(t)$	$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$	
1	$\frac{1}{s}$	(1)	$\frac{ae^{at} - be^{bt}}{a - b}$	$\frac{s}{(s - a)(s - b)}$	(19)
$e^{at}f(t)$	$F(s - a)$	(2)	te^{at}	$\frac{1}{(s - a)^2}$	(20)
$\mathcal{U}(t - a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$	(3)	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s - a)^{n+1}}$	(21)
$f(t - a)\mathcal{U}(t - a)$	$e^{-as}F(s)$	(4)	$e^{at} \sin kt$	$\frac{k}{(s - a)^2 + k^2}$	(22)
$\delta(t)$	1	(5)	$e^{at} \cos kt$	$\frac{s - a}{(s - a)^2 + k^2}$	(23)
$\delta(t - t_0)$	e^{-st_0}	(6)	$e^{at} \sinh kt$	$\frac{k}{(s - a)^2 - k^2}$	(24)
$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$	(7)	$e^{at} \cosh kt$	$\frac{s - a}{(s - a)^2 - k^2}$	(25)
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$	(8)	$t \sin kt$	$\frac{2ks}{(s^2 + k^2)^2}$	(26)
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$	(9)	$t \cos kt$	$\frac{s^2 - k^2}{(s^2 + k^2)^2}$	(27)
$\int_0^t f(x)g(t - x)dx$	$F(s)G(s)$	(10)	$t \sinh kt$	$\frac{2ks}{(s^2 - k^2)^2}$	(28)
$t^n \ (n = 0, 1, 2, \dots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	(11)	$t \cosh kt$	$\frac{s^2 + k^2}{(s^2 - k^2)^2}$	(29)
$t^x \ (x \geq -1 \in \mathbb{R})$	$\frac{\Gamma(x + 1)}{s^{x+1}}$	(12)	$\frac{\sin at}{t}$	$\arctan \frac{a}{s}$	(30)
$\sin kt$	$\frac{k}{s^2 + k^2}$	(13)	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-a^2/4t}$	$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$	(31)
$\cos kt$	$\frac{s}{s^2 + k^2}$	(14)	$\frac{a}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-a^2/4t}$	$e^{-a\sqrt{s}}$	(32)
e^{at}	$\frac{1}{s - a}$	(15)	$\operatorname{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}$	(33)
$\sinh kt$	$\frac{k}{s^2 - k^2}$	(16)			
$\cosh kt$	$\frac{s}{s^2 - k^2}$	(17)			
$\frac{e^{at} - e^{bt}}{a - b}$	$\frac{1}{(s - a)(s - b)}$	(18)			



SF1683 Differentialekvationer och transformmetoder, del 2
Tentamen
Fredag den 25 april 2025

Skrivtid: 08:00-12:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: Mattias Dahl

Tentamen består av sex uppgifter uppdelade i två delar. Del I utgörs av de tre första uppgifterna som testar förmågan att lösa grundläggande problem. Del II utgörs av de tre sista uppgifterna och testar förmågan att lösa mer avancerade problem som även kan vara av teoretisk karaktär och är avsedda främst för högre betyg. Varje uppgift ger maximalt fyra poäng. Bonuspoäng från lappskrivningarna adderas till erhållna poäng på del I upp till maximalt 12 poäng.

Betygsgränserna vid tentamen ges av följande tabell.

Fx	E	D	C	B	A
11	12	14	16	19	21

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Funktionen f har period 2π och ges på intervallet $-\pi < x \leq \pi$ av

$$f(x) = \sin(5|x|) + \begin{cases} 1, & -\pi < x < 0 \\ 3, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}.$$

Beräkna dess Fourierserie. Förklara vad serien konvergerar mot. (4 p)

2. Bestäm en lösning $u = u(x, y)$, $0 \leq x, y \leq \pi$, till Laplace ekvation $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ som uppfyller randvillkoren

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, y) = 0, \quad 0 < y < \pi,$$

samt

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, \pi) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^4} \cos nx, \quad 0 < x < \pi.$$

(4 p)

