Riemanngeometri
En egen väg till Gauss–Bonnet

Gustav Nilsson

Arbetsversion, 26 september 2026

Innehåll

1 Bakgrund från flervariabelanalys 3

2 Mångfalder 4

3 Riemannmetriker och förbindelser 5

4 Holonomi och krökning 9

5 Morseteori 14

6 Avstånd och geodeter 16

7 Gauss–Bonnets sats 17

Kapitel 1

Bakgrund från flervariabelanalys

En funktion $F : U \to \mathbb{R}^n$ definierad på en öppen mängd $U \subseteq \mathbb{R}^m$ sägs vara *glatt* om alla dess partiella derivator (av alla ordningar) existerar och är kontinuerliga överallt på U. Om $A \subseteq \mathbb{R}^m$ är en godtycklig (inte nödvändigtvis öppen) mängd sägs en funktion $F : A \to \mathbb{R}^n$ vara glatt om den kan utökas till en glatt funktion på en öppen omgivning U av A. Om $A \subseteq \mathbb{R}^m$ och $B \subseteq \mathbb{R}^n$, sägs $F : A \to B$ vara en *diffeomorfi* om F är bijektiv och både F och $F^{-1} : B \to A$ är glatta,[1] och A och B sägs då vara *diffeomorfa*.

För en glatt funktion $F : U \to \mathbb{R}^n$ definierad på en öppen mängd $U \subseteq \mathbb{R}^m$ existerar det för varje $p \in U$ en unik linjär avbildning $F'(p) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, *(totala) derivatan av F i p*, som uppfyller

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(p+h) - F(p) - F'(p)(h)}{\|h\|} = 0.$$

Med avseende på standardbaserna representeras $F'(p)$ av Jacobimatrisen

$$\begin{pmatrix} \partial_1 F_1(p) & \cdots & \partial_m F_1(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 F_n(p) & \cdots & \partial_m F_n(p) \end{pmatrix}.$$

Sats 1 (Inversa funktionssatsen)**.** *Antag att $F : U \to \mathbb{R}^n$ är en glatt funktion definierad på en öppen delmängd $U \subseteq \mathbb{R}^n$, och antag att $F'(p)$ är inverterbar för någon punkt $p \in U$. Då har p en öppen omgivning $V \subseteq U$ som av F avbildas diffeomorft på en öppen omgivning $F(V) \subseteq \mathbb{R}^n$ av $F(p)$.*

[1] Notera att det senare kravet inte följer automatiskt.

Kapitel 2

Mångfalder

En *n-mångfald* är en delmängd $M \subseteq \mathbb{R}^k$ för något k, sådan att varje punkt $p \in M$ har en öppen[1] omgivning $U \subseteq M$ som är diffeomorf med $\mathbb{R}^n$. En sådan diffeomorfi $x : U \to \mathbb{R}^n$ kallas för ett *(lokalt) koordinatsystem*, och sägs vara *centrerat i* p om $x(p) = 0$.

Proposition 1. *En funktion $F : M \to N$ mellan mångfalder är glatt om och endast om det för varje $p \in M$ existerar ett koordinatsystem x kring p och y kring $F(p)$, sådana att $y \circ F \circ x^{-1}$ är glatt.*

För varje punkt $p \in M$ definierar vi *tangentrummet* T_pM enligt

$$T_pM = \{\gamma'(0) \mid \gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M \text{ är en glatt kurva som uppfyller } \gamma(0) = p\}$$

Om γ är en sådan kurva och $F : M \to N$ är glatt, är $F \circ \gamma$ en glatt kurva som uppfyller $(F \circ \gamma)(0) = F(p)$, vilket betyder att $(F \circ \gamma)'(0) \in T_{F(p)}N$. För en fixerad funktion F går det att visa att $(F \circ \gamma)'(0)$ enbart beror på derivatan $\gamma'(0)$, och att detta beroende är linjärt, vilket ger en väldefinierad linjär avbildning $F'(p) : T_pM \to T_{F(p)}N$, kallad *derivatan av F i p*, enligt $F'(p)(\gamma'(0)) := (F \circ \gamma)'(0)$.

Sats 2 (Inversa funktionssatsen på mångfalder)**.** *Antag att $F : M \to N$ är glatt och att $F'(p) : T_pM \to T_{F(p)}N$ är inverterbar, för någon punkt $p \in M$. Då finns en öppen omgivning $U \subseteq M$ av p som av F avbildas diffeomorft på en öppen omgivning $F(U) \subseteq N$ av $F(p)$.*

Ett *vektorfält* på M är en glatt funktion $X : M \to \mathbb{R}^k$ som uppfyller att $X(p) \in T_pM$ för alla $p \in M$. Ett *kovariant tensorfält av rang r* är en funktion A som till varje punkt $p \in M$ associerar en multilinjär avbildning $A(p) : (T_pM)^r \to \mathbb{R}$, och som uppfyller glatthetsegenskapen att om $X_1, \ldots, X_r$ är (glatta) vektorfält, så är funktionen $M \to \mathbb{R}$, $p \mapsto A(p)(X_1(p), \ldots, X_r(p))$ glatt.