3. Använd Laplacetransformen för att bestämma en lösning $u(x, t)$ till den partiella differentialekvationen

$$\frac{\partial u}{\partial x} + 2x \frac{\partial u}{\partial t} = 2xt, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < t < \infty,$$

som uppfyller randvillkoren $u(x, 0) = 1, 0 < x < \infty$, och $u(0, t) = 1, 0 < t < \infty$. **(4 p)**

DEL II – AVANCERADE PROBLEM

4. (a) Beräkna $\mathcal{F}[e^{icx}f(x)](\omega)$ uttryckt i $F(\omega) = \mathcal{F}[f(x)](\omega)$.
 (b) Beräkna Fouriertransformen av $f(x) = e^{i2x}e^{-x^2}$, $g(x) = e^{-i2x}e^{-x^2}$, samt av faltningen $f * g(x)$.
 (c) Använd detta för att beräkna faltningen $f * g(x)$.

Du får använda följande formler utan att härleda dem:

- (i) $\mathcal{F}[f * g](\omega) = 2\pi \mathcal{F}[f](\omega) \cdot \mathcal{F}[g](\omega)$
 (ii) $\mathcal{F}[f(ax + b)](\omega) = \frac{1}{|a|} e^{\frac{i\omega b}{a}} \mathcal{F}[f]\left(\frac{\omega}{a}\right)$
 (iii) $\mathcal{F}[f'](\omega) = i\omega \mathcal{F}[f](\omega)$
 (iv) $\mathcal{F}[xf(x)](\omega) = i \frac{d}{d\omega} \mathcal{F}[f](\omega)$
 (v) $\mathcal{F}[e^{-x^2}](\omega) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}}$

(4 p)

5. (a) Formulera satsen om invers Fouriertransform.
 (b) Beräkna Fouriertransformen av funktionen $f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{för } |x| \leq 1 \\ 0, & \text{för } |x| > 1 \end{cases}$.
 (c) Använd (a) och (b) för att beräkna Fouriertransformen av $g(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}, x \neq 0$. **(4 p)**

6. Låt a_n, b_n vara Fourierkoefficienterna för funktionen $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$. Bessels olikhet säger att

$$\frac{1}{2}|a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx.$$

Bevisa detta. Från Bessels olikhet följer Riemann-Lebesgues lemma. Bevisa även detta.

(4 p)

FORMELBLAD

Trigonometriska formler

- (1) $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$
- (2) $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$
- (3) $\sin n\pi = 0, \quad n \in \mathbb{Z}$
- (4) $\cos n\pi = (-1)^n, \quad n \in \mathbb{Z}$
- (5) $\sin \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$
- (6) $\tan \alpha = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$
- (7) $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$
- (8) $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$
- (9) $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$
- (10) $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$
- (11) $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$
- (12) $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
- (13) $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$
- (14) $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$
- (15) $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$
- (16) $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$
- (17) $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\alpha$
- (18) $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\alpha$
- (19) $\sin^3 \alpha = \frac{1}{4}(3 \sin \alpha - \sin 3\alpha)$
- (20) $\cos^3 \alpha = \frac{1}{4}(3 \cos \alpha + \cos 3\alpha)$
- (21) $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$
- (22) $\cos \alpha = \frac{1}{2}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})$
- (23) $\sin \alpha = \frac{1}{2i}(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})$
- (24) $\cosh \alpha = \frac{1}{2}(e^\alpha + e^{-\alpha})$
- (25) $\sinh \alpha = \frac{1}{2}(e^\alpha - e^{-\alpha})$
- (26) $\cosh^2 \alpha - \sinh^2 \alpha = 1$

Integraler

- (27) $\int x^p dx = \frac{1}{p+1} x^{p+1}, \quad p \neq -1$
- (28) $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b|$