En *sluten* mångfald är kompakt[2] mängd $M \subseteq \mathbb{R}^k$ som också är en mångfald. Ett exempel på en sådan är enhetssfären $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.

[1] Här menas att U är öppen relativt M, att U är snittet av M och en öppen delmängd av $\mathbb{R}^k$.

[2] Anledning till att det kallas för *sluten* snarare än *kompakt* är att det också går att definiera begreppet *mångfald med rand*, som är ett bredare begrepp. En sluten mångfald refererar alltid till en mångfald *utan* rand.

Kapitel 3

Riemannmetriker och förbindelser

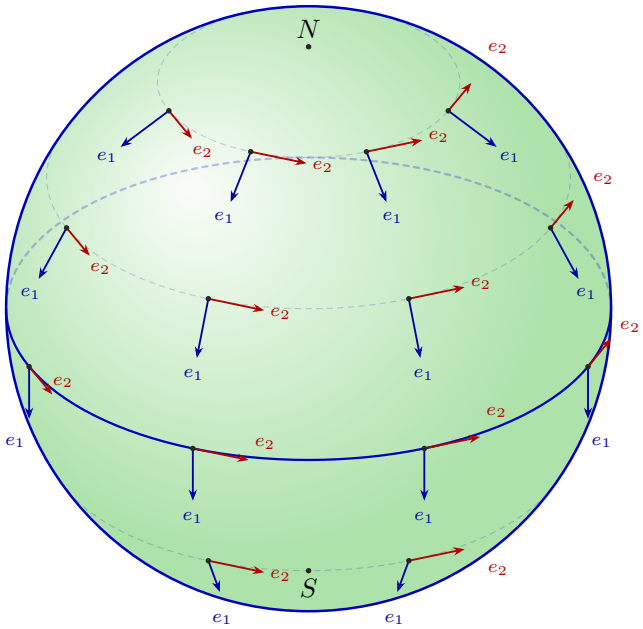
Låt M vara en mångfald. En *Riemannmetrik* på M är ett kovariant tensorfält av rang 2, sådant att det för varje $p \in M$ gäller att den bilinjära formen $g(p) : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ är en inre produkt på T_pM. Med andra ord är kravet att $g(p)$ ska vara symmetrisk och positivt definit, för varje p. En mångfald med Riemannmetrik, (M, g), kallas för en *Riemannmångfald*. Om (M, g_M) och (N, g_N) är Riemannmångfalder av samma dimension och $F : M \to N$ är en glatt avbildning, säger vi att F är en *lokal isometri* om det för alla $p \in M$ och $v, w \in T_pM$ gäller att $g_M(p)(v, w) = g_N(F(p))(F'(p)(v), F'(p)(w))$. I detta fall är derivatan av F automatiskt[1] inverterbar i varje punkt. Om F dessutom är bijektiv säger vi att F är en *isometri*, och att (M, g_M) och (N, g_N) är *isometriska*, och det följer av inversa funktionssatsen att F är en diffeomorfi. Det finns alltid en Riemannmetrik på en mångfald; till exempel kan man betrakta den så kallade *inducerade metriken*, vilket är den Riemannmetrik som kommer från inbäddningen av M i $\mathbb{R}^k$, definierad enligt $g(p)(v, w) = \langle v, w\rangle$ där högerledet är skalärprodukten i $\mathbb{R}^k$. Den slutna mångfalden $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ tillsammans med sin inducerade metrik kallas för *den runda enhetssfären av dimension* n, och den inducerade metriken g_{rund} kallas för *den runda metriken*. I figur 3.1 visas den runda enhetssfären S^2 tillsammans med några ON-baser för olika tangentplan. Ett exempel på en Riemannmångfald som inte har den inducerade metriken ges av det *hyperboliska* n*-rummet* (H^n, g_{hyp}), där $H^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$ och $g_{\text{hyp}}(p)(v, w) = \frac{4}{(1-\|p\|^2)^2}\langle v, w\rangle$. I figur 3.2 visas det hyperboliska planet (hyperboliska 2-rummet) tillsammans med några ON-baser.

En intressant fråga är huruvida en godtycklig Riemannmångfald (M, g) kan bäddas in isometriskt i något euklidiskt rum, det vill säga huruvida det finns något $\mathbb{R}^k$ (inte nödvändigtvis samma euklidiska rum som M redan ligger i) och någon mångfald $N \subseteq \mathbb{R}^k$ sådan att (M, g) är isometrisk med (N, g_{ind}), där g_{ind} är den inducerade metriken på N. Svaret visar sig vara **ja**, enligt *Nashs inbäddningssats*, men i allmänhet kan k behöva göras relativt stort.

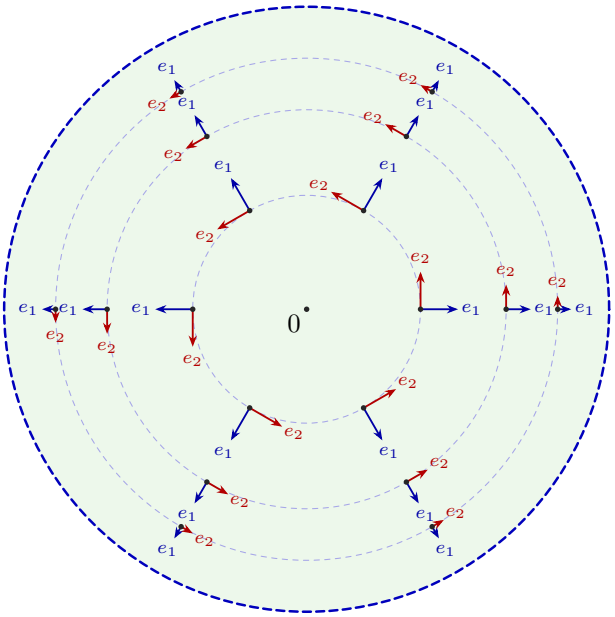
Givet en tangentvektor $v \in T_pM$ vid en punkt $p \in M$ i en mångfald, och givet en glatt funktion $f : M \to \mathbb{R}$, går det att definiera derivatan av f i riktningen v genom att ta en kurva $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ som uppfyller $\gamma(0) = p$ och $\gamma'(0) = v$, och definiera $\partial_v f := (f \circ \gamma)'(0)$. Alternativt kan man utvidga f till en glatt funktion på en öppen omgivning $U \subseteq \mathbb{R}^k$ av M och ta riktningsderivatan av f i klassisk mening.[2] Denna definition kräver inte någon Riemannmetrik, enbart en mångfald M, en funktion f, och en tangentvektor v. Den är dessutom *naturlig*: om M och N är mångfalder, $f : N \to \mathbb{R}$ och $F : M \to N$ glatta funktioner, och $v \in T_pM$ en

[1] Detta kommer från att den är bevarar inre produkter och därmed är injektiv, tillsammans med att dimensionerna är lika.

[2] Notera att detta är väldefinierat och bara beror på värdena hos f på M. Ett sätt att inse detta är via ekvivalensen med den första definitionen.



Figur 3.1: Ortonormala baser vid några punkter på den runda enhetssfären (S^2, g_{rund}): e_1 (blå) pekar söderut längs meridianerna och e_2 (röd) österut längs latitudcirklarna. Båda basvektorerna har norm ett och ritas med samma nedskalning. Projektionen förvränger deras skenbara längder och vinklar. Vid polerna N och S visas inga baser.



Figur 3.2: Ortonormala baser vid några punkter i Poincarés diskmodell av (H^2, g_{hyp}). e_1 visas i blått och e_2 i rött. Alla vektorer har norm ett, men deras ritade längd minskar mot diskens rand. Den streckade randcirkeln tillhör inte H^2.

tangentvektor vid någon punkt $p \in M$, så gäller

$$\partial_v(f \circ F) = \partial_{F'(p)(v)} f.$$

Detta kan förstås också göras för glatta funktioner f med målmängd $\mathbb{R}^m$.

Det går dock inte att definiera en naturlig riktningsderivata $\partial_v X$ av ett vektorfält X, åtminstone inte på ett diffeomorfiinvariant sätt. Eftersom ett vektorfält är en avbildning $X : M \to \mathbb{R}^k$, går det förvisso att derivera denna avbildning och få ett element $\partial_v X \in \mathbb{R}^k$, men problemet är att detta inte nödvändigtvis måste ligga i $T_pM \subseteq \mathbb{R}^k$. Dessutom är inte själva inbäddningen av M i $\mathbb{R}^k$ särskilt viktig ur filosofisk synpunkt, och är mest en teknisk lösning för att kunna definiera släthet hos avbildningar mellan mångfalder.[3] Det som ligger till grund för problemet med att derivera vektorfält är att värdena hos ett vektorfält ligger i olika rum: $X(p)$ ligger i T_pM, medan $X(q)$ ligger i T_qM, och det finns inget kanoniskt sätt att identifiera de två rummen.

För att kunna identifiera tangentrum inför vi begreppet förbindelse,[4] en struktur som låter oss göra precis detta. I $\mathbb{R}^k$ är det klart vad som menas med att ett vektorfält är konstant, och det spelar ingen roll i vilken riktning eller längs vilken väg man mäter detta. På allmänna Riemannmångfalder visar det sig att det inte finns något lika enkelt begrepp; huruvida ett vektorfält är "konstant" (i Riemanngeometri kallas detta *parallellt*) eller inte beror i allmänhet på vägen det mäts längs. Därför behöver vi först införa några begrepp relaterade till kurvor. Om två kontinuerliga kurvor $\gamma_1 : [a, b] \to M$ och $\gamma_2 : [b, c] \to M$ uppfyller $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, säger vi att de är *konkatenerbara*, och deras *konkatenering* är kurvan $(\gamma_1 \cdot \gamma_2) : [a, c] \to M$ som ges av

$$(\gamma_1 \cdot \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & a \leq t \leq b, \\ \gamma_2(t), & b \leq t \leq c. \end{cases}$$

En *styckvis glatt* kurva är en kurva som kan uttryckas som en konkatenering av ändligt många glatta kurvor.

Låt nu (M, g) vara en Riemannmångfald. Då är en *Levi-Civitaförbindelse* en regel som till varje styckvis glatt kurva $\gamma : [a, b] \to M$ associerar en linjär avbildning $P_\gamma : T_{\gamma(a)}M \to T_{\gamma(b)}M$ (kallad *parallelltransporten längs* γ), och som uppfyller:

- P_γ är en isometri[5] mellan de två inreproduktrummen $(T_{\gamma(a)}M, g(\gamma(a)))$ och $(T_{\gamma(b)}M, g(\gamma(b)))$, för varje $\gamma : [a, b] \to M$.
- $P_{\gamma_1 \cdot \gamma_2} = P_{\gamma_2} \circ P_{\gamma_1}$, för alla konkatenerbara par av styckvis glatta kurvor $\gamma_1 : [a, b] \to M$ och $\gamma_2 : [b, c] \to M$.
- För en glatt kurva $\gamma : [a, b] \to M$ och en fixerad vektor $v \in T_{\gamma(a)}M$, är kurvan av vektorer $[a, b] \to \mathbb{R}^k$, $t \mapsto P_{\gamma|_{[a,t]}}(v)$ glatt, och derivatan $\frac{d}{dt}|_{t=a} P_{\gamma|_{[a,t]}}(v) \in \mathbb{R}^k$ beror bara på $\gamma'(a)$.
- Om $\gamma_1 : [a, b] \to M$ och $\gamma_2 : [c, d] \to M$ är glatta kurvor med $\gamma_1(a) = \gamma_2(c)$, så gäller[6]

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=a} P_{\gamma_1|_{[a,t]}}(\gamma_2'(c)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=c} P_{\gamma_2|_{[c,t]}}(\gamma_1'(a)).$$

[3] Det går att definiera mångfalder mer abstrakt, utan att prata om någon inbäddning i $\mathbb{R}^k$, men detta kommer inte att diskuteras här.

[4] För enkelhetens skull kommer vi bara att betrakta så kallade *Levi-Civitaförbindelser* på Riemannmångfalder, men det finns flera bredare förbindelsebegrepp.

[5] Minns att *isometri* mellan inreproduktrum är en avbildning som bevarar den inre produkten. För mer allmänna förbindelser släpps detta krav till att avbildningarna P_γ enbart behöver vara linjära. Kravet att de dessutom ska vara isometrier kallas för *metricitet*.

[6] Ekvationen säger att den hastighet med vilken $\gamma_2'(c)$ börjar röra sig när den transporteras längs γ_1 är densamma som den hastighet med vilken $\gamma_1'(a)$ börjar röra sig när den transporteras längs γ_2. Denna egenskap kallas för *torsionsfrihet*.

Tack vare följande sats kan vi prata om *Levi-Civitaförbindelsen* på (M, g), vilken vi framöver kommer att beteckna med (P_γ).

Sats 3 (Riemanngeometrins huvudsats)**.** *Varje Riemannmångfald har en unik Levi-Civitaförbindelse.*

Vi kan nu slutligen definiera derivatan, betecknad $\nabla_v X$, av ett vektorfält X på[7] (M, g) i en riktning $v \in T_pM$ vid en punkt $p \in M$. Låt nämligen $\gamma : [a, b] \to M$ vara en glatt kurva med $\gamma(a) = p$ och $\gamma'(a) = v$, och definiera

$$\nabla_v X := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=a} (P_{\gamma|_{[a,t]}})^{-1}(X(\gamma(t))) = \lim_{h \searrow 0} \frac{(P_{\gamma|_{[a,a+h]}})^{-1}(X(\gamma(a+h))) - X(p)}{h}.$$

Denna derivataoperation är förvisso inte naturlig med avseende på godtyckliga glatta avbildningar,[8] men den är naturlig med avseende på lokala isometrier: om X är ett vektorfält på (N, g_N), $v \in T_pM$ en vektor vid en punkt $p \in M$, och om $F : M \to N$ är en lokal isometri från (M, g_M) till (N, g_N), så är

$$\nabla_v (X \circ F) = \nabla_{F'(p)(v)} X.$$

[7] Notera att vi skriver (M, g) snarare än M, eftersom definitionen beror på valet av metrik.
[8] Detta är väntat, då den beror på valet av metrik, något som inte bevaras av godtyckliga sådana.

Kapitel 4

Holonomi och krökning

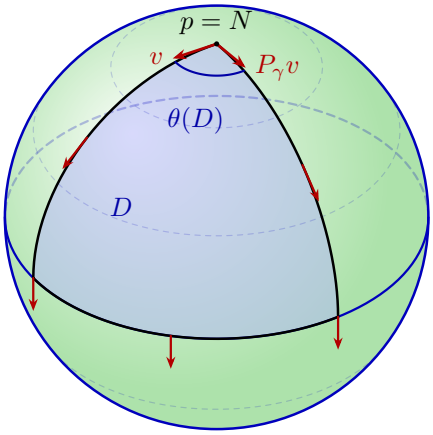
Antag att (M, g) är en Riemannmångfald och att $\gamma : [0, 1] \to M$ är en styckvis glatt sluten kurva med baspunkt $p := \gamma(0)$. Från Levi-Civitaförbindelsen får vi en isometri $P_\gamma : T_pM \to T_pM$, och denna isometri kallas *holonomiverkan* runt γ. I $\mathbb{R}^n$ med sin plana metrik är holonomiverkan runt loopar alltid trivial, det vill säga P_γ är identiteten, och *holonomi* refererar till fenomenet att detta inte alltid är fallet i Riemannmångfalder. Holonomi mäter i viss mening hur mycket en Riemannmångfald avviker från att vara plan. En annan sak som gör detta är begreppet *krökning*, som visar sig vara "nästan ekvivalent" med holonomi. Vi kommer att införa krökningsbegreppet i termer av holonomi; i andra behandlingar av Riemanngeometri brukar krökning definieras på ett annat sätt och införas tidigare än holonomi.

Vi börjar med att betrakta fallet där M är en sluten 2-mångfald. Antag att $\gamma : [0, 1] \to M$ är en styckvis glatt enkel sluten kurva[1] med baspunkt $p \in M$, så att P_γ är en isometri på det tvådimensionella inreproduktrummet $(T_pM, g(p))$, och därmed är $\det(P_\gamma) = \pm 1$. Om vi antar att $\det(P_\gamma) = 1$, följer det att P_γ är en rotation, och om en orientering på T_pM väljs kan denna rotation beskrivas med en vinkel $\theta \in (-\pi, \pi]$. Låt oss nu också anta att γ är *reguljär*, med vilket vi menar att vänster- och högerderivatorna för γ är nollskilda överallt. Om γ är glatt i en inre punkt $t_0 \in (0, 1)$, och om $v \in T_{\gamma(t_0)}M$ är en vektor som inte är parallell med $\dot\gamma(t_0)$ (en sådan vektor kallas en *transversell vektor*), kan en orientering på $T_{\gamma(t_0)}M$ väljas genom att postulera att $(v, \dot\gamma(t_0))$ är en positivt orienterad bas. Genom parallelltransport av denna bas fås också orienteringar på alla tangentrummen längs kurvan.[2] Det går också att visa att en reguljär omparametrisering av γ, som i allmänhet kan byta baspunkt, ger samma rotationsvinkel så länge inte genomlöpningsriktningen ändras. En ändring av den senare byter rotationens riktning, men eftersom detta också byter den orientering som beskrevs tidigare, blir den resulterande rotationsvinkeln samma. Vi kan alltså betrakta rotationsvinkeln som en egenskap som beror bara på bilden $\gamma([0, 1]) \subseteq M$ och valet av en transversell vektor. Om bilden $\gamma([0, 1])$ råkar vara randen till en sluten mängd $D \subseteq M$ ger mängden D ett kanoniskt val av riktning att mäta rotationen i, genom att som transversell vektor välja en utåtpekande sådan. För en sådan rand följer antagandet $\det(P_\gamma) = 1$ automatiskt: D bestämmer vilken sida av randen som är insidan, och därmed en sammanhängande orientering av tangentplanen längs hela randen. Parallelltransporten kan då inte vända orienteringen efter ett varv. Slutsatsen är alltså att varje mängd $D \subseteq M$ som uppfyller $D = \overline{\operatorname{int} D}$, vars rand $\partial D \subseteq M$ kan parametriseras med en styckvis glatt, reguljär, enkel sluten kurva, ger en väldefinierad vinkel $\theta(D) \in (-\pi, \pi]$. En sådan mängd D kallas för ett *enkelt reguljärt område*.

[1] Att γ är en *enkel sluten kurva* betyder att γ är injektiv på intervallet $[0, 1)$ och uppfyller $\gamma(0) = \gamma(1)$.

[2] Från antagandet att $\det(P_\gamma) = 1$ följer det att orienteringen på T_pM blir väldefinierad, oberoende av huruvida parallelltransporten sker framlänges på intervallet $[t_0, 1]$ eller baklänges på intervallet $[0, t_0]$.

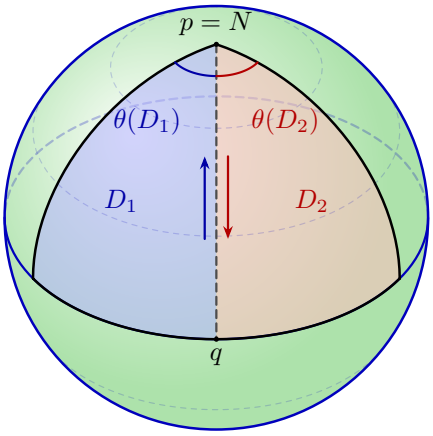
På den runda enhetssfären kan vi se vinkeln direkt för en tårtbit D som avgränsas av två meridianer och ekvatorn. Låt γ börja vid nordpolen och gå nedför den vänstra meridianen, och välj $v = \gamma'(0)$. Om spetsvinkeln vid nordpolen är $\alpha \in (0, \pi)$, visar parallelltransport längs randen att $\theta(D) = \alpha$; se figur 4.1.



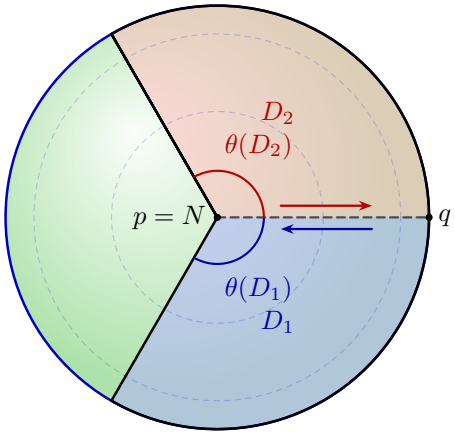
Figur 4.1: Parallelltransport av starthastigheten $v = \gamma'(0)$ längs randen till en tårtbit på S^2: De röda pilarna visar samma parallelltransporterade vektor vid olika tidpunkter. Vid återkomsten till nordpolen har den vridits med tårtbitens spetsvinkel α, så $\theta(D) = \alpha$.

Vinkeln är additiv modulo 2π vid en delning av följande slag. Antag att en styckvis glatt, reguljär båge med ändpunkter på ∂D delar ett enkelt reguljärt område D i två enkla reguljära områden D_1 och D_2. Välj en av bågens ändpunkter som gemensam baspunkt för de tre randkurvorna och genomlöpningsriktningar som stämmer överens längs de yttre randbågarna. Då passeras delningsbågen åt motsatta håll på ∂D_1 och ∂D_2. De utåtriktade transversella vektorerna gör då att alla tre rotationsvinklar mäts med samma orientering vid baspunkten: på den gemensamma bågen byter både den transversella vektorn och framåtriktningen håll. Transporterna längs bågen tar ut varandra, och därför är holonomiverkan längs ∂D lika med sammansättningen av holonomiverkan längs vardera av ∂D_1 och ∂D_2. Figur 4.2 visar denna delning på S^2.

Alltså är en rotation med vinkeln $\theta(D_1) + \theta(D_2)$ samma som en rotation med vinkeln $\theta(D)$; notera att vinklarna inte behöver vara lika, men att det åtminstone måste gälla att $\theta(D_1) + \theta(D_2) \equiv \theta(D) \pmod{2\pi}$. Figur 4.3 ger ett exempel där summan av de valda vinklarna skiljer sig från $\theta(D)$ med 2π.



Figur 4.2: Ett enkelt reguljärt område $D = D_1 \cup D_2$ på den runda enhetssfären, delat av en meridianbåge från nordpolen p till en punkt q på ekvatorn. Pilarna visar att den gemensamma bågen genomlöps åt motsatta håll på de två ränderna.



Figur 4.3: Ett annat område på den runda enhetssfären, sett från nordpolen p. Här upptar D_1 och D_2 vardera 120° longitud av norra halvklotet, och $\theta(D_1) + \theta(D_2) = 4\pi/3 = \theta(D) + 2\pi$.

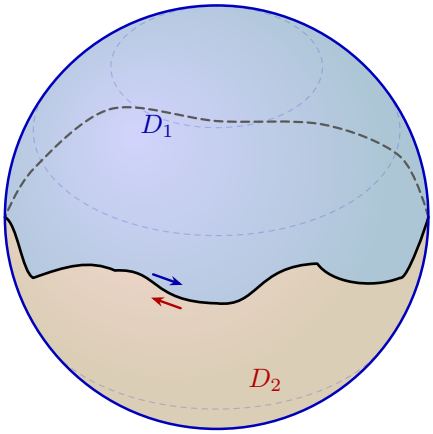
En mängd $D \subseteq M$ kallas hädanefter ett *reguljärt område* om $D = \overline{\operatorname{int} D}$ och ∂D täcks av bilderna av ändligt många styckvis glatta, reguljära, slutna kurvor. Dessa kurvor behöver inte vara enkla eller disjunkta. Låt $\mathcal{R}$ beteckna klassen av reguljära områden. Den innehåller $\varnothing$ och M och är sluten under ändliga unioner samt under operationen $D \mapsto \overline{M \setminus D}$. Formuleringen att kurvorna täcker randen tillåter att randbågar försvinner vid en union.

Den valda vinkeln $\theta(D) \in (-\pi, \pi]$ kan inte vara additiv som ett reellt tal, vilket figur 4.3 visar. Vi använder därför följande förfining av den.

Proposition 2. *Det finns en funktion $\kappa : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ med $\kappa(\varnothing) = 0$ och följande egenskaper:*

1. *För varje enkelt reguljärt område D gäller $\kappa(D) \equiv \theta(D) \pmod{2\pi}$.*
2. *Om $D_1, D_2 \in \mathcal{R}$ och $\operatorname{int} D_1 \cap \operatorname{int} D_2 = \varnothing$, så gäller $\kappa(D_1 \cup D_2) = \kappa(D_1) + \kappa(D_2)$.*

Beviset återstår att fylla i.



Figur 4.4: Den runda enhetssfären delad i två enkla reguljära områden med gemensam rand. Pilarna visar motsatta genomlöpningsriktningar.

I figur 4.4 är $S^2 = D_1 \cup D_2$ och $D_2 = \overline{S^2 \setminus D_1}$. De båda områdenas inre är disjunkta och $\partial D_1 = \partial D_2$. Om randkurvan genomlöps åt motsatta håll för de två områdena, är holonomiverkan för det ena inversen till holonomiverkan för det andra. Samtidigt byter de utåtriktade transversella vektorerna håll, så rotationsvinklarna mäts med samma orientering av tangentplanet. Därför gäller $\theta(D_1) + \theta(D_2) \equiv 0 \pmod{2\pi}$, och propositionens egenskaper ger

$$\kappa(S^2) = \kappa(D_1) + \kappa(D_2) \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

I allmänhet gäller på slutna 2-dimensionella Riemannmångfalder att $\kappa(M) \in 2\pi\mathbb{Z}$.[3] Givet två olika Riemannmetriker g_0 och g_1 på samma mångfald M, kan man interpolera mellan dessa genom att låta $g_t = (1-t)g_0 + tg_1$, som blir en Riemannmetrik för varje $t \in [0,1]$. Om D är en fixerad reguljär delmängd av M, beror storheten $\kappa(D)$ i allmänhet på valet av Riemannmetrik, och vi benämner därför denna $\kappa_t(D)$, för att framhäva att $\kappa_t(D)$ ska beräknas med hjälp av holonomin som kommer från metriken g_t. Det går att visa att $\kappa_t(D)$ är en kontinuerlig funktion av t.[4] I specialfallet när $D = M$ gäller det dessutom att $\kappa_t(M)$ ligger i den diskreta mängden $2\pi\mathbb{Z}$,

[3] *Det återstår att bevisa detta.*

[4] Man kan till exempel utrusta rummet av kovarianta tensorfält av rang 2 med Sobolev-$W^{2,2}$-normen, och bevisa att storheten $\kappa(M)$, sedd som avbildning från mängden av Riemannmetriker (som är en delmängd av det tidigare nämnda rummet) till $\mathbb{R}$, är kontinuerlig med avseende på denna norm.

och eftersom den är kontinuerlig kan den inte göra något hopp, och är därför konstant. Från detta följer det att $\kappa_0(M) = \kappa_1(M)$, och eftersom detta kan göras med godtyckliga Riemannmetriker g_0 och g_1 visar detta att $\kappa(M)$ är oberoende av valet av Riemannmetrik.[5] Eftersom $\kappa(M)$ är oberoende av valet av Riemannmetrik är en intressant fråga huruvida det går att beskriva detta tal utan att hänvisa till någon metrik alls. I ett senare avsnitt kommer vi att titta närmare på detta.

Som vi har definierat den är krökningen en funktion $\kappa : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$, och har egenskaper som påminner om ett areamått. För den som kan måtteori ska det nämnas att κ kan utökas till ett mått med tecken som är definierat på alla Borelmängder i M.[6] Det går också att definiera ett annat, *ickenegativt* Borelmått μ på M, det så kallade *areamåttet*, och det visar sig att κ är absolut kontinuerligt med avseende på μ. Från detta följer det att κ har en Radon-Nikodymderivata med avseende på μ, det vill säga en reellvärd funktion K, definierad μ-nästan överallt på M, som uppfyller $\kappa(A) = \int_A K \, d\mu$ för alla Borelmängder $A \subseteq M$. Det visar sig också att det finns en glatt representant, alltså att det finns en glatt funktion $K : M \to \mathbb{R}$ som uppfyller ovanstående. Denna funktion svarar precis mot funktionen som i de flesta andra framställningar kallas för ”krökningen” eller ”Gausskrökningen”.

[5] Notera att detta emellertid inte gäller för någon annan reguljär icketom mängd: givet ett godtyckligt tal $k \in \mathbb{R}$ och en godtycklig reguljär mängd D med $\emptyset \subsetneq D \subsetneq M$, så finns det en Riemannmetrik på M för vilken $\kappa(D) = k$

[6] På engelska kallas detta *signed Borel measure*.

Kapitel 5

Morseteori

I hela detta kapitel kommer (M, g) att vara en sluten Riemannmångfald av dimension 2. Givet ett vektorfält X på M, går det att visa att det finns en unik glatt avbildning $\Phi_X : M \times \mathbb{R} \to M$ som uppfyller $\frac{d}{dt}\Phi_X(p,t) = X(\Phi_X(p,t))$ och $\Phi_X(p,0) = p$, för alla $(p,t) \in M \times \mathbb{R}$. Denna kallas för *flödet hos* X, och uppfyller dessutom $\Phi_X(\Phi_X(p,t_1),t_2) = \Phi_X(p,t_1+t_2)$, och som en konsekvens är för varje $t \in \mathbb{R}$ avbildningen $p \mapsto \Phi_X(p,t)$ en diffeomorfi $M \to M$ med invers $p \mapsto \Phi_X(p,-t)$.

Antag nu att $f : M \to \mathbb{R}$ är en glatt funktion på M. Då finns ett vektorfält $\operatorname{grad} f$ på M, *gradienten till* f, som definieras av att $\partial_v f = g(p)(v, (\operatorname{grad} f)(p))$ för varje punkt $p \in M$ och tangentvektor $v \in T_pM$. En punkt $p \in M$ kallas en *kritisk punkt* till f om $(\operatorname{grad} f)(p) = 0$, vilket är ekvivalent med att $\partial_v f = 0$ för alla $v \in T_pM$. En kritisk punkt p kallas *icke-degenererad* om den linjära avbildningen $T_pM \to T_pM$ som ges av $v \mapsto \nabla_v(\operatorname{grad} f)$ är inverterbar. Funktionen f kallas en *Morsefunktion* om alla dess kritiska punkter är icke-degenererade, och om $f(p) \neq f(q)$ för alla kritiska punkter $p \neq q$.

I resten av detta kapitel kommer vi anta att f är en Morsefunktion. Då har f bara ändligt många kritiska punkter, $p_1, \ldots, p_N \in M$;[1] vi antar att punkterna är ordnade så att $f(p_1) < \cdots < f(p_N)$. Vi definierar $M_a = f^{-1}((-\infty, a])$ för alla $a \in \mathbb{R}$. Antag nu att $a < b$ och att M_a och M_b innehåller lika många kritiska punkter, det vill säga att $f(p_i) < a < b < f(p_{i+1})$ för något i. Om $\rho : \mathbb{R} \to [0,1]$ är en glatt funktion som är lika med 1 på $[a,b]$ och 0 på $(-\infty, (a+f(p_i))/2] \cup [(b+f(p_{i+1}))/2, \infty)$, så kan vektorfältet X på $M \setminus \{p_1, \ldots, p_N\}$ som ges av

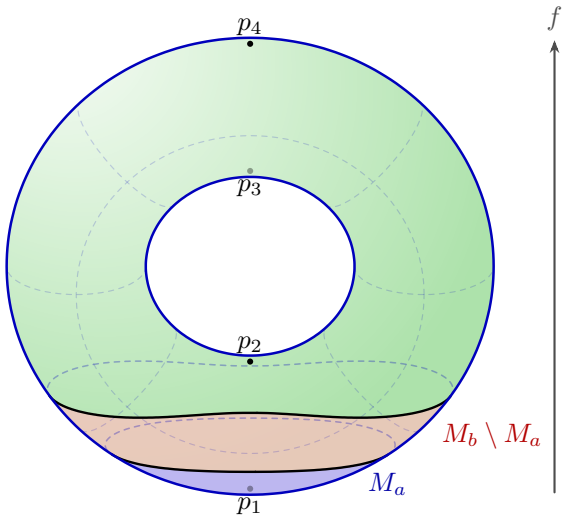
$$X(p) = \rho(f(p)) \frac{(\operatorname{grad} f)(p)}{g(p)((\operatorname{grad} f)(p), (\operatorname{grad} f)(p))}$$

utökas till ett vektorfält på hela M, och har därför ett flöde Φ_X. För varje fixt $p \in M$ är $t \mapsto \Phi_X(p,t)$ en kurva med derivata $X(\Phi_X(p,t))$, och därför är

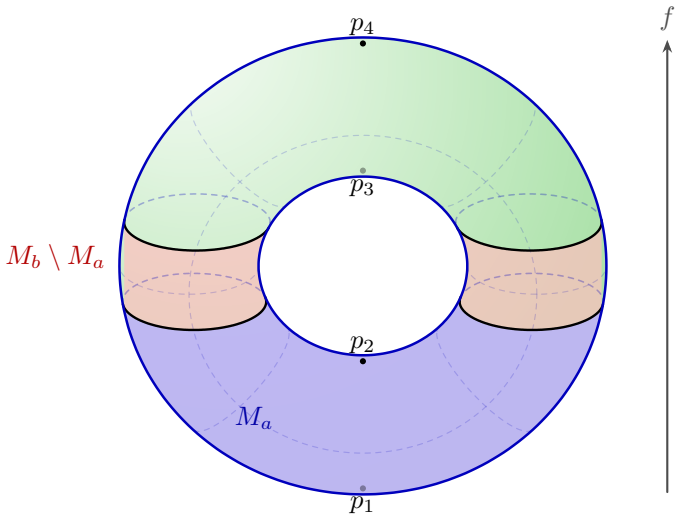
$$\frac{d}{dt} f(\Phi_X(p,t)) = \partial_{X(\Phi_X(p,t))} f.$$

För $p \in M$ och $t \in \mathbb{R}$ som uppfyller $\Phi_X(p,t) \in f^{-1}([a,b])$ gäller därför $\frac{d}{dt} f(\Phi_X(p,t)) = 1$, och detta medför att avbildningen $p \mapsto \Phi_X(p, b-a)$ ger en diffeomorfi $M_a \to M_b$.[2]

[1] Detta återstår att bevisa.
[2] Detta återstår att bevisa.



Figur 5.1: Den stående torusen med höjdfunktionen f och dess fyra kritiska punkter. Här är $f(p_1) < a < b < f(p_2)$: M_a (blått) och M_b (blått och rött) är båda diffeomorfa med slutna disken $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$.



Figur 5.2: Samma torus med $f(p_2) < a < b < f(p_3)$: M_a (blått) och M_b (blått och rött) är båda diffeomorfa med cylindern $S^1 \times [0, 1] \subseteq \mathbb{R}^3$.

Kapitel 6

Avstånd och geodeter

Kapitel 7

Gauss–Bonnets sats