- (29) $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}$
- (30) $\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \tan^{-1} \frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}}$
- (31) $\int \frac{1}{(x+a)(x+b)} dx = \frac{1}{b-a} \ln \frac{a+x}{b+x}, \quad a \neq b$
- (32) $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{1}{2} a^2 \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|$
- (33) $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2} a^2 \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$
- (34) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|$
- (35) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \sin^{-1} \frac{x}{a}$
- (36) $\int x^p \ln ax dx = x^{p+1} \left(\frac{\ln ax}{p+1} - \frac{1}{(p+1)^2} \right), \quad p \neq -1$
- (37) $\int \frac{\ln ax}{x} dx = \frac{1}{2} (\ln ax)^2$
- (38) $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$
- (39) $\int x e^{ax} dx = \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \right) e^{ax}$
- (40) $\int x^2 e^{ax} dx = \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right) e^{ax}$
- (41) $\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax$
- (42) $\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax$
- (43) $\int \tan ax dx = -\frac{1}{a} \ln |\cos ax|$
- (44) $\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \tan x \right| = 2 \tanh^{-1} \left(\tan \frac{x}{2} \right)$
- (45) $\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right|$
- (46) $\int x \cos ax dx = \frac{1}{a^2} \cos ax + \frac{x}{a} \sin ax$
- (47) $\int x^2 \cos ax dx = \frac{2x \cos ax}{a^2} + \frac{a^2 x^2 - 2}{a^3} \sin ax$
- (48) $\int x \sin ax dx = -\frac{x \cos ax}{a} + \frac{\sin ax}{a^2}$
- (49) $\int x^2 \sin ax dx = \frac{2 - a^2 x^2}{a^3} \cos ax + \frac{2x \sin ax}{a^2}$
- (50) $\int e^{bx} \cos ax dx = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{bx} (a \sin ax + b \cos ax)$
- (51) $\int e^{bx} \sin ax dx = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{bx} (b \sin ax - a \cos ax)$

Table of Laplace Transforms

$f(t)$	$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$		$f(t)$	$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$	
1	$\frac{1}{s}$	(1)	$\frac{ae^{at} - be^{bt}}{a - b}$	$\frac{s}{(s - a)(s - b)}$	(19)
$e^{at}f(t)$	$F(s - a)$	(2)	te^{at}	$\frac{1}{(s - a)^2}$	(20)
$\mathcal{U}(t - a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$	(3)	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s - a)^{n+1}}$	(21)
$f(t - a)\mathcal{U}(t - a)$	$e^{-as}F(s)$	(4)	$e^{at} \sin kt$	$\frac{k}{(s - a)^2 + k^2}$	(22)
$\delta(t)$	1	(5)	$e^{at} \cos kt$	$\frac{s - a}{(s - a)^2 + k^2}$	(23)
$\delta(t - t_0)$	e^{-st_0}	(6)	$e^{at} \sinh kt$	$\frac{k}{(s - a)^2 - k^2}$	(24)
$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$	(7)	$e^{at} \cosh kt$	$\frac{s - a}{(s - a)^2 - k^2}$	(25)
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$	(8)	$t \sin kt$	$\frac{2ks}{(s^2 + k^2)^2}$	(26)
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$	(9)	$t \cos kt$	$\frac{s^2 - k^2}{(s^2 + k^2)^2}$	(27)
$\int_0^t f(x)g(t - x)dx$	$F(s)G(s)$	(10)	$t \sinh kt$	$\frac{2ks}{(s^2 - k^2)^2}$	(28)
$t^n \ (n = 0, 1, 2, \dots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	(11)	$t \cosh kt$	$\frac{s^2 + k^2}{(s^2 - k^2)^2}$	(29)
$t^x \ (x \geq -1 \in \mathbb{R})$	$\frac{\Gamma(x + 1)}{s^{x+1}}$	(12)	$\frac{\sin at}{t}$	$\arctan \frac{a}{s}$	(30)
$\sin kt$	$\frac{k}{s^2 + k^2}$	(13)	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-a^2/4t}$	$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$	(31)
$\cos kt$	$\frac{s}{s^2 + k^2}$	(14)	$\frac{a}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-a^2/4t}$	$e^{-a\sqrt{s}}$	(32)
e^{at}	$\frac{1}{s - a}$	(15)	$\operatorname{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}$	(33)
$\sinh kt$	$\frac{k}{s^2 - k^2}$	(16)			
$\cosh kt$	$\frac{s}{s^2 - k^2}$	(17)			
$\frac{e^{at} - e^{bt}}{a - b}$	$\frac{1}{(s - a)(s - b)}$	(18)